

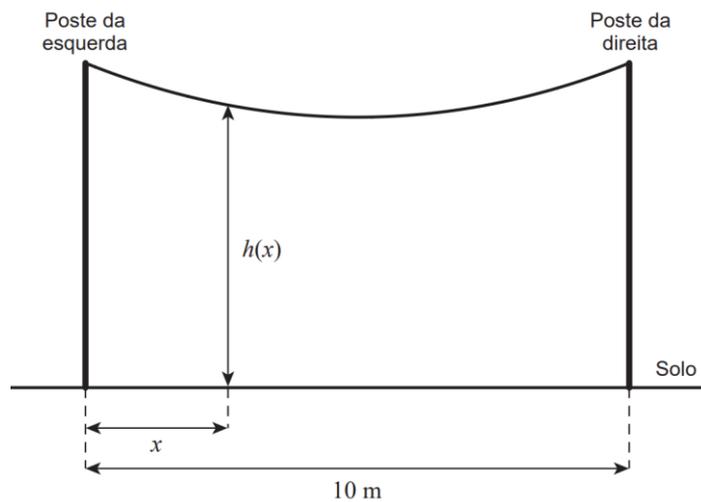
1. Sem recorrer à calculadora.

Determine os números reais que são solução da equação.

$$(e^x - 1) \ln(5 - 2x) + e^x \ln(3 - x) = \ln(3 - x)$$

Exame 2022, 1.ª fase

2. Na figura está representado um cabo suspenso pelas suas extremidades em dois postes iguais, distanciados 10 metros entre si. Os postes estão instalados perpendicularmente ao solo, num terreno plano e horizontal. O ponto do cabo mais próximo do solo é equidistante dos dois postes.



Seja  $h$  a função de domínio  $[0, 10]$ , definida por  $h(x) = 6,3 \left( e^{\frac{x-5}{12,6}} + e^{\frac{5-x}{12,6}} \right) - 7,6$ .

Admita que  $h(x)$  é a altura, relativamente ao solo, em metros, de um ponto do cabo situado a  $x$  metros do ponto da esquerda.

Qual é a distância, arredondada às décimas de metro, da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo?

- (A) 7,1 m                      (B) 7,2 m                      (C) 7,6 m                      (D) 7,8 m

Exame 2022, 1.ª fase

3. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que verificam a condição

$$e^{-x}(4 + 2^{2x}) \geq 5 \quad \wedge \quad -2 \leq x \leq 2$$

Apresente o resultado na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

Exame 2021, época especial

4. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora. Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius,  $t$  minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt} \quad , \quad 0 \leq t \leq 60$$

em que  $k$  é uma constante real positiva.

Durante o arrefecimento, houve uma instante  $t_1$  em que a temperatura da substância foi de 30°C.

Qual é o valor de  $k$  ?

- (A)  $\ln \frac{10}{t_1}$       (B)  $t_1 - \ln 10$       (C)  $\frac{\ln 10}{t_1}$       (D)  $t_1 + \ln 10$

Exame 2021, 2.ª fase

5. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$x \ln(1 - x) - \ln(1 - x) = (1 - x) \ln(3 - 2x)$$

Exame 2021, 2.ª fase

6. Determine sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$\ln((1 - x)e^{x-1}) = x$$

Exame 2021, 1.ª fase

7. Dados dois números reais positivos, sabe-se que a soma dos seus logaritmos na base 8 é igual a  $\frac{1}{3}$

A que é igual o produto desses dois números?

- (A) 2      (B) 3      (C) 8      (D) 9

Exame 2020, 2.ª fase

8. Seja  $f$  a função definida em  $]-\infty, 2]$  por  $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$

8.1. Sem recorrer à calculadora

A equação  $f(x) = 2x + 1$  tem uma única solução.

Determine essa solução e apresente-a na forma  $-\ln k$ , com  $k > 0$

8.2. Seja  $h$  a função definida em  $]-\infty, 2]$  por  $h(x) = f(x) - x$

Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função  $h^{-1}$ , função inversa de  $h$  ?

- (A)  $e^x - 1$       (B)  $1 - e^x$       (C)  $\ln(e^x - 1)$       (D)  $\ln(1 - e^x)$

Exame 2020, 1.ª fase

9. Considere a função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , definida por  $h(x) = \frac{e^x}{x - 1}$

Resolva, em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , a equação  $(x - 1) \times h(x) + 2e^{-x} = 3$

Exame 2019, 2.ª fase

10. Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais positivos tais que  $a > b$

Sabe-se que  $a + b = 2(a - b)$

Qual é o valor, arredondado às décimas, de  $\ln(a^2 - b^2) - 2 \ln(a + b)$  ?

- (A) 0,7      (B) 1,4      (C) -0,7      (D) -1,4

Exame 2019, 1.ª fase

11. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x + 1) \leq 3 - \log_2(8 - x)$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Exame 2018, 2.ª fase

12. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \frac{e^x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \frac{\ln(x^2) + 2}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Seja  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = x + 1$

Qual é o valor de  $(f \circ h^{-1})(2)$ ?

(o símbolo  $\circ$  designa a composição de funções)

- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3

Exame 2018, 2.ª fase

13. Sejam  $a$  e  $b$  números reais superiores a 1 tais que  $\ln b = 4 \ln a$

Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação  $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Exame 2018, 1.ª fase

14. Seja  $a$  um número real superior a 1

Qual é o valor de  $4 + \log_a(5^{\ln a})$ ?

- (A)  $\ln(10e)$       (B)  $\ln(5e^4)$       (C)  $\ln(5e^2)$       (D)  $\ln(20e)$

Exame 2017, época especial

- 15.** Pretende-se eliminar um poluente diluído na água de um tanque de um viveiro. Para tal, é escoada água por um orifício na base do tanque e, em simultâneo, é vertida no tanque água não poluída, de tal modo que a quantidade total de água no tanque se mantém.

Admita que a massa,  $p$ , de poluente, medida em gramas,  $t$  horas após o início do processo, é, para um certo número real positivo  $k$ , dada por

$$p(t) = 120 e^{-kt}, \quad (t \geq 0)$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo exclusivamente a métodos analíticos.

Na resolução do segundo item, pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

- 15.1.** Determine o valor de  $k$ , sabendo que, duas horas após o início do processo, a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora. Apresente o resultado na forma  $\ln a$ , com  $a > 1$

Admita agora que  $k = 0,7$

Determine a taxa média de variação da função  $p$  no intervalo  $[0,3]$  e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

- 14.2.**

Apresente o valor da taxa média de variação arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame 2017, época especial

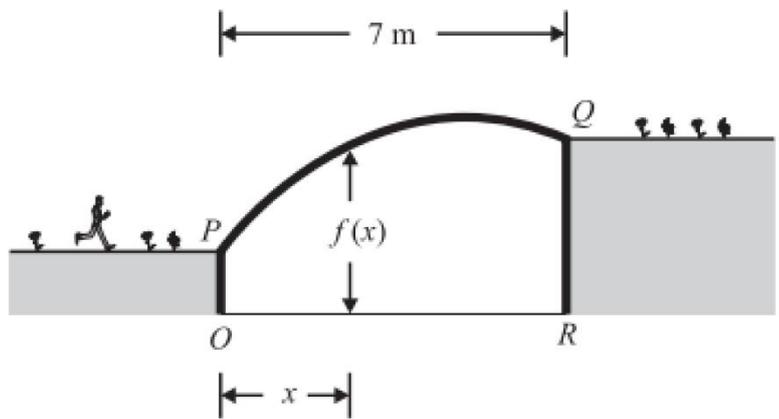
- 16.** Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Resolva a inequação  $f(x) > 2 \ln x$ , recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

Exame 2017, 2.ª fase

17. Na figura ao lado, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio. A ponte, representada pelo arco  $PQ$ , está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta  $[OP]$  e  $[RQ]$ . A distância entre as duas paredes é 7 metros.



