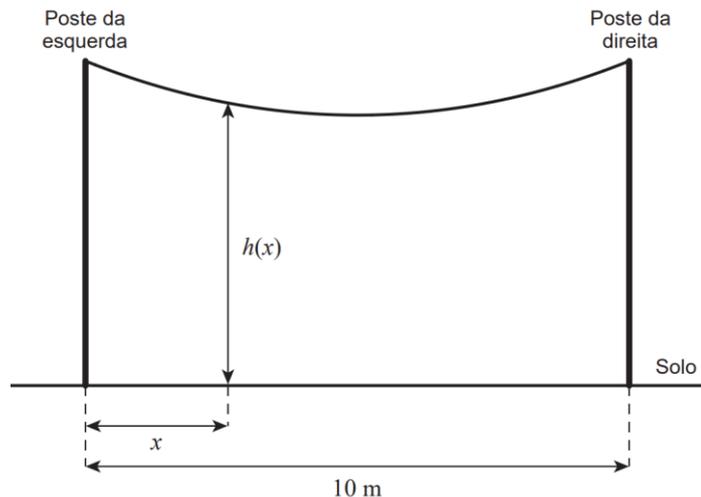




1. Na figura está representado um cabo suspenso pelas suas extremidades em dois postes iguais, distanciadados 10 metros entre si. Os postes estão instalados perpendicularmente ao solo, num terreno plano e horizontal. O ponto do cabo mais próximo do solo é equidistante dos dois postes.



Seja  $h$  a função de domínio  $[0, 10]$ , definida por  $h(x) = 6,3 \left( e^{\frac{x-5}{12,6}} + e^{\frac{5-x}{12,6}} \right) - 7,6$ .

Admita que  $h(x)$  é a altura, relativamente ao solo, em metros, de um ponto do cabo situado a  $x$  metros do ponto da esquerda.

Para um ponto do cabo situado a  $d$  metros do poste da esquerda, verifica-se que, diminuindo 50% essa distância, a altura, relativamente ao solo, diminui 30 centímetros.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de  $d$ , sabendo-se que este valor existe e é único.

Apresente o resultado arredondado às décimas de metro.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

Exame 2022, 1.ª fase

2. Para conhecer a variação do número de bactérias de uma determinada estirpe, colocou-se num tubo de ensaio fechado, com alguns nutrientes, um certo número de bactérias dessa estirpe.

Admita que, nessas condições, o número,  $N$ , em milhares, de bactérias vivas existentes no tubo,  $t$  horas após a sua colocação nesse tubo, é dado por

$$N(t) = N_0 e^{1,08t - 0,3t^2}$$

Em que  $N_0$  representa a dimensão, em milhares, da população inicial.

Num certo instante,  $t_1$ , havia, no tubo de ensaio, mais meio milhão de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de  $t_1$ , sabendo que este valor existe e é único.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

Exame 2021, época especial

3. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.

Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius,  $t$  minutos após o início do arrefecimento é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt}, 0 \leq t \leq 60$$

em que  $k$  é uma constante real positiva.

Considere  $k = 0,04$

Sabe-se que, durante os primeiros  $t_2$  minutos, a taxa média de variação da função  $T$  foi igual a  $-2,4$

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de  $t_2$ , sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame 2021, 2.ª fase

4. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam.

Admita que a Terra é uma esfera.

A figura ao lado apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição.

Nesta figura,

- $R$  é o raio, em quilómetros, da Terra;
- $h$  é a altitude, em quilómetros, do satélite ( $h > 0$ )
- $r$  é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite ( $0 < r < R$ )
- as grandezas  $h$  e  $r$  podem relacionar-se por meio da igualdade

$$r = \frac{R}{h + R} \sqrt{h^2 + 2hR}$$

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por  $50 \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2} \right)$

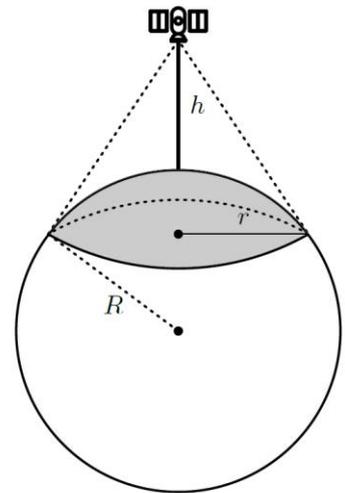
Considere que o raio da Terra é 6400 km. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio. Apresente o resultado arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.



Exame 2020, 2.ª fase

5. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial o.n.  $xOy$ ,

- parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

Considere que um ponto  $A$  se desloca no primeiro quadrante sobre o gráfico da função  $g$ . Para cada posição do ponto  $A$ , seja  $B$  o ponto do gráfico da função  $f$  cuja abcissa é igual a do ponto  $A$

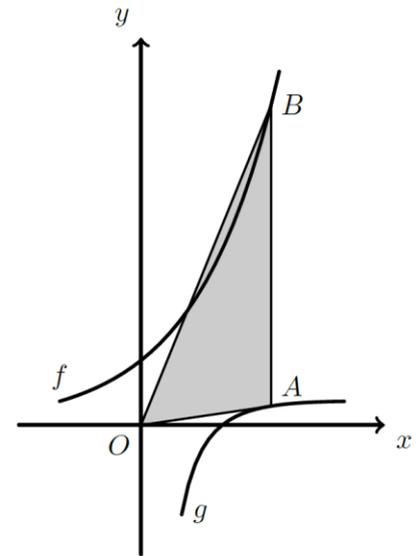
Seja  $a$  ( $a > 1$ ) a abcissa comum dos pontos  $A$  e  $B$

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de  $a$  para o qual a área do triângulo  $[OAB]$  é igual a 5, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de  $a$  arredondado às décimas.



