



1. Seja f a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2-x}}{x+2} & \text{se } x < -2 \vee x \geq 2 \\ \frac{\sin(x-2)}{x^2-4} & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $]-\infty, -2[$, e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame 2022, 1.ª fase

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 + \ln(3 - 2x) & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{1-x^2} + k & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (k \text{ é um número real})$$

Estude, no intervalo $]-\infty, 1[$, a função f , sem recorrer à calculadora, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

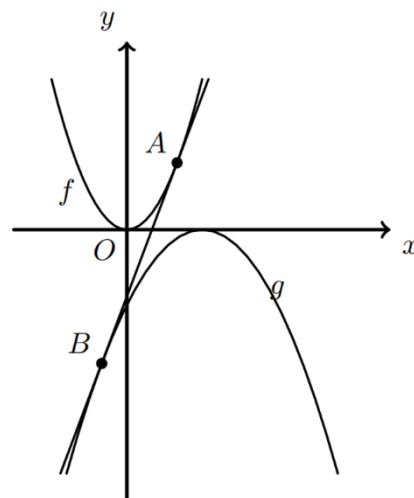
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia

Exame 2021, época especial

3. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial o.n. Oxy , partes dos gráficos das funções f e g , ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = -(x-1)^2$ e a única reta não horizontal que é tangente, simultaneamente, ao gráfico de f e ao gráfico de g .

Seja A o ponto de tangência dessa reta com o gráfico de f e seja B o ponto de tangência dessa mesma reta com o gráfico de g .

Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos A e B



Exame 2021, época especial

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - e^{-x}}{x} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora.

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -2

Exame 2021, 2.ª fase

5. Seja f a função, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2(1 + 2 \ln x) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{5 - 5e^{x-1}}{x^2 + 3x - 4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Estude, no intervalo $]0,1[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame 2021, 1.ª fase

6. Seja f uma função, de domínio $]0, +\infty[$, cuja derivada, f' , de domínio $]0, +\infty[$, é dada por $f'(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x^2}$?

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 2

Exame 2020, 2ª fase

7. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\sin x}{1 - e^x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora. Estude a função g quanto à monotonia em $]0, +\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame 2020, 1ª fase



8. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} x \ln(1-x) & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1-3x}{1-e^{-x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 ?

- (A) $0,5 + \ln 2$ (B) $-0,5 + \ln 2$ (C) $0,5 - \ln 2$ (D) $-0,5 - \ln 2$

Exame 2019, época especial

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{x - \ln x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1

Exame 2019, 1ª fase

10. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

Exame 2019, 1ª fase

11. Seja f a função, de domínio f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \frac{e^x}{1-x} & \text{se } x < 1 \\ \frac{\ln(x^2) + 2}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Determine $f'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

Exame 2018, 2ª fase

12. De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4$

Qual é o valor de $f'(2)$?

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

Exame 2017, 2ª fase

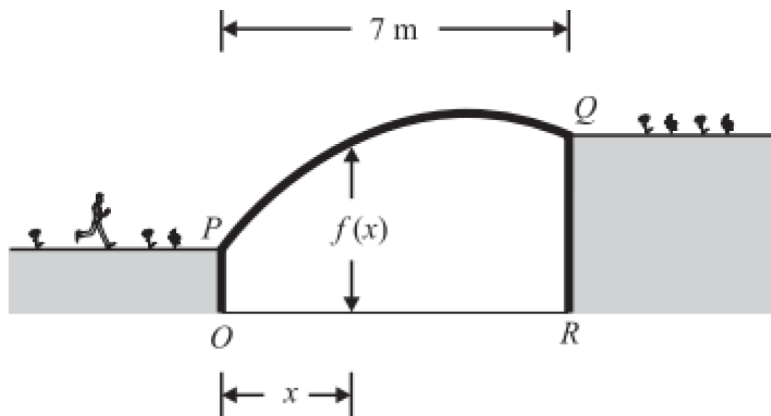
13. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Para um certo número real k , a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{k}{x} + f(x)$, tem um extremo relativo para $x = 1$

Determine esse número k , recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame 2017, 2ª fase

14. Na figura ao lado, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio. A ponte, representada pelo arco PQ , está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta $[OP]$ e $[RQ]$. A distância entre as duas paredes é 7 metros.



O segmento de reta $[OR]$ representa a superfície da água do rio.

Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro.

Para cada ponto situado entre O e R , de abscissa x , a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco PQ é dada por

$$f(x) = 9 - 2,5(e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}), \text{ com } x \in [0,7]$$

Resolva o item seguinte recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Admita que, sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros.

Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte?
Justifique a sua resposta.

Exame 2017, 1ª fase

15. Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f'(x) < 0$, para qualquer número real positivo x

Considere, num referencial o.n. xOy ,

- um ponto P , de abscissa a , pertencente ao gráfico de f
- a reta r , tangente ao gráfico de f no ponto P
- o ponto Q , ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$

Determine o valor de $f'(a) + \frac{f(a)}{a}$

Exame 2017, 1ª fase

16. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{3\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por

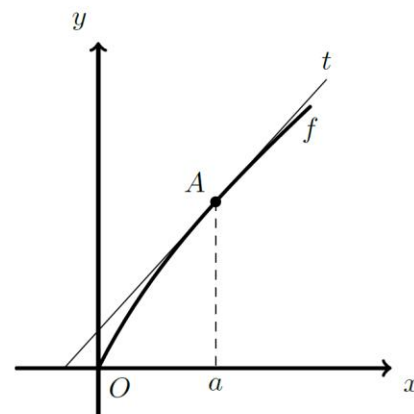
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \cos x & \text{se } -\frac{3\pi}{2} < x < 0 \\ \ln(e^x + x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Na figura ao lado, estão representados:

- parte do gráfico da função f
- um ponto A , pertencente ao gráfico de f , de abscissa a
- a reta t , tangente ao gráfico da função f no ponto A

Sabe-se que:

- $a \in]0,1[$
- a reta t tem declive igual a 1,1



Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abscissa do ponto A

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente a abscissa do ponto A arredondada às centésimas.

Exame 2016, época especial

17. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja **derivada**, f' , de domínio $\mathbb{R}$, é dada por

$$f'(x) = e^x (x^2 + x + 1)$$

Resolva o item seguinte recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Sejam p e q dois números reais tais que

$$p = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \quad \text{e} \quad q = -\frac{1}{p}$$

Determine o valor de q e interprete geometricamente esse valor.

Exame 2016, 1ª fase

18. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$
Sabe-se que $f'(2) = 6$ (f' designa a derivada de f)

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}$?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

Exame 2015, época especial

19. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x) = x^2 e^{1-x}$

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame 2015, época especial

20. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-3) - \ln x & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

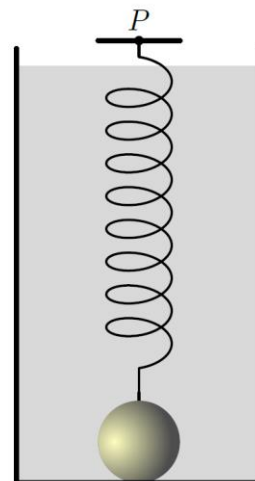
Recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora, determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 4

Exame 2015, 2ª fase

21. Na figura ao lado, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso. Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada. Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t}, \quad (t \geq 0)$$

Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.



Exame 2015, 1ª fase

22. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

Exame 2014, época especial

23. Considere uma função f , de domínio $\mathbb{R}$.
Sabe-se que:

- a reta de equação $x = 0$ é assíntota do gráfico da função f
- $f(-3) \times f(5) < 0$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe e é positivo, para qualquer número real x não nulo;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 0$

Considere as afirmações seguintes.

- I) O teorema de Bolzano permite garantir, no intervalo $[-3,5]$, a existência de, pelo menos, um zero da função f
- II) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$
- III) A função f é crescente em $]0, +\infty[$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

Exame 2014, época especial

24. Considere as funções f e g , de domínio $] -\infty, 0[$ definidas por $f(x) = x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}$ e $g(x) = -x + f(x)$

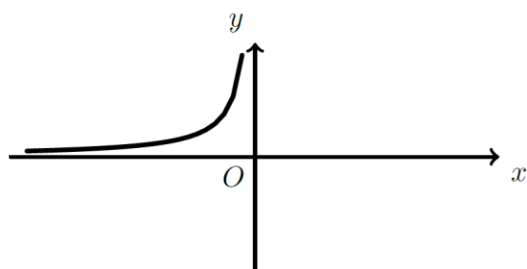
Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

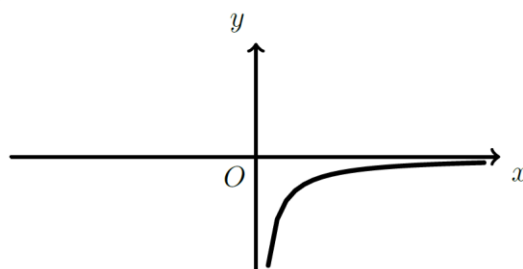
Exame 2014, 2ª fase

25. Considere, para um certo número real a positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a + \ln\left(\frac{a}{x}\right)$.
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f' , primeira derivada da função f ?