O segmento de reta  $[OR]$  representa a superfície da água do rio.

Considere a reta  $OR$  como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto  $O$  e em que uma unidade corresponde a 1 metro.

Para cada ponto situado entre  $O$  e  $R$ , de abcissa  $x$ , a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco  $PQ$  é dada por

$$f(x) = 9 - 2,5(e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}), \text{ com } x \in [0,7]$$

Resolva o item seguinte recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

Seja  $S$  o ponto pertencente ao segmento de reta  $[OR]$  cuja abcissa  $x$  verifica a equação

$$\sqrt{f(0)^2 + x^2} = 2$$

Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame 2017, 1.ª fase

18. Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais superiores a 1, tais que  $a = b^3$

Qual dos valores seguintes é igual  $\log_a b + \log_b a$  ?

- (A)  $\frac{4}{3}$       (B) 1      (C)  $\frac{10}{3}$       (D) 3

Exame 2016, época especial

19. Seja  $f$  a função, de domínio  $[-3,3]$ , cujo gráfico está representado na figura ao lado.

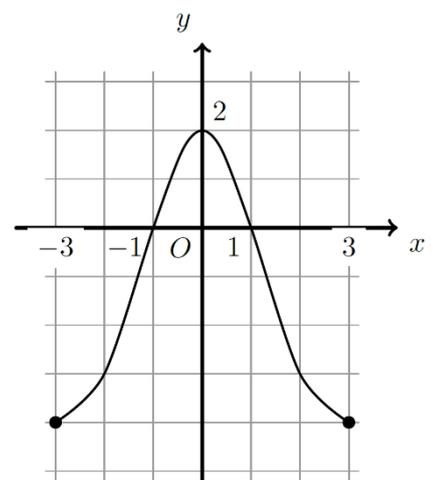
Tal como a figura sugere, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.

Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $g(x) = \ln x$

Quais são as soluções da equação  $(f \circ g)(x) = 0$  ?

(o símbolo  $\circ$  designa a composição de funções)

- (A)  $\frac{1}{e}; e^2$       (B)  $e; e^2$       (C) 1;  $e$       (D)  $\frac{1}{e}; e$



Exame 2016, época especial

- 20.** O movimento de uma nave espacial é um movimento de propulsão provocado pela libertação de gases resultantes da queima e explosão de combustível.

Um certo tipo de nave tem por função o transporte de carga destinada ao abastecimento de uma estação espacial.

Designemos por  $x$  a massa, em milhares de toneladas, da carga transportada por uma nave desse tipo e por  $V$  a velocidade, em quilómetro por segundo, que essa mesma nave atinge no instante em que termina a queima do combustível.

Considere que  $V$  é dada, em função de  $x$ , por  $V(x) = 3 \ln \left( \frac{x + 300}{x + 60} \right)$  ( $x \geq 0$ )

Nos dois itens seguintes, a calculadora só pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

- 20.1.** Admita que uma nave do tipo referido transporta uma carga de 25 mil toneladas.  
Determine quanto tempo demora essa nave a percorrer 200 quilómetros a partir do instante em que termina a queima do combustível, sabendo que a velocidade da nave se mantém constante a partir desse instante.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

- 20.2.** Determine qual deve ser a massa da carga transportada por uma dessas naves, de modo que atinja, após a queima da totalidade do combustível, uma velocidade de 3 quilómetros por segundo.

Apresente o resultado em milhares de toneladas, arredondado às unidades.

Exame 2016, época especial

- 21.** Seja  $k$  um número real positivo.  
Considere a função  $g$ , de domínio  $] -k, +\infty[$ , definida por  $g(x) = \ln(x+k)$  Mostre que: se  $g(k) \times g(0) < 0$ , então  $k \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$  Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

Exame 2016, época especial

- 22.** Para certos valores de  $a$  e de  $b$  ( $a > 1$  e  $b > 1$ ), tem-se  $\log_a(ab^3) = 5$

Qual é, para esses valores de  $a$  e de  $b$ , o valor de  $\log_b a$  ?

- (A)  $\frac{5}{3}$       (B)  $\frac{3}{4}$       (C)  $\frac{3}{5}$       (D)  $\frac{1}{3}$

Exame 2016, 2.ª fase

23. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro.

Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato.

Nesse contrato, a prestação mensal  $p$ , em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por

$$p = \frac{600x}{1 - e^{-nx}}$$

em que  $n$  é o número de meses em que o empréstimo será pago e  $x$  é a taxa de juro mensal.

Resolva recorrendo a métodos analíticos.

Na resolução, pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria 0,3% ( $x = 0,003$ )

Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros?

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

Exame 2016, 2.ª fase

24. Considere a função  $f$ , de domínio  $] - \infty, -1[ \cup ]1, + \infty[$  definida por  $f(x) = \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$

Resolva o item seguinte recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Seja  $a$  um número real maior do que 1

Mostre que a reta secante ao gráfico de  $f$  nos pontos de abcissas  $a$  e  $-a$  passa na origem do referencial.

Exame 2016, 1.ª fase

25. Seja  $a$  um número real.  
Seja a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = e^{a \ln x}$

Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , o ponto  $P(2,8)$

Sabe-se que o ponto  $P$  pertence ao gráfico de  $f$

Qual é o valor de  $a$ ?

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4

Exame 2015, época especial

26. Admita que, ao longo dos séculos XIX, XX e XXI, o número de habitantes,  $N$ , em milhões, de uma certa região do globo é dado aproximadamente por

$$N = \frac{200}{1 + 50e^{-0,25t}} \quad (t \geq 0)$$

em que  $t$  é o tempo medido em décadas e em que o instante  $t = 0$  corresponde ao **final** do ano 1800.

- 26.1. Determine a taxa média de variação da função  $N$  no intervalo  $[10, 20]$   
 Apresente o resultado arredondado às unidades.  
 Interprete o resultado, no contexto da situação descrita.

- 26.2. Mostre que  $t = \ln \left( \frac{50N}{200 - N} \right)^4$

Exame 2015, época especial

27. Para certos valores de  $a$  e de  $b$  ( $a > 1$  e  $b > 1$ ), tem-se  $\log_b a = \frac{1}{3}$

Qual é, para esses valores de  $a$  e de  $b$ , o valor de  $\log_a(a^2b)$  ?

- (A)  $\frac{2}{3}$       (B)  $\frac{5}{3}$       (C) 2      (D) 5

Exame 2015, 2.ª fase

28. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x - 3) - \ln x & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Resolva, em  $]-\infty, 3]$ , a condição  $f(x) - 2x > 1$ , recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

Exame 2015, 2.ª fase

29. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real  $k$ , igual a  $\log_3 \left( \frac{3^k}{9} \right)$  ?