Exame 2019, época especial

6. O nível,  $N$ , de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade,  $I$ , medida em microwatt por metro quadrado  $\mu W/m^2$ , de acordo com a igualdade

$$N = 60 + 10 \log_{10} I, \text{ com } I > 0$$

Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em  $150 \mu W/m^2$ , o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo  $[20,80]$  e que, neste intervalo, esse valor é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

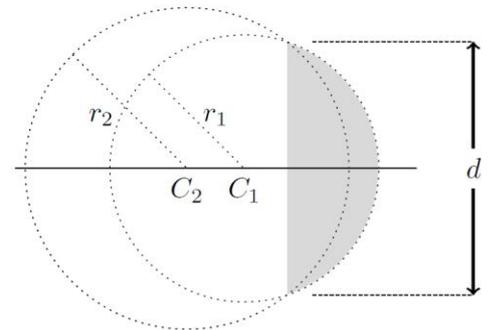
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o valor pedido;
- apresente esse valor em  $\mu W/m^2$ , arredondado às unidades.

Exame 2019, 2.ª fase

7. Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na figura ao lado, pode observar-se uma lente de contacto.



Na figura ao lado, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro  $C_1$  e raio  $r_1$  e outra de centro  $C_2$  e raio  $r_2$ , com  $r_2 > r_1$ , que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura.



Seja  $x = \overline{C_1 C_2}$

Sabe-se que o diâmetro,  $d$ , da lente é dado por

$$\frac{\sqrt{[(r_1 + r_2)^2 - x^2] [x^2 - (r_1 - r_2)^2]}}{x}, \text{ com } r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente.

O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância,  $x$ , entre os centros das duas superfícies esféricas.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de  $x$ , sabendo-se que esse valor é único no intervalo  $]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}[$

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

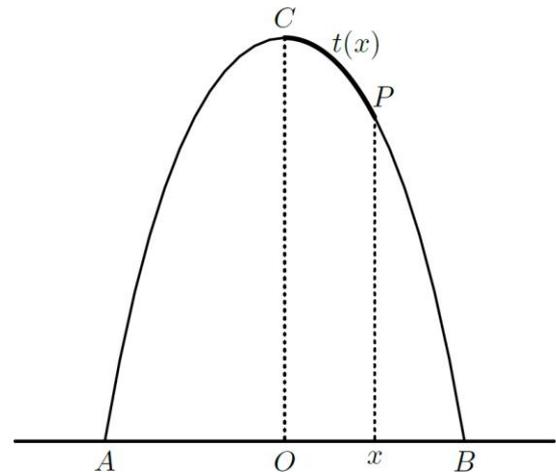
Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

Exame 2019, 1.ª fase

8. Na cidade de Saint Louis, nos Estados Unidos, existe um monumento em forma de arco conhecido como Portal do Oeste. No ponto mais elevado desse arco, encontra-se um miradouro ao qual se acede por um ascensor.

A figura seguinte, à esquerda, é uma fotografia dessa estrutura, e a figura da direita representa um esquema do arco.



Relativamente à figura da direita, sabe-se que:

- os pontos  $A$  e  $B$  representam a intersecção do arco com o solo;
- o ponto  $O$  é o ponto médio de  $[AB]$
- o ponto  $C$  representa o miradouro, e a reta  $OC$  é um eixo de simetria do arco.

que uma unidade corresponde a um metro.

Admita que o ascensor se está a deslocar no arco  $CB$ , do miradouro  $C$  para o ponto  $B$

Para cada ponto  $P$ , de abcissa  $x$ , situado no arco  $CB$ , o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco  $CP$  é dado, em minutos, por

$$t(x) = 0,34 (e^{0,0257x} - e^{-0,0257x}), \text{ com } x \in [0,96]$$

Num certo instante, o ascensor encontra-se num ponto  $F$  (não coincidente com o ponto  $C$ ), a uma certa distância da reta  $OC$ . Passado algum tempo, o ascensor encontra-se num ponto  $G$

A figura ao lado ilustra a situação.

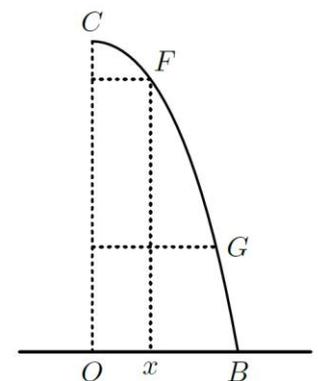
Sabe-se que:

- a distância do ponto  $G$  à reta  $OC$  é igual ao triplo da distância do ponto  $F$  à mesma reta;
- o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de  $F$  até  $G$  é igual ao triplo do tempo que demora a percorrer o arco que vai de  $C$  até  $F$

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a distância,  $x$ , em metros, do ponto  $F$  à reta  $OC$

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor da distância pedida arredondado às décimas.