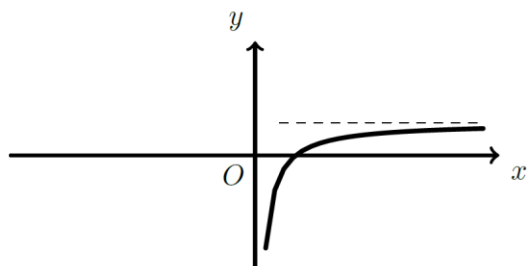
(A)



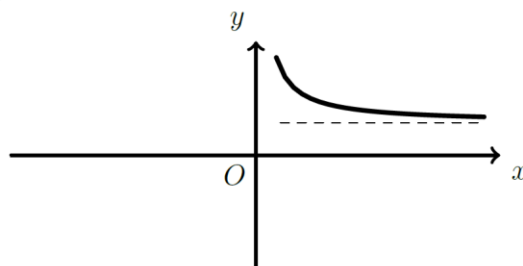
(B)



(C)



(D)



Exame 2014, 1ª fase

26. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 + e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{3x + \ln x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Seja t a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa 1

Determine a equação reduzida da reta t , recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Teste Intermédio 12º ano, abril 2014

27. Numa certa escola, eclodiu uma epidemia de gripe que está a afetar muitos alunos. Admita que o número de alunos com gripe, t dias após as zero horas de segunda-feira da próxima semana, é dado aproximadamente por

$$f(t) = (4t + 2)e^{3,75-t}, \text{ para } t \in [0,6]$$

Como, por exemplo, $f(1,5) \approx 76$, pode concluir-se que 76 alunos dessa escola estarão com gripe às 12 horas de terça-feira da próxima semana.

Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Estude a função f quanto à monotonia e conclua em que dia da próxima semana, e a que horas desse dia, será máximo o número de alunos com gripe.

Teste Intermédio 12º ano, abril 2014

28. Considere, para um certo número real k positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{1 - e^{2x}} & \text{se } x < 0 \\ \ln k & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{2} - \ln\left(\frac{6x}{x+1}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

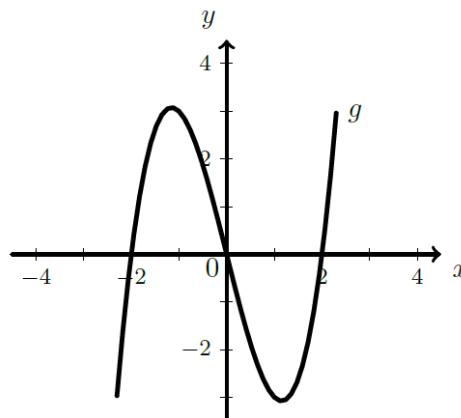
Mostre que $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$ é um extremo relativo da função f no intervalo $]0, +\infty[$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame 2013, época especial

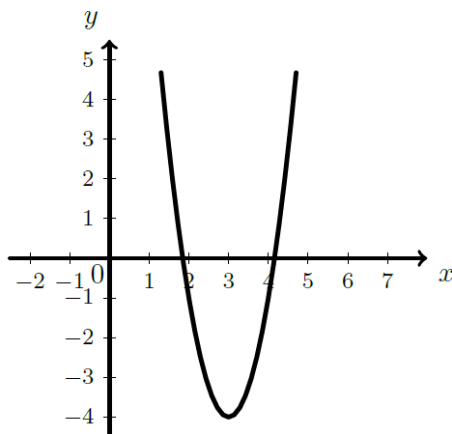
29. Na figura ao lado, está representada, num referencial ortogonal xOy , parte do gráfico de uma função polinomial g , de grau 3

Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, que verifica a condição $f(x) = g(x - 3)$

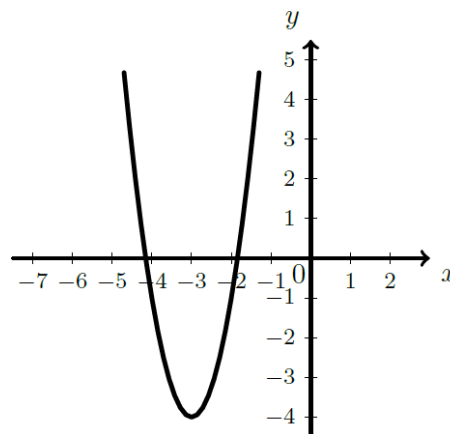
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f' , primeira derivada da função f ?