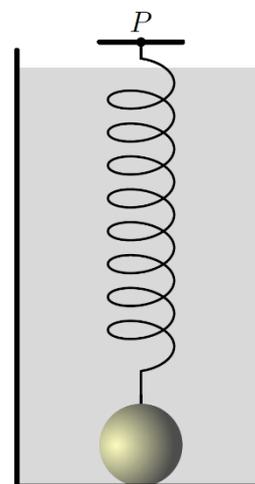
- (A)  $\frac{k}{2}$       (B)  $k - 2$       (C)  $\frac{k}{9}$       (D)  $k - 9$

Exame 2015, 1.ª fase

30. Na figura ao lado, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso. Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto  $P$  por uma mola esticada. Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que,  $t$  segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto  $P$  é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t}, \quad (t \geq 0)$$

Sabe-se que a distância do ponto  $P$  à base do recipiente é 16 cm. Determine o volume da esfera. Apresente o resultado em  $\text{cm}^3$ , arredondado às centésimas.



Exame 2015, 1.ª fase

31. Seja  $b$  um número real. Sabe-se que  $\log b = 2014$  (log designa logaritmo de base 10)

Qual é o valor de  $\log(100b)$ ?

- (A) 2016      (B) 2024      (C) 2114      (D) 4028

Teste Intermédio 12.º ano, abril 2014

32. Seja  $a$  um número real positivo. Considere o conjunto  $S = \{x \in \mathbb{R} : \ln(e^{-x} - a) \leq 0\}$ . Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto  $S$ ?

- (A)  $]-\ln(1 + a), -\ln a[$       (B)  $[-\ln(1 + a), -\ln a[$   
 (C)  $]-\infty, -\ln(1 + a)]$       (D)  $[-\ln(1 + a), +\infty[$

Exame 2013, época especial

33. Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais tais que  $1 < a < b$  e  $\log_a b = 3$ . Qual é, para esses valores de  $a$  e de  $b$ , o valor de  $\log_a (a^5 \times \sqrt[3]{b}) + a^{\log_a b}$ ?

- (A)  $6 + b$       (B)  $8 + b$       (C)  $6 + a^b$       (D)  $8 + a^b$

Exame 2013, 2.ª fase

34. Para certos valores de  $a$  e de  $b$  ( $a > 1$  e  $b > 1$ ), tem-se  $\log_a b = 2$ . Qual é, para esses valores de  $a$  e de  $b$ , o valor de  $\log_b a + \log_a \sqrt{b}$ ?

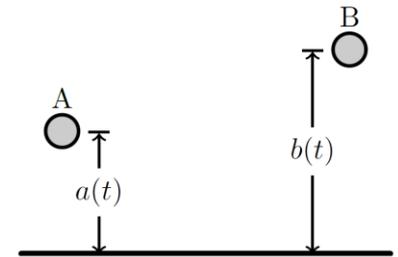
- (A)  $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$       (B)  $-2 + \sqrt{2}$       (C)  $\frac{1}{2}$       (D)  $\frac{3}{2}$

Teste Intermédio 12.º ano, fevereiro 2013

- 35.** Considere que dois balões esféricos, que designamos por balão A e por balão B, se deslocam na atmosfera, por cima de um solo plano e horizontal.

Num determinado instante, é iniciada a contagem do tempo. Admita que, durante o primeiro minuto imediatamente a seguir a esse instante, as distâncias, medidas em metros, do centro do balão A ao solo e do centro do balão B ao solo são dadas, respetivamente, por

$$a(t) = e^{-0,03t} - 0,02t + 3 \quad \text{e} \quad b(t) = 6e^{-0,06t} - 0,02t + 2$$

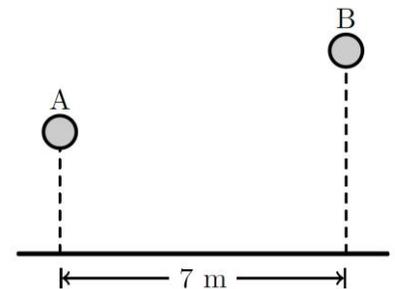


A variável  $t$  designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ( $t \in [0,60]$ ).

Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 35.1.** Determine a distância entre o centro do balão A e o centro do balão B, cinco segundos após o início da contagem do tempo, sabendo que, nesse instante, a distância entre as projeções ortogonais dos centros dos balões no solo era 7 metros. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.



- 35.2.** Sabe-se que, alguns segundos após o início da contagem do tempo, os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo. Determine quanto tempo decorreu entre o instante inicial e o instante em que os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo. Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

Teste Intermédio 12.º ano, fevereiro 2013

- 36.** Sejam  $a, b$  e  $c$  três números tais que  $a \in ]-1, +\infty[$ ,  $b \in \mathbb{R}^+$  e  $c \in \mathbb{R}^+$ . Sabe-se que  $\log_a b = c$  e que  $\log_a \sqrt{c} = 3$ . Qual das expressões seguintes é equivalente a  $\log_a \sqrt{b \times c}$ ?

- (A)  $c + 3$       (B)  $c - 3$       (C)  $\frac{c}{2} + 3$       (D)  $\frac{c}{2} - 3$

Exame 2012, época especial

- 37.** Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = e^{x-2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2}$$

Mostre que  $\ln(2 + 2\sqrt{2})$  é o único zero da função  $f$ , recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame 2012, 1.ª fase

38. Seja  $a$  um número real maior do que 1 e seja  $b = a^\pi$ . Qual é o valor, arredondado às unidades, de  $\log_a (a^{12} \times b^{100})$ ?
- (A) 138      (B) 326      (C) 1238      (D) 3770

Teste Intermédio 12.º ano, maio 2012

39. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = 2 + \log_3 x$ . Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

- 39.1. Determine o conjunto dos números reais para os quais se tem

$$f(x) \geq 4 + \log_3(x - 8)$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo de números reais.

- 39.2. Determine o valor de  $f(36^{1000}) - f(4^{1000})$

Teste Intermédio 12.º ano, março 2012

40. Um vírus atacou os frangos de um aviário. Admita que  $x$  dias após o instante em que o vírus foi detetado, o número de frangos infetados é dado aproximadamente por

$$f(x) = \frac{200}{1 + 3 \times 2^{3-0,1x}}$$

(considere que  $x = 0$  corresponde ao instante em que o vírus foi detetado).

Resolva o item seguinte **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

No instante em que o vírus foi detetado, já existiam frangos infetados.

Passados alguns dias, o número de frangos infetados era dez vezes maior.

Quantos dias tinham passado?

Teste Intermédio 12.º ano, março 2012

41. O momento sísmico,  $M_0$ , é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fração do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada,  $E$ , que é a que os sismógrafos registam.

A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por  $E = M_0 \times 1,6 \times 10^{-5}$

A magnitude,  $M$ , de um sismo é estimada por  $M = \frac{2}{3} \log_{10}(E) - 2,9$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

- 41.1. Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude 7,1. Determine o momento sísmico,  $M_0$ , para esse sismo.

Escreva o resultado na forma  $a \times 10^n$ , com  $n$  inteiro relativo e com  $a$  entre 1 e 10

- 41.2. Sejam  $M_1$  e  $M_2$  as magnitudes de dois sismos.