Exame 2018, época especial

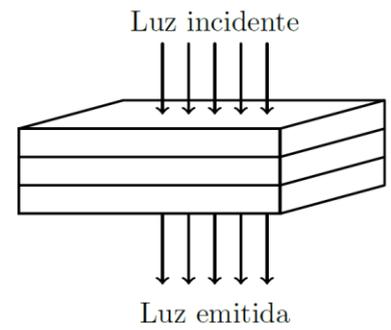
9. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogêneas e iguais, feitas de um material transparente. A figura seguinte ilustra a situação.

Admita que a potência,  $L$ , da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por

$$L = I(1 - R)^6 e^{-3\lambda}$$

em que:

- $I$  é a potência da luz incidente;
- $R$  é o coeficiente de reflexão do material ( $0 < R < 1$ )
- $\lambda$  é o coeficiente de absorção do material, por centímetro ( $\lambda > 0$ )



Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão,  $R$ , e o coeficiente de absorção,  $\lambda$ , têm o mesmo valor numérico.

Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

Exame 2018, 1.ª fase

10. Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n.  $xOy$ , parte do gráfico da função  $g$  e um triângulo  $OAP$

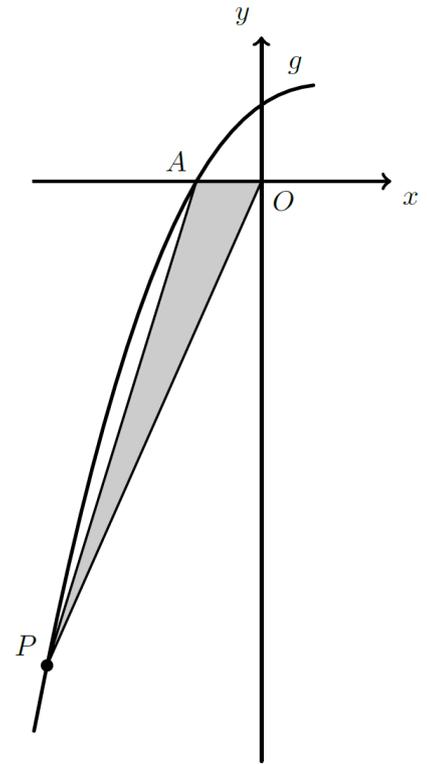
Sabe-se que:

- o ponto  $A$  é o ponto de abcissa negativa que é a intersecção do gráfico da função  $g$  com o eixo das abcissas;
- o ponto  $P$  é um ponto do gráfico da função  $g$ , de abcissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo  $[OAP]$  é igual a 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto  $P$ . Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

- determine analiticamente a abcissa do ponto  $A$
- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.



Exame 2017, 1.ª fase

11. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}_0^+$ , definida por  $f(x) = x^2 e^{1-x}$

Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , três pontos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , tais que:

- os pontos  $A$  e  $B$  pertencem ao gráfico da função  $f$
- a abcissa do ponto  $B$  é maior do que a abcissa do ponto  $A$
- os pontos  $A$  e  $B$  têm a mesma ordenada, a qual é igual a 1,2
- o ponto  $C$  pertence ao eixo  $Ox$  e tem abcissa igual à do ponto  $B$

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero  $[OABC]$ , sendo  $O$  a origem do referencial. Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, o gráfico da função  $f$  no intervalo  $[0,5]$
- apresente o desenho do quadrilátero  $[OABC]$
- indique as abcissas dos pontos  $A$  e  $B$  arredondadas às milésimas;
- apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas.

Exame 2015, época especial

12. Considere a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $g(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$

Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , a representação gráfica da função  $g$ , os pontos  $A$  e  $B$ , e a reta  $r$  de equação  $y = mx$ , com  $m < 0$

Sabe-se que:

- os pontos  $A$  e  $B$  pertencem ao gráfico da função  $g$
- a abcissa do ponto  $A$  é o zero da função  $g$
- o ponto  $B$  é o ponto de interseção da reta  $r$  com o gráfico da função  $g$
- a área do triângulo  $[OAB]$  é igual a 1

Determine a abcissa do ponto  $B$ , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
- indicar a abcissa do ponto  $A$  e a abcissa do ponto  $B$  com arredondamento às centésimas.

Exame 2014, época especial

13. Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , a representação gráfica da função  $f$ , de domínio  $[0,10]$ , definida por  $f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$ , e dois pontos  $A$  e  $B$

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  é o ponto de intersecção do gráfico da função  $f$  com o eixo das ordenadas;
- o ponto  $B$  pertence ao gráfico da função  $f$  e tem abcissa positiva;
- a reta  $AB$  tem declive  $-2$

Determine a abcissa do ponto  $B$ , recorrendo à calculadora gráfica.