Mostre que, se a diferença entre a magnitude  $M_1$  e a magnitude  $M_2$  é igual a  $\frac{2}{3}$ , então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

Exame 2011, prova especial

42. Para um certo valor real de  $k$ , admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola,  $t$  minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por

$$Q(t) = 12 + \log_3(81 - kt^2), \text{ com } t \in [0,20]$$

Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível.

Determine o valor de  $k$  recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame 2011, época especial

43. Na estufa de um certo jardim botânico, existem dois lagos aquecidos, o lago  $A$  e o lago  $B$ . Às zero horas do dia 1 de Março de 2010, cada lago recebeu uma espécie diferente de nenúfares, a saber *Victoria amazonica* e *Victoria cruziana*.

$N_A(t)$  é o número de nenúfares existentes no lago  $A$ ,  $t$  dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria amazonica* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_A(t) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2t}} \text{ com } t \geq 0$$

$N_B(t)$  é o número de nenúfares existentes no lago  $B$ ,  $t$  dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria cruziana* e desenvolvem-se segundo o modelo

$$N_B(t) = \frac{150}{1 + 50 \times e^{-0,4t}} \text{ com } t \geq 0$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

- 43.1. Como referido, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, o lago  $A$  recebeu um certo número de nenúfares da espécie *Victoria amazonica*. Decorridos 7 dias, esse número aumentou. Determine de quanto foi esse aumento. Apresente o resultado com arredondamento às unidades.
- 43.2. Determine quantos dias foram necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago  $A$  fosse igual ao número de nenúfares existentes no lago  $B$ . Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Exame 2011, 2.ª fase

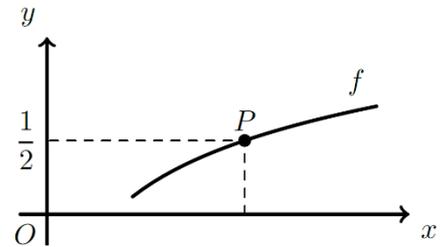
44. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{\text{sen}(x-1)}{ex-e} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{-x} + 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva, sem recorrer à calculadora, no intervalo  $[1, +\infty[$ , a equação  $\frac{f(x)}{x} = e^x - \frac{2}{3}$

Teste Intermédio 12.º ano, maio 2011

45. Na figura ao lado, está parte da representação gráfica da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \log_9(x)$ .  $P$  é o ponto do gráfico de  $f$  que tem ordenada  $\frac{1}{2}$ . Qual é a abcissa do ponto  $P$ ?



- (A)  $\frac{3}{2}$       (B) 2      (C) 3      (D)  $\frac{9}{2}$

Teste Intermédio 12.º ano, janeiro 2011

46. Determine, **sem recorrer à calculadora**, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_3(7x + 6) \geq 2 + \log_3(x)$$

Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Teste Intermédio 12.º ano, janeiro 2011

47. Na década de sessenta do século passado, uma doença infecciosa atacou a população de algumas regiões do planeta.

Admita que, ao longo dessa década, e em qualquer uma das regiões afetadas, o número, em milhares, de pessoas que estavam infetadas com a doença,  $t$  anos após o início de 1960, é dado, aproximadamente, por

$$I(t) = \frac{3e^{kt}}{1 + pe^{kt}}$$

em que  $k$  e  $p$  são parâmetros reais.

Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

- 47.1. Admita que, para uma certa região,  $k = \frac{1}{2}$  e  $p = 1$

Determine o ano em que o número de pessoas que estavam infetadas, nessa região, atingiu 2500.

**Nota** – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 47.2. Numa outra região, constatou-se que havia um milhar de pessoas que estavam infetadas no início de 1961.

Qual é, para este caso, a relação entre  $k$  e  $p$ ?

Apresente a sua resposta na forma  $k = -\ln(A + pB)$ , em que  $A$  e  $B$  são números reais.

Teste Intermédio 12.º ano, janeiro 2011

48. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^-$ , definida por  $f(x) = \ln(-3x)$ . Qual é a solução da equação  $f(x) = 2$ ?

- (A)  $\frac{1}{2}e^3$       (B)  $-\frac{1}{2}e^3$       (C)  $-\frac{1}{3}e^2$       (D)  $\frac{1}{3}e^2$

Exame 2010, época especial

49. Considere a função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \ln(x^2 + 1) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva, no intervalo  $]-\infty, 0]$ , a inequação,  $h(x) > h(-4)$

Exame 2010, época especial

- 50.** Seja  $g$  a função, de domínio  $] - 2, + \infty[$ , definida por  $g(x) = \ln(x + 2)$   
 Considere, num referencial o.n.  $xOy$ , um triângulo  $[OAB]$  tal que:

- $O$  é a origem do referencial;
- $A$  é um ponto de ordenada 5;
- $B$  é o ponto de intersecção do gráfico da função  $g$  com o eixo das abcissas.

Qual é a área do triângulo  $[OAB]$ ?

- (A)  $\frac{5}{2}$       (B)  $-\frac{1}{2}$       (C)  $\frac{5 \ln 2}{2}$       (D)  $-\frac{\ln 2}{2}$

Exame 2010, 1.ª fase

- 51.** Na *Internet*, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espetáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.  
 Admita que,  $t$  horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em centenas, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8 \log_4(3t + 1)^3 - 8 \log_4(3t + 1), \text{ com } t \in [0,5]$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

**51.1.** Mostre que  $N(t) = 16 \log_4(3t + 1)$ , para qualquer  $t \in [0,5]$

**51.2.** Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.  
 Apresente o resultado em horas e minutos.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Exame 2010, 1.ª fase

- 52.** Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 3 + 4x^2e^{-x}$   
 Seja  $g$  a função, de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por

$$g(x) = x + \ln [f(x) - 3] \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Determine, usando exclusivamente métodos analíticos, os zeros da função  $g$

Teste Intermédio 12.º ano, maio 2010

- 53.** Qual é o valor de  $\log_5 \left( \frac{5^{1000}}{25} \right)$ ?

- (A) 40      (B) 500      (C) 975      (D) 998

Teste Intermédio 12.º ano, março 2010

54. Numa certa região, uma doença está a afetar gravemente os coelhos que lá vivem. Em consequência dessa doença, o número de coelhos existentes nessa região está a diminuir. Admita que o número, em **milhares**, de coelhos que existem nessa região,  $t$  **semanas** após a doença ter sido detetada, é dado aproximadamente por

$$f(t) = \frac{k}{3 - 2e^{-0,13t}} \quad (k \text{ designa um número real positivo})$$

Resolva, **usando exclusivamente métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

**Nota:** a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

- 54.1. Suponha que  $k = 10$   
 Ao fim de quantos **dias**, após a doença ter sido detetada, é que o número de coelhos existentes na referida região é igual a 9000?
- 54.2. Admita agora que o valor de  $k$  é desconhecido.  
 Sabe-se que, durante a primeira semana após a deteção da doença, morreram dois mil coelhos e não nasceu nenhum.  
 Determine o valor  $k$  de arredondado às décimas.

Teste Intermédio 12.º ano, março 2010

55. Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais superiores a 1 e tais que  $b = a^2$ .

Qual dos valores seguintes é igual a  $1 + \log_b a$  ?

- (A)  $\frac{2}{3}$       (B)  $\frac{3}{4}$       (C)  $\frac{4}{3}$       (D)  $\frac{3}{2}$

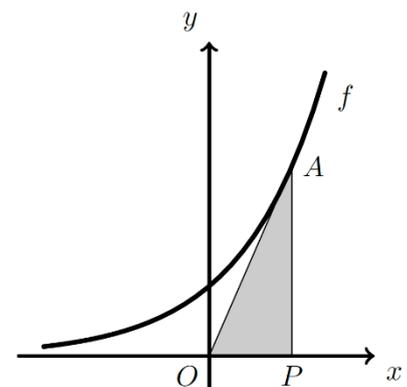
Exame 2009, época especial

56. Na figura seguinte, está representada parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x$ .

Considere um ponto,  $P$ , a deslocar-se sobre o semieixo positivo das abcissas.

Seja  $A$  o ponto pertencente ao gráfico da função que tem a mesma abcissa que o ponto  $P$ .

Para cada posição do ponto  $P$ , define-se um triângulo  $[OAP]$ . Qual das expressões seguintes representa, em função de  $x$  (abcissa do ponto  $P$ ), a área do triângulo  $[OAP]$ ?



- (A)  $x.e^x$       (B)  $\frac{x.e^x}{2}$       (C)  $\frac{x + e^x}{2}$       (D)  $e^x$

Exame 2009, época especial

57. Admita que a magnitude,  $M$ , de um sismo é dada, na escala de Richter, por

$$M = 0,67 \log E - 3,25$$

sendo  $E$  a energia, em joules, libertada por esse sismo.  
(log designa logaritmo de base 10.)

Resolva, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

**Nota:** A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

- 57.1. Sejam  $E_1$  e  $E_2$  as energias libertadas por dois sismos de magnitudes  $M_1$  e  $M_2$ , respetivamente.

Determine  $\frac{E_1}{E_2}$ , com aproximação às unidades, sabendo que  $M_1 - M_2 = 1$

Interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.

- 57.2. O sismo que ocorreu nos Açores, no dia 1 de Abril de 2009, teve magnitude 4,7, na escala de Richter.

Qual foi a energia libertada nesse sismo?

Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma  $a \times 10^b$ , sendo  $b$  um número inteiro, e  $a$  um número entre 1 e 10.

Apresente o valor de  $a$  arredondado às unidades.

Exame 2009, época especial

58. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^{x+1}$

Qual dos pontos seguintes pertence ao gráfico de  $f$  ?

(ln designa logaritmo de base  $e$ .)

- (A)  $(-1, 0)$       (B)  $(\ln 2, 2e)$       (C)  $(\ln 5, 6)$       (D)  $(-2, e)$

Exame 2009, 2.ª fase

59. Numa certa zona de cultivo, foi detetada uma doença que atinge as culturas. A área afetada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.

Admita que a área, em hectares, afetada pela doença, é dada, em função de  $t$ , por

$$A(t) = 2 - t + 5 \ln(t + 1)$$

sendo  $t$  ( $0 \leq t < 16$ ) o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detetada essa doença.

Quando a doença foi detetada, já uma parte da área de cultivo estava afetada. Passada uma semana, a área de cultivo afetada pela doença aumentou.

De quanto foi esse aumento?

Resolva, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos e apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

Exame 2009, 2.ª fase

60. Seja  $x$  um número real positivo.

Qual das expressões seguintes é igual a  $e^{4 \ln x} - 10^{2 \log x}$ ?

(ln designa logaritmo de base  $e$ ; log designa logaritmo de base 10.)

- (A)  $\ln x^4 - \log x^2$       (B)  $x^4 + x^2$       (C)  $x^4 - x^2$       (D)  $\frac{\ln x^4}{\log x^2}$

Exame 2009, 1.ª fase

61. Sejam as funções  $f$  e  $h$ , de domínios  $]1, +\infty[$  e  $] - \infty, 2[$ , respetivamente, definidas por  $f(x) = \log_2(x - 1)$  e por  $h(x) = \log_2(2 - x)$   
 Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, o conjunto solução da condição  $f(x) \geq 1 + h(x)$   
 Apresente o resultado sob a forma de intervalo real.

Exame 2009, 1.ª fase

62. Sejam  $a$ ,  $x$  e  $y$  três números reais tais que  $\log_a x = 1 + 5 \log_a y$   
 Qual das igualdades seguintes é necessariamente verdadeira?  
 (A)  $x = ay^5$       (B)  $x = 5ay$       (C)  $x = 5y$       (D)  $x = y^5$

Teste Intermédio 12.º ano, maio 2009

63. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x - 1) + \log_2(13 - x) \leq 5$$

Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

Teste Intermédio 12.º ano, março 2009

64. Quando uma substância radioativa se desintegra, a sua **massa**, medida em **gramas**, varia de acordo com uma função do tipo

$$m(t) = ae^{bt}, \quad t \geq 0,$$

em que a variável  $t$  designa o **tempo**, medido em **milénios** decorrido desde um certo instante inicial. A constante real  $b$  depende da substância e a constante real  $a$  é a massa da substância no referido instante inicial.

Resolva as alíneas seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

- 64.1. O *carbono-14* é uma substância radioativa utilizada na datação de fósseis em que esteja presente. Relativamente a um certo fóssil, sabe-se que:

- a massa de *carbono-14* nele presente, mil anos depois de um certo instante inicial, era de 2,91 g
- a massa de *carbono-14* nele presente, dois mil anos depois do mesmo instante inicial, era de 2,58 g

Tendo em conta estes dados, determine:

- o valor da constante  $b$  para o *carbono-14*;
- a massa de *carbono-14* que existia no fóssil, no referido instante inicial.

Apresente os dois valores arredondados às centésimas.

**Nota:** se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 64.2. O *rádio-226* é outra substância radioativa. Em relação ao *rádio-226*, sabe-se que  $b = -0,43$

Verifique que, quaisquer que sejam os valores de  $a$  e de  $t$ ,  $\frac{m(t + 1,6)}{m(t)}$  é constante.

Determine o valor dessa constante, arredondado às décimas, e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

Teste Intermédio 12.º ano, março 2009

65. Para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , qual das seguintes expressões é equivalente a  $x \cdot \ln(e^e)$ ?

- (A)  $ex$       (B)  $e^x$       (C)  $e^{ex}$       (D)  $x + e$

*Exame 2008, época especial*

66. Aqueceu-se água num recipiente, durante um determinado tempo, num local onde a temperatura ambiente é constante e igual a  $25^\circ$  Celsius. Interrompeu-se o processo de aquecimento, e nesse instante, a água começou a arrefecer.

O arrefecimento da água segue a Lei do arrefecimento de Newton, de acordo com o modelo matemático:  $T(t) = 25 + 48e^{-0,05t}$ , em que  $T(t)$  representa a temperatura da água em graus Celsius,  $t$  minutos após o início do arrefecimento.

Recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, determine ao fim de quanto tempo, após o início do arrefecimento, a temperatura da água atinge os  $36^\circ$  Celsius.

Apresente o resultado em minutos e segundos, com estes arredondados às unidades.

**Nota:** A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use quatro casas decimais.

*Exame 2008, época especial*

67. Sabe-se que o ponto  $P(1,3)$  pertence ao gráfico da função  $f(x) = 2^{ax} - 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Qual é o valor de  $a$ ?