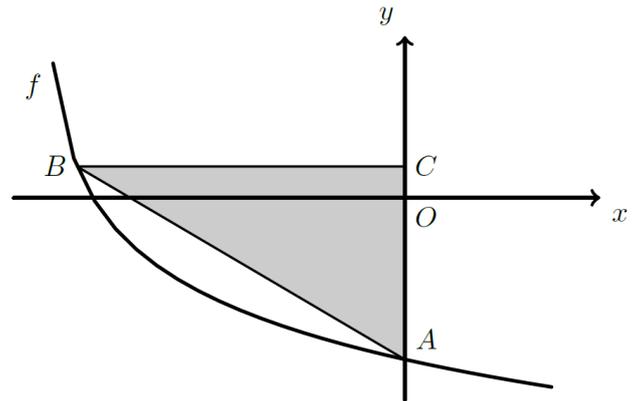
Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- indicar o valor da abcissa do ponto  $B$  com arredondamento às centésimas.

Exame 2014, 2.ª fase

14. Considere a função  $f$ , de domínio  $] - e^2, + \infty[$ , definida por  $f(x) = -\ln(x + e^2)$

Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n.  $xOy$ , parte do gráfico da função  $f$  e o triângulo  $[ABC]$



Sabe-se que:

- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(0, -2)$
- o ponto  $B$  pertence ao gráfico da função  $f$  e tem abcissa negativa;
- o ponto  $C$  pertence ao eixo  $Oy$  e tem ordenada igual à do ponto  $B$
- a área do triângulo  $[ABC]$  é igual a 8

Determine a abcissa do ponto  $B$ , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

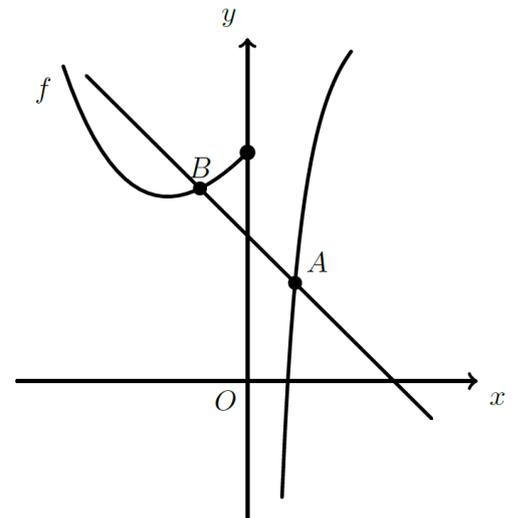
- escrever uma expressão da área do triângulo  $[ABC]$  em função da abcissa do ponto  $B$
- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
- indicar a abcissa do ponto  $B$  com arredondamento às centésimas.

Exame 2014, 1.ª fase

15. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 + e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{3x + \ln x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n.  $xOy$ , parte do gráfico da função  $f$ , os pontos  $A$  e  $B$ , ambos pertencentes ao gráfico de  $f$ , e a reta  $AB$



Sabe-se que:

- a reta  $AB$  é paralela à bissetriz dos quadrantes pares;
- os pontos  $A$  e  $B$  têm abcissas simétricas;
- a abcissa do ponto  $A$  pertence ao intervalo  $]0,1[$

Seja  $a$  a abcissa do ponto  $A$

Determine o valor de  $a$ , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indicar o valor de  $a$ , com arredondamento às milésimas.

Teste Intermédio 12.º ano, março 2014

16. Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , a representação gráfica da função  $f$ , de domínio  $[-1, 2]$  definida por  $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$ , o ponto  $A$  de coordenadas  $(2, 0)$  e um ponto  $P$  que se desloca ao longo do gráfico da função  $f$

Existe uma posição do ponto  $P$  para a qual a área do triângulo  $[AOP]$  é mínima.

Determine a área desse triângulo, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar o valor da área do triângulo  $[AOP]$  com arredondamento às centésimas.

Exame 2013, 2.ª fase

17. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus 0$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se } x < 0 \\ \frac{e^{x-1}}{e^{4x-1}} & \text{se } x < 0 \\ x \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva, recorrendo à calculadora gráfica.

Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , a representação gráfica da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por

$$g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$$

Sabe-se que:

- $A$  é o ponto de coordenadas  $(2, 0)$
- $B$  é o ponto de coordenadas  $(5, 0)$
- $P$  é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função  $g$

Para cada posição do ponto  $P$ , considere o triângulo  $[ABP]$

Determine as abcissas dos pontos  $P$  para os quais a área do triângulo  $[ABP]$  é 1

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as abcissas dos pontos  $P$  com arredondamento às centésimas.

Exame 2013, 1.ª fase

18. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} & \text{se } x \leq 4 \\ \frac{\ln(3x-11)}{x-4} & \text{se } x > 4 \end{cases}$

Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , o triângulo  $[OPQ]$  tal que:

- o ponto  $P$  é o ponto de intersecção do gráfico da função  $f$  com o eixo das ordenadas;
- o ponto  $Q$  é o ponto do gráfico da função  $f$  que tem abcissa positiva e ordenada igual à ordenada do ponto  $P$

Determine um valor aproximado da área do triângulo  $[OPQ]$ , recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função  $f$  para  $x \in [0,10]$
- desenhar o triângulo  $[OPQ]$
- indicar a abcissa do ponto  $Q$  arredondada às milésimas;
- apresentar a área do triângulo  $[OPQ]$  arredondada às centésimas.

**Nota** – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Teste Intermédio 12.º ano, fevereiro 2013

19. Considere, num referencial o. n.  $xOy$ , o gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por

$$f(x) = e^{0,1x} + \ln(3x + 1)$$

Seja  $P$  um ponto do gráfico de  $f$

A distância do ponto  $P$  à origem é igual a 2

Determine a abcissa do ponto  $P$ , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto  $P$  com arredondamento às centésimas.