- (A) 2      (B) 1      (C) 0      (D) -2

*Exame 2008, 2.ª fase*

68. A massa de uma substância radioativa diminui com a passagem do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de  $t$  horas de observação, é dada pelo modelo matemático  $M(t) = 15 \times e^{-0,02t}$ ,  $t \geq 0$ .

Resolva, **usando métodos analíticos**, o itens que se segue.

Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioactiva?

Apresente o resultado em **horas e minutos**, estes arredondados às unidades.

**Nota:** A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

*Exame 2008, 2.ª fase*

69. Seja  $a$  um número real maior do que 1. Qual dos seguintes valores é igual a  $2 \log_a \left( a^{\frac{1}{3}} \right)$ ?

- (A)  $-\frac{2}{3}$       (B)  $-\frac{1}{3}$       (C)  $\frac{1}{3}$       (D)  $\frac{2}{3}$

*Exame 2008, 1.ª fase*

70. Num determinado dia, um grupo de amigos decidiu formar uma associação desportiva. Admita que,  $t$  dias após a constituição da associação, o número de sócios é dado, aproximadamente, por:

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 199e^{-0,01t}}, t \geq 0$$

Resolva, **usando métodos analíticos**, o item seguinte.

Ao fim de quantos dias se comemorou a inscrição do sócio número 1000?

**Nota:** A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às milésimas.

Exame 2008, 1.ª fase

71. Seja  $a$  um número real maior do que 1.  
Indique qual das expressões seguintes é igual a  $\log_a 3 + 2 \log_a 5$ ?

(A)  $\log_a 30$       (B)  $\log_a 40$       (C)  $\log_a 75$       (D)  $\log_a 100$

Teste Intermédio 12.º ano, abril 2008

72. Num lago onde não havia peixes, introduziram-se, num determinado momento, alguns peixes. Admita que,  $t$  anos depois, o número de peixes existentes no lago é dado aproximadamente por

$$f(t) = \frac{2000}{1 + ke^{-0,13t}}$$

onde  $k$  designa um número real.

- 72.1. Determine o valor de  $k$ , supondo que foram introduzidos 100 peixes no lago.

- 72.2. Admita agora que  $k = 24$ .

**Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:  
*Ao fim de quantos anos o número de peixes no lago atinge o meio milhar? Apresente o resultado arredondado às unidades.*

**Nota:** se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Teste Intermédio 12.º ano, abril 2008

73. De um número real  $x$  sabe-se que  $\log_5(x) = \pi - 1$   
Indique o valor de  $5x$

(A)  $25^{\pi-1}$       (B)  $5^{\pi-1}$       (C)  $5^\pi$       (D)  $5(\pi - 1)^5$

Teste Intermédio 12.º ano, janeiro 2008

74. Admita que uma certa população de seres vivos evolui de acordo com a seguinte lei: o número de indivíduos da população,  $t$  dias após um certo instante inicial, é dado aproximadamente por

$$P(t) = ae^{kt} \quad (t \in \mathbb{R}_+^0)$$

em que

- $a$  é o número de indivíduos da população no instante inicial ( $a > 0$ )
- $k$  é uma constante real

- 74.1. Seja  $r$  um número real positivo.

Considere que, ao fim de  $n$  dias, contados a partir do instante inicial, o número de indivíduos da população é igual a  $r$  vezes o número de indivíduos que existiam no referido instante inicial.

Mostre que se tem  $k = \frac{\ln(r)}{n}$  (ln designa logaritmo de base  $e$ )

- 74.2. Admita que, às zero horas do dia 1 do corrente mês, se iniciou, em laboratório, uma cultura de bactérias, em pequena escala, na qual se juntaram

- 500 indivíduos de uma estirpe  $A$
- 500 indivíduos de uma estirpe  $B$

Nunca foram introduzidos mais indivíduos destas duas estirpes nesta cultura.

As condições da cultura são desfavoráveis para a estirpe  $A$ , mas são favoráveis para a estirpe  $B$ . De facto,

- decorrido exatamente um dia, a estirpe  $A$  estava reduzida a 250 indivíduos
- decorridos exatamente seis dias, a estirpe  $B$  tinha alcançado 1000 indivíduos

Quer a estirpe  $A$ , quer a estirpe  $B$ , evoluíram de acordo com a acima lei referida. No entanto, o valor da constante  $k$  para a estirpe  $A$  é diferente do valor dessa constante para a estirpe  $B$ .

Utilizando a igualdade da alínea anterior, verifique que:

- no caso da estirpe  $A$ , o valor da constante  $k_A$ , com quatro casas decimais, é  $k_A = -0,6931$
- no caso da estirpe  $B$ , o valor da constante  $k_B$ , com quatro casas decimais, é  $k_B = 0,1155$

*Teste Intermédio 12.º ano, janeiro 2008*

75. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , definida por  $f(x) = 1 - \ln(x^2)$   
**Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, determine os pontos de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Ox$

*Exame 2007, 2.ª fase*

76. Sabendo que:  
 $\ln(x) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) > 0$  (ln designa logaritmo na base  $e$ ),  
 um valor possível para  $x$  é:

- (A) 0      (B) -1      (C) 1      (D) 2

*Exame 2007, 1.ª fase*

77. Admita que a intensidade da luz solar,  $x$  metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por

$$I(x) = ae^{-bx} \quad (x \geq 0)$$

$a$  e  $b$  são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efetuada a medição.

Sempre que se atribui um valor a  $a$  e um valor a  $b$  obtemos uma função de domínio  $\mathbb{R}_0^+$

Medições efetuadas, num certo instante e em determinado local do oceano Atlântico, mostraram que, a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água.

Determine o valor de  $b$  para esse instante e local. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

*Exame 2007, 1.ª fase*

78. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação  $e^{-x} > \frac{1}{e}$
- (A)  $] - \infty, - 1[$       (B)  $] - \infty, 1[$       (C)  $] - 1, + \infty[$       (D)  $] 1, + \infty[$

Teste Intermédio 12.º ano, março 2007

79. Seja  $a$  um número real maior do que 1. Indique o valor de  $\log_a (a \times \sqrt[3]{a})$
- (A)  $\frac{5}{4}$       (B)  $\frac{4}{3}$       (C)  $\frac{5}{3}$       (D)  $\frac{3}{2}$

Teste Intermédio 12.º ano, março 2007

80. A acidez de uma solução é medida pelo valor do seu  $pH$ , que é dado por

$$pH = -\log(x)$$

onde  $x$  designa a concentração de iões  $H_3O^+$ , medida em  $mol/dm^3$ .

**Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

- 80.1. Admita que o  $pH$  do sangue arterial humano é 7,4. Qual é a concentração (em  $mol/dm^3$ ) de iões  $H_3O^+$ , no sangue arterial humano? Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma  $a \times 10^b$ , com  $b$  inteiro e  $a$  entre 1 e 10. Apresente o valor de  $a$  arredondado às unidades.
- 80.2. A concentração de iões  $H_3O^+$  no café é tripla da concentração de iões  $H_3O^+$  no leite. Qual é a diferença entre o  $pH$  do leite e o  $pH$  do café? Apresente o resultado arredondado às décimas.  
**Sugestão:** comece por designar por  $l$  a concentração de iões  $H_3O^+$  no leite e por exprimir, em função de  $l$ , a concentração de iões  $H_3O^+$  no café.

Teste Intermédio 12.º ano, março 2007

81. Seja  $c$  um número real maior do que 1.

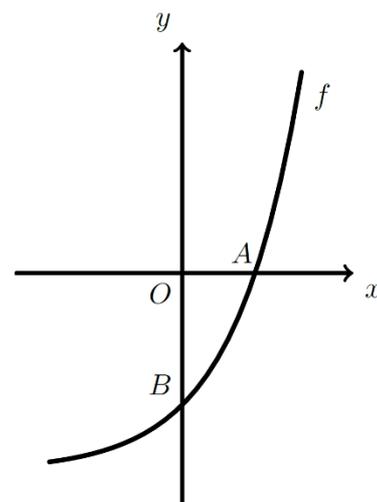
Na figura ao lado está representada uma parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x - c$ .

Tal como a figura sugere

- $A$  é o ponto de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Ox$
- $B$  é o ponto de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Oy$

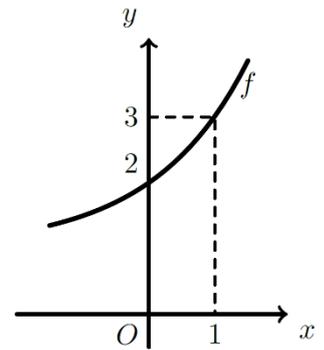
Mostre que:

Se o declive da reta  $AB$  é  $c - 1$ , então  $c = e$



Teste Intermédio 12.º ano, março 2007

82. Sejam  $a$  e  $b$  dois números reais positivos.  
 Na figura ao lado está parte do gráfico de uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = a^x + b$ .  
 Tal como a figura sugere, os pontos  $(0,2)$  e  $(1,3)$  pertencem ao gráfico de  $f$ .



- Quais são os valores de  $a$  e de  $b$ ?
- (A)  $a = 2$  e  $b = 1$       (B)  $a = 2$  e  $b = 3$   
 (C)  $a = 3$  e  $b = 2$       (D)  $a = 3$  e  $b = 1$

Exame 2006, 2.ª fase

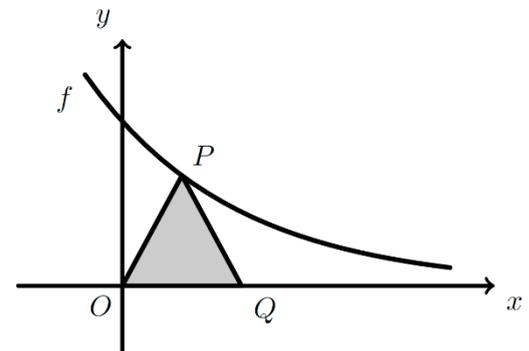
83. Seja  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  

$$h(x) = \frac{\ln(\sqrt{e^x})}{2} \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$
  
 Qual das seguintes expressões pode também definir  $h$ ?

- (A)  $\sqrt{x}$       (B)  $\frac{x}{2}$       (C)  $\frac{x}{4}$       (D)  $\frac{\sqrt{x}}{2}$

Exame 2006, 2.ª fase

84. Na figura seguinte estão representados:
- parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^{-x}$
  - um triângulo **isósceles**  $[OPQ]$ , ( $\overline{PO} = \overline{PQ}$ ) em que:
    - $O$  é a origem do referencial;
    - $P$  é um ponto do gráfico de  $f$ ;
    - $Q$  pertence ao eixo das abcissas.



Considere que o ponto  $P$  se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de  $f$ .  
 O ponto  $Q$  acompanha o movimento do ponto  $P$ , deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que  $\overline{PO}$  permanece sempre igual a  $\overline{PQ}$ .

Seja  $A$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , que faz corresponder, à abcissa  $x$  do ponto  $P$ , a área do triângulo  $[OPQ]$ .  
 Mostre que, para cada  $x \in \mathbb{R}^+$ , se tem  $A(x) = xe^{-x}$

Exame 2006, 1.ª fase

85. Indique o número real que é solução da equação  $e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- (A)  $\frac{1}{2}$       (B)  $\frac{3}{2}$       (C)  $\frac{5}{2}$       (D)  $\frac{7}{2}$

Teste Intermédio 12.º ano, março 2006

86. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação  $\log_3(1 - x) \leq 1$
- (A)  $[-2,1[$       (B)  $[-1,2[$       (C)  $] - \infty, - 2]$       (D)  $[2, + \infty[$

Teste Intermédio 12.º ano, março 2006

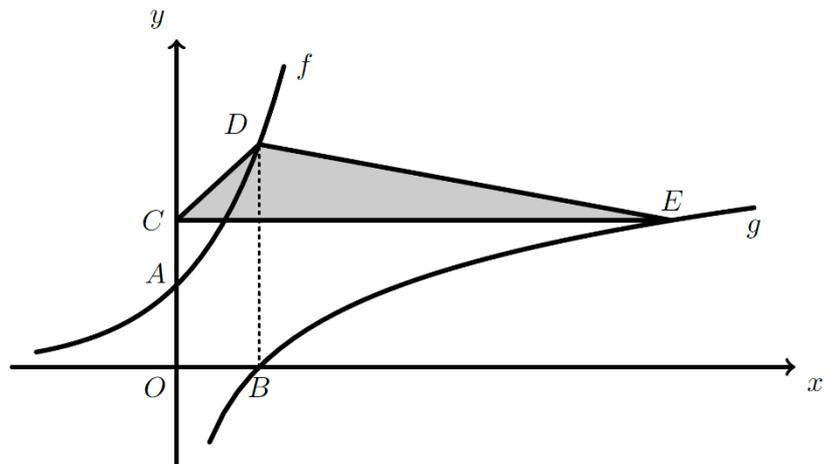
87. Na figura abaixo estão representadas, em referencial o. n.  $xOy$ :

- parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = \ln x$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ )

O ponto  $A$  é o ponto de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Oy$  e o ponto  $B$  é o ponto de interseção do gráfico de  $g$  com o eixo  $Ox$ .

Na figura está também representado um triângulo  $[CDE]$ .

O ponto  $C$  pertence ao eixo  $Oy$ , o ponto  $D$  pertence ao gráfico de  $f$  e o ponto  $E$  pertence ao gráfico de  $g$ .



Sabe-se ainda que:

- a reta  $[BD]$  é paralela ao eixo  $Oy$  e a reta  $[CE]$  é paralela ao eixo  $Ox$
- $\overline{AC} = \overline{OA}$

Qual é a área do triângulo  $[CDE]$ ?

- (A)  $\frac{(e-1)\ln 2}{2}$       (B)  $\frac{(e^2-1)\ln 2}{2}$       (C)  $\frac{e(e-2)}{2}$       (D)  $\frac{e^2(e-2)}{2}$

Teste Intermédio 12.º ano, março 2006

88. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função

$$V(x) = e^{14-x}$$

sendo  $x$  o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e  $V(x)$  a quantidade vendida num mês (medida em litros).

A empresa tem um conjunto de despesas (compra ao produtor, empacotamento, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda do azeite.

Sabendo que cada litro de azeite vendido acarreta à empresa uma despesa total de 3 euros, **justifique** que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite, é dado por

$$L(x) = (x - 3)e^{14-x}$$

Teste Intermédio 12.º ano, março 2006

89. Considere a função  $f$ , de domínio  $]0, +\infty[$ , definida por  $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ ).