Exame 2012, época especial

20. Considere a função  $f$ , de domínio  $[-7,0]$ , definida por

$$f(x) = e^x + \ln(x^2) + 3$$

Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de intersecção do gráfico de  $f$  com a bissetriz dos quadrantes pares, e seja  $d$  a distância entre os pontos  $A$  e  $B$

Determine  $d$ , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar os pontos  $A$  e  $B$
- indicar as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$  com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor de  $d$  com arredondamento às centésimas.

Exame 2012, 2.ª fase

21. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , e a função  $g$ , de domínio  $]0, +\infty[$ , definidas por

$$f(x) = e^{x-2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} \quad \text{e} \quad g = -\ln(x) + 4$$

Considere ainda, num referencial o. n.  $xOy$ , os gráficos das funções  $f$  e  $g$  e o triângulo  $[OAB]$ . Sabe-se que:

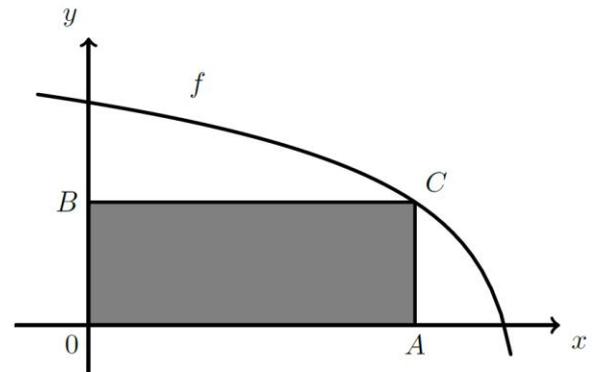
- $O$  é a origem do referencial;
- $A$  e  $B$  são pontos do gráfico de  $f$
- a abcissa do ponto  $A$  é o zero da função  $f$
- o ponto  $B$  é o ponto de intersecção do gráfico da função  $f$  com o gráfico da função  $g$

Determine a área do triângulo  $[OAB]$ , recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

- reproduzir os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , devidamente identificados, incluindo o referencial;
- assinalar os pontos  $A$  e  $B$
- indicar a abcissa do ponto  $A$  e as coordenadas do ponto  $B$  com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor da área pedida com arredondamento às décimas.

Exame 2012, 1.ª fase

22. Na figura ao lado, está representada, num referencial o. n.  $xOy$ , parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $] -\infty, 6[$ , definida por  $f(x) = 2 + 15 \ln\left(3 - \frac{1}{2}x\right)$ . Considere que um ponto  $C$  se desloca ao longo do gráfico de  $f$ , e que  $C$  tem coordenadas positivas. Para cada posição do ponto  $C$ , considere o retângulo  $[OACB]$ , em que o ponto  $A$  pertence ao eixo das abcissas e o ponto  $B$  pertence ao eixo das ordenadas.



Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto  $A$  para a qual a área do retângulo  $[OACB]$  é máxima.

Na sua resposta, deve:

- escrever a expressão que dá a área do retângulo  $[OACB]$  em função da abcissa do ponto  $A$ ;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto  $A$  com arredondamento às centésimas.

Exame 2011, época especial

23. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \frac{2 + \ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Existem dois pontos no gráfico de  $f$  cujas ordenadas são o cubo das abcissas. Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar esses pontos;
- indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

Exame 2011, 1.ª fase

24. Considere a função  $f$ , de domínio  $]0, +\infty[$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Determine a área do triângulo  $[ABC]$ , recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Sabe-se que:

- $A$ ,  $B$  e  $C$  são pontos do gráfico da função  $f$
- $A$  e  $B$  são os pontos cujas abcissas são as soluções, no intervalo  $]0, 2]$ , da equação  $f(x) = f(15)$
- $C$  é o ponto cuja ordenada é o mínimo da função  $f$ , no intervalo  $]0, 2]$ , e cuja abcissa pertence ao intervalo  $]0, 2]$

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , com arredondamento às centésimas;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

Exame 2010, 2.ª fase

25. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-\sqrt{2x}} & \text{se } 0 < x < 2 \\ xe^{-x} + x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $g(x) = 3 + \ln(x)$ . A equação  $f(x) = g(x)$  tem exatamente duas soluções.

Determine essas soluções, **utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora**.

Apresente as soluções arredondadas às centésimas.

Apresente os gráficos que obteve na calculadora e assinale os pontos relevantes.

Teste Intermédio 12.º ano, março 2010

- 26.** Considere a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $g(x) = e^{2x} + \ln x$ .  
 O gráfico de  $g$  contém um único ponto  $A$  com abcissa pertencente ao intervalo  $]0, 2]$  e cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa.  
 Traduza esta situação por meio de uma equação.  
 Resolva a equação, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.  
 Indique as coordenadas do ponto  $A$ , com aproximação às décimas.  
 Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.  
 Assinale o ponto  $A$  em que se baseou para dar a sua resposta.

Exame 2009, 1.ª fase

- 27.** Considere a função  $g$ , de domínio  $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ , definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x + \ln(1 + x - x^2) & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

**Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, determine o valor de  $x$  pertencente ao intervalo  $\left[-\frac{1}{2}, 1\right[$  tal que  $g(x) = -2 + g(4)$ .

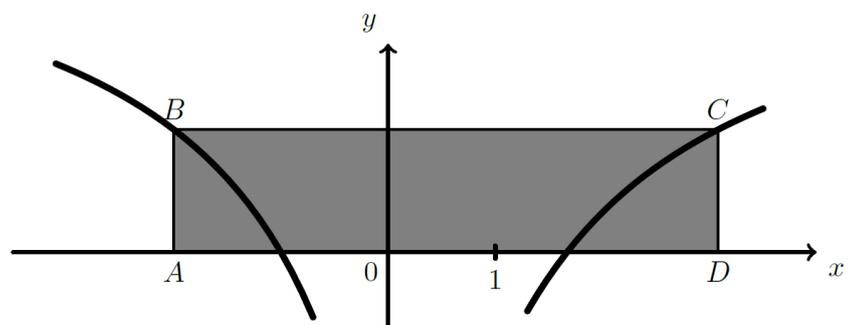
Indique o valor pedido arredondado às décimas e apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora.

Teste Intermédio 12.º ano, maio 2009

- 28.** Seja  $f$  a função de domínio  $\mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1} & \text{se } x < 1 \\ \ln(x) - e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Na figura ao lado está representada, em referencial o.n.  $xOy$ , parte do gráfico da função  $f$



O retângulo  $[ABCD]$  tem dois vértices no eixo  $Ox$ , estando os outros dois no gráfico de  $f$ . O ponto  $A$  tem abcissa  $-2$ .

Determine a área do retângulo  $[ABCD]$ .

**Nota:** Na resolução deste problema vai necessitar de determinar a abcissa do ponto  $C$ .

Para tal, utilize as capacidades gráficas da sua calculadora.

Reproduza na sua folha de prova a parte do gráfico de  $f$  que visualizou, bem como a reta  $BC$ . Assinale também o ponto  $C$  e apresente a sua abcissa arredondada às centésimas.

Apresente a área pedida igualmente arredondada às centésimas.

Teste Intermédio 12.º ano, março 2009

- 29.** Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .  
 No intervalo  $]0, 5]$ , a reta de equação  $y = 6$  intersesta o gráfico da função  $f$  nos pontos  $A$  e  $B$ .  
 Determine a distância de  $A$  a  $B$ , com aproximação às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.  
 Apresente o gráfico, ou os gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta, assinalando os pontos  $A$  e  $B$  e indicando as suas coordenadas com aproximação às décimas.

Exame 2008, época especial

- 30.** Considere a função  $f$ , de domínio  $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$ , definida por  $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}$ , e a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = x - 2$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ ).  
 Indique as soluções inteiras da inequação  $f(x) > g(x)$ , **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.  
 Para resolver esta inequação, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda, os pontos  $A$  e  $B$ , de intersecção dos gráficos das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas.

Exame 2008, 2.ª fase

- 31.** Considere, num referencial ortonormado  $xOy$ , os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , de domínio  $[0, 3]$ , definidas por  $f(x) = \ln(x+2)$  e  $g(x) = e - e^{x-1}$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ ).  
 Determine a **área de um triângulo**  $[OAB]$ , com aproximação às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.  
 Para construir o triângulo  $[OAB]$ , percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções, **no domínio indicado**;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda:
  - a origem  $O$  do referencial;
  - o ponto  $A$  de intersecção do gráfico das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas;
  - o ponto  $B$  de intersecção do gráfico da função  $g$  com o eixo  $Ox$ .

Exame 2008, 1.ª fase

32. Admita que uma certa população de seres vivos evolui de acordo com a seguinte lei: o número de indivíduos da população,  $t$  dias após um certo instante inicial, é dado aproximadamente por

$$P(t) = ae^{kt} \quad (t \in \mathbb{R}_+^0)$$

em que

- $a$  é o número de indivíduos da população no instante inicial ( $a > 0$ )
- $k$  é uma constante real

Admita que, às zero horas do dia 1 do corrente mês, se iniciou, em laboratório, uma cultura de bactérias, em pequena escala, na qual se juntaram 500 indivíduos de uma estirpe  $A$  e 500 indivíduos de uma estirpe  $B$ .

Sabe-se que

- no caso da estirpe  $A$ , o valor da constante  $k_A$ , com quatro casas decimais, é  $k_A = -0,6931$
- no caso da estirpe  $B$ , o valor da constante  $k_B$ , com quatro casas decimais, é  $k_B = 0,1155$

Nunca foram introduzidos mais indivíduos destas duas estirpes nesta cultura.

Quer a estirpe  $A$ , quer a estirpe  $B$ , evoluíram de acordo com a acima lei referida.

Durante a primeira semana, houve um momento em que o **número total** de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, atingiu o valor mínimo.

Utilizando os valores de  $k_a$  e de  $k_b$  e recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o **dia e a hora** em que tal aconteceu (hora arredondada às unidades).