**Sem recorrer à calculadora**, mostre que  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(4e^2)$

Teste Intermédio 12.º ano, março 2006

90. O tempo  $t$ , medido em anos, que um planeta demora a realizar uma translação completa, em torno do Sol, está relacionado com a distância média,  $d$ , desse planeta ao Sol, medida em milhões de quilómetros, por meio da fórmula

$$2 \ln(t) = k + 3 \ln(d)$$

( $k$  é uma constante real e  $\ln$  designa o logaritmo de base  $e$ )

Sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

90.1. Sabe-se que:

- a distância média de Urano ao Sol é (aproximadamente) o dobro da distância média de Saturno ao Sol;
- o planeta Urano demora (aproximadamente) 84 anos a realizar uma translação completa em torno do Sol.

90.2. Determine quanto tempo demora o planeta Saturno a realizar uma translação completa em torno do Sol. Apresente o resultado em anos, arredondado às décimas.

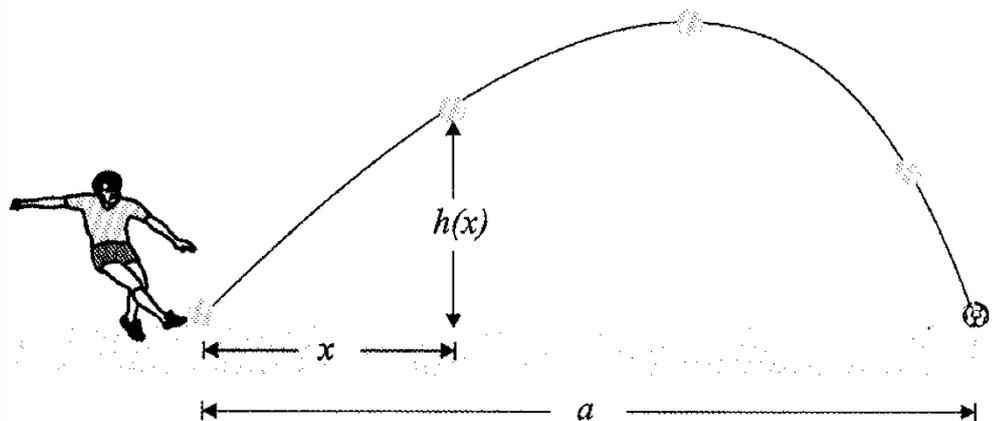
**Nota:** Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Sabendo que a distância média da Terra ao Sol é, aproximadamente, de 149,6 milhões de quilómetros, determine o valor de  $k$  (apresente o resultado arredondado às unidades).

*Exame 2005, época especial*

91. Na figura ao lado está representada a trajetória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador de da seleção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.

Designou-se por  $a$  a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu.



Considere a função  $h$  definida em  $[0, a]$  por

$$h(x) = 2x + 10 \ln(1 - 0,1x) \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Admita que  $h(x)$  é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projeção no solo se encontra a  $x$  metros do local onde foi pontapeada.

**Sem utilizar a calculadora**, mostre que a taxa de variação média da função  $h$ , no intervalo  $[1, 3]$  é

$$\ln \left[ e^2 \left( \frac{7}{9} \right)^5 \right]$$

*Exame 2005, 2.ª fase*

92. Na figura ao lado, está representada, em referencial o.n.  $xOy$ , parte do gráfico da função  $f$ , definida, em  $] - 1, + \infty[$ , por

$$f(x) = \log_2(x + 1)$$

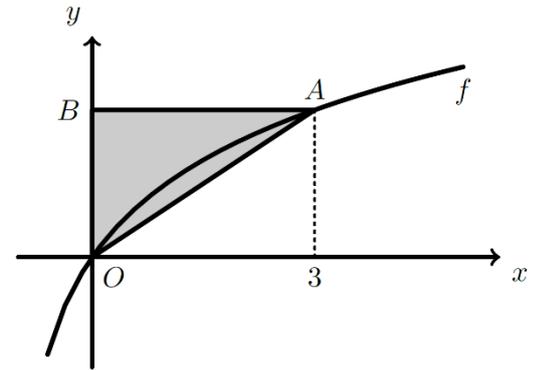
Na mesma figura, está também representado um triângulo retângulo  $[ABO]$ .

O ponto  $A$  tem abcissa 3 e pertence ao gráfico de  $f$ .

O ponto  $B$  pertence ao eixo  $Oy$ .

Qual é a área do triângulo  $[ABO]$  ?

- (A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4



Exame 2005, 1.ª fase

93. Admita que o número de elementos de uma população de aves,  $t$  anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por

$$P(t) = 5,2 \times 10^7 \times e^{(N-M)t}, \quad t \geq 0,$$

em que  $N$  e  $M$  são duas constantes, denominadas, respetivamente, por *taxa de natalidade* e *taxa de mortalidade* da população.

No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970. Sabendo que a *taxa de natalidade* é 7,56, determine a *taxa de mortalidade*, **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

**Nota:** sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame 2005, 1.ª fase

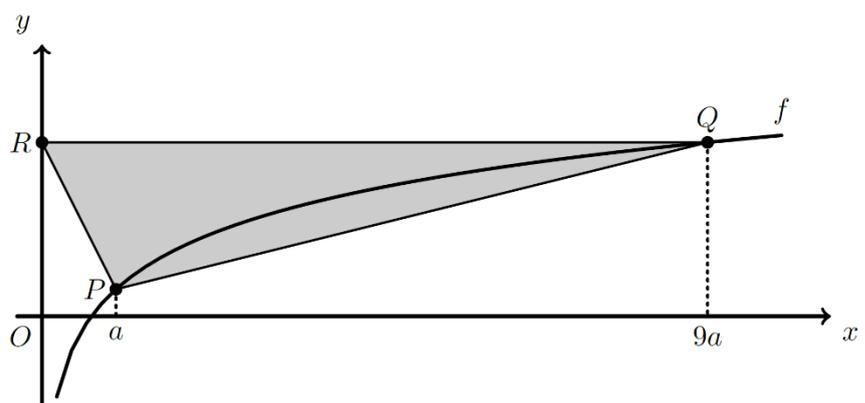
94. Na figura seguinte está parte da representação gráfica da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \log_3 x$ .

Na figura está também representado um triângulo  $[PQR]$ .

Os pontos  $P$  e  $Q$  pertencem ao gráfico de  $f$  e as suas abcissas são  $a$  e  $9a$ , respetivamente ( $a$  designa um número real positivo).

O ponto  $R$  pertence ao eixo  $Oy$  e tem ordenada igual à de  $Q$ .

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo  $[PQR]$ ?



- (A)  $9a^2$       (B)  $9a$       (C)  $\frac{9a^2}{2}$       (D)  $\frac{9a + 1}{2}$

Exame 2004, época especial

95. Indique o valor de  $p$  para o qual se verifica a igualdade  $\log_p 16 = 4$

- (A)  $-4$       (B)  $4$       (C)  $2$       (D)  $\sqrt{2}$

Exame 2004, 2.ª fase

96. Sabe-se que  $\log_2 a = \frac{1}{5}$

Qual é o valor de  $\log_2 \left( \frac{a^5}{8} \right)$ ?

- (A) -1      (B) -2      (C) -3      (D) -4

*Exame 2004, 1.ª fase*