Apresente, na sua resposta:

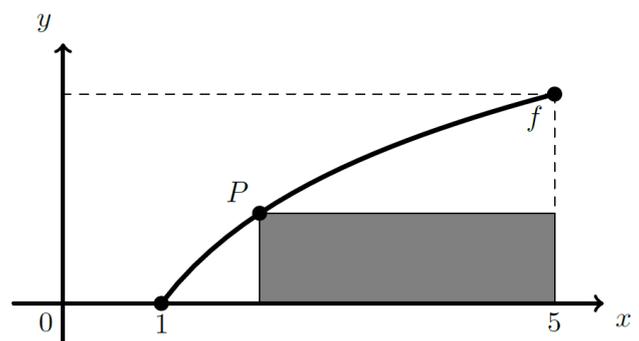
- a expressão da função que dá o número total de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, em função do tempo;
- o gráfico dessa função, para  $t \in [0,7]$ , no qual deve estar devidamente assinalado o ponto necessário à resolução do problema;
- a coordenada relevante desse ponto, arredondada às milésimas.

Teste Intermédio 12.º ano, janeiro 2008

33. Seja  $f$  a função, de domínio  $[1,5]$ , definida por  $f(x) = \ln x$  ( $\ln$  designa logaritmo na base  $e$ )

Na figura ao lado está representado, em referencial ortonormado  $xOy$ , o gráfico da função  $f$ .

Considere que um ponto  $P$  se desloca ao longo do gráfico de  $f$ . Para cada posição do ponto  $P$ , considere o retângulo em que um dos lados está contido no eixo  $Ox$ , outro na reta de equação  $x = 5$  e os outros dois nas retas vertical e horizontal que passam pelo ponto  $P$ .



Exprima a área do retângulo em função da abcissa de  $P$ , e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de  $P$  (aproximada às centésimas) para a qual a área do retângulo é máxima. Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora:

- o gráfico obtido;
- o ponto de ordenada máxima e respetivas coordenadas.

Exame 2007, 1.ª fase

34. Considere, num referencial o. n.  $xoy$ ,

- a curva  $C$ , que representa graficamente a função  $f$ , de domínio  $[0,1]$ , definida por  $f(x) = e^x + 3x$
- a reta  $r$ , de equação  $y = 5$

**Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, visualize a curva  $C$  e a reta  $r$ , na janela  $[0,1] \times [0,7]$  (janela em que  $x \in [0,1]$  e  $y \in [0,7]$ ).

Reproduza, na sua folha de teste, o referencial, a curva  $C$  e a reta  $r$ , visualizados na calculadora.

Assinale ainda os pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$ , em que:

- $O$  é a origem do referencial;
- $P$  é o ponto de coordenadas  $(0,e)$ ;
- $Q$  é o ponto de interseção da curva  $C$  com a reta  $r$ ; relativamente a este ponto, indique, com duas casas decimais, a sua abcissa, que deve determinar com recurso à calculadora.

Desenhe o triângulo  $[OPQ]$  e **determine a sua área**. Apresente o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Teste Intermédio 12.º ano, março 2007

35. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do lucro obtido, de acordo com a função

$$L(x) = (x - 3)e^{14-x}$$

sendo  $x$  o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e  $L(x)$  o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite.

Utilize a calculadora para resolver **graficamente** o seguinte problema:

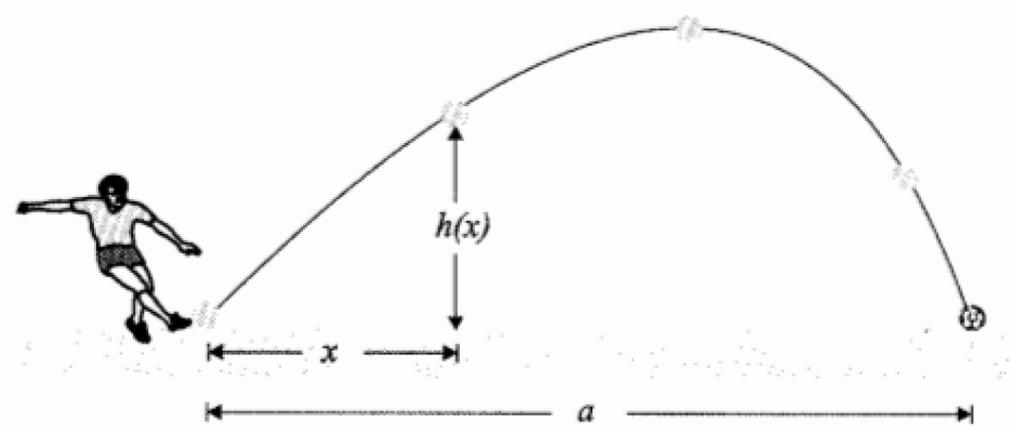
*Entre que valores deve variar o preço de um litro de azeite de venda ao público para que o lucro mensal seja superior a dezasseis mil e quinhentos euros?*

*Apresente os valores em euros, arredondados aos cêntimos (de euro).*

Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

Teste Intermédio 12.º ano, março 2006

36. Na figura ao lado está representada a trajetória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador de da seleção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.



Designou-se por  $a$  a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu.

Considere a função  $h$  definida em  $[0, a]$  por:

$$h(x) = 2x + 10 \ln(1 - 0,1x) \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Admita que  $h(x)$  é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projeção no solo se encontra a  $x$  metros do local onde foi pontapeada.

**Recorrendo à calculadora**, determine o valor de  $a$ , arredondado às centésimas.

**Explique como procedeu, apresentando todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora.**

Exame 2005, 2.ª fase

37. No início de 1972, havia quatrocentos lobos num determinado parque natural. As medidas de proteção a lobos fizeram com que o referido número aumentasse continuamente. Os recursos do parque permitem que o número de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que esse valor seja ultrapassado. Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função  $P$  que dá o número aproximado de lobos existentes no parque natural,  $t$  anos após o início de 1972.

(A)  $\frac{1000}{1 + e^{-0,5t}}$       (B)  $\frac{1000}{1 + 1,5e^{-0,5t}}$       (C)  $\frac{1200}{1 + 2e^{-t}}$       (D)  $1000 - \frac{600(t^3 + 1)}{e^t}$

Qual é a expressão correta? Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique as razões que o levariam a rejeitar as outras três opções (**apresente três razões diferentes, uma por cada opção rejeitada**).

**Nota:** poder-lhe-à ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. **Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtido(s).**

Exame 2005, 2.ª fase

38. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

O conjunto solução da inequação  $f(x) \leq 3 + \ln x$  é um intervalo fechado  $[a, b]$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ ).

Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para  $a$  e  $b$ , arredondados às centésimas.

**Nota:** apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

Exame 2004, 2.ª fase

39. Considere as funções  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por:

$$f(x) = \ln x \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

$$g(x) = x^2 - 3$$

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, investigue se todo o número  $x$  do intervalo  $[0,1; 1,8]$  é solução da inequação  $f(x) > g(x)$ . Indique a conclusão a que chegou e explique como procedeu. Deverá incluir na sua explicação os gráficos obtidos na sua calculadora.

Exame 2002, prova militares

40. Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos.

Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respetivamente, por

$$A(t) = 4t^3 e^{-t} \quad \text{e} \quad C(t) = 2t^3 e^{-0,7t}$$

A variável  $t$  designa o tempo, medido em **horas**, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ( $t \in [0,12]$ ).

Considere as seguintes questões:

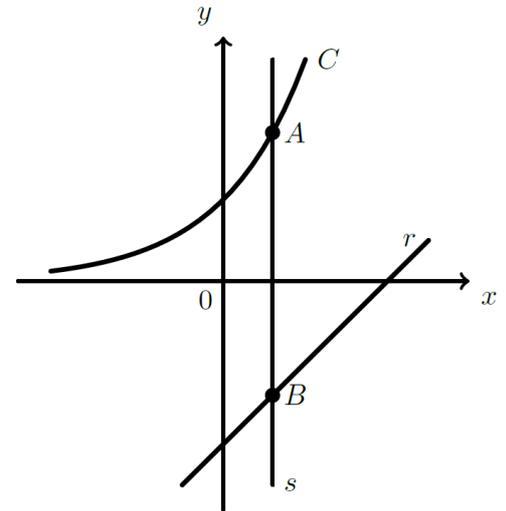
1. *Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com alguma destas duas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?*
2. *Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 1 miligrama por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do medicamento. Quem deve tomá-la em primeiro lugar, a Ana ou o Carlos? E quanto tempo antes do outro?*

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões.

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicita as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

Exame 2002, 1.ª fase

41. Na figura ao lado estão representadas, em referencial o. n.  $xOy$
- uma curva  $C$ , gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x$
  - uma reta  $r$ , gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = x - 2$
  - uma reta  $s$  paralela ao eixo  $Oy$



Sejam  $A$  e  $B$  os pontos de interseção da reta  $s$  com a curva  $C$  e com a reta  $r$ , respetivamente.

Imagine que a reta  $s$  se desloca, mantendo-se sempre paralela ao eixo  $Oy$ .

Os pontos  $A$  e  $B$  acompanham, naturalmente, o deslocamento da reta  $s$ .

Seja  $x$  a abcissa do ponto  $A$ .

Recorrendo à calculadora, determine  $x \in [0,2]$  tal que  $\overline{AB} = 5$ . Apresente o resultado aproximado às décimas. Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

Exame 2001, época especial

42. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = 3x - 2 \ln x$  ( $\ln$  designa o logaritmo de base  $e$ ). O gráfico de  $f$  contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado às décimas). Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

Exame 2001, 1.ª fase

43. Um laboratório farmacêutico lançou no mercado um novo analgésico: o *AntiDor*. A concentração deste medicamento, em decigramas por litro de sangue,  $t$  horas após ter sido administrado a uma pessoa, é dado por

$$c(t) = t^2 e^{-0,6t} \quad (t \geq 0)$$

O mesmo laboratório realizou uma campanha de promoção deste medicamento, baseado no *slogan*:

« *AntiDor - Ação rápida e prolongada!* »

Numa breve composição, comente o *slogan*, tendo em conta que:

- para a maioria das dores, o *AntiDor* só produz efeito se a sua concentração for superior a 1 decigrama por litro de sangue;
- de acordo com uma associação de defesa do consumidor, um bom analgésico deve começar a produzir efeito, no máximo, meia hora após ter sido tomado, e a sua ação deve permanecer durante, pelo menos, cinco horas (após ter começado a produzir efeito).

**Nota:** na resolução deste item, deve utilizar as capacidades gráficas da sua calculadora e enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos.

Exame 2000, prova modelo