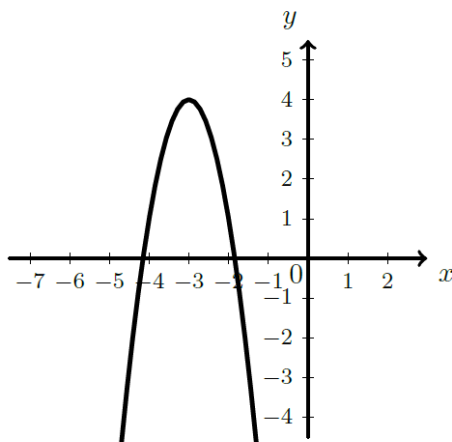
(A)



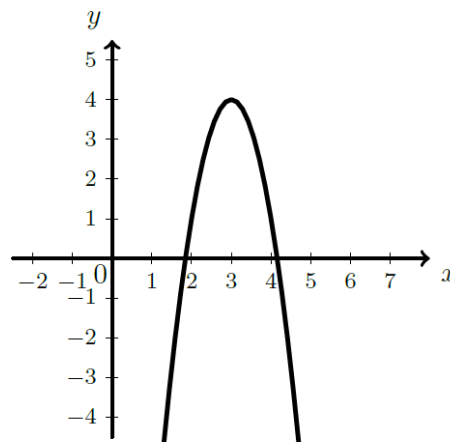
(B)



(C)



(D)



Exame 2013, 2ª fase

30. Considere, para um certo número real a superior a 1, as funções f e g , de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = a^x$ e $g(x) = a^{-x}$

Considere as afirmações seguintes.

I) Os gráficos das funções f e g não se intersectam.

II) As funções f e g são monótonas crescentes.

III) $f'(-1) - g'(1) = \frac{2 \ln a}{a}$

Qual das opções seguintes é a correta?

(A) II e III são verdadeiras.

(B) I é falsa e III é verdadeira.

(C) I é verdadeira e III é falsa.

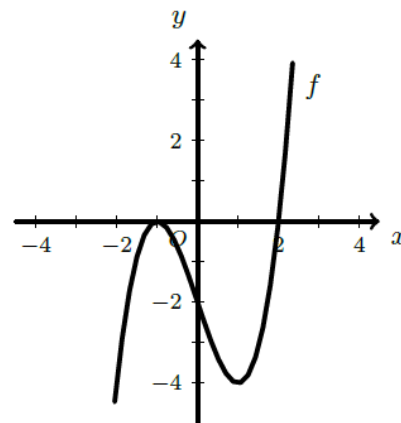
(D) II e III são falsas.

Exame 2013, 1ª fase

31. Na figura ao lado, está representada, num referencial ortogonal xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 3

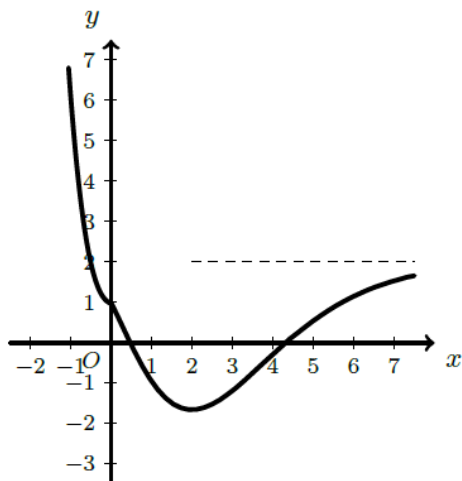
Sabe-se que:

- -1 e 2 são os únicos zeros da função f
- g' , a primeira derivada de uma certa função g , tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g'(x) = f(x) \times e^{-x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2] = 0$

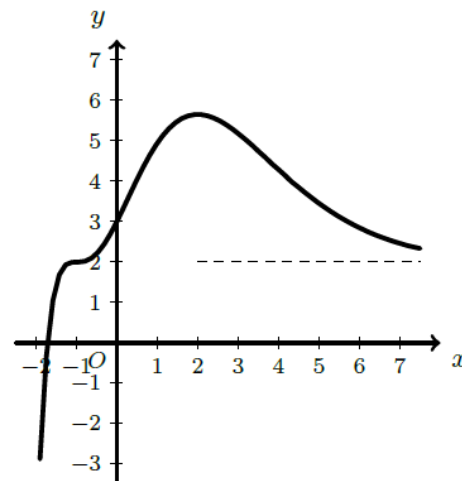


Apenas uma das opções seguintes pode representar a função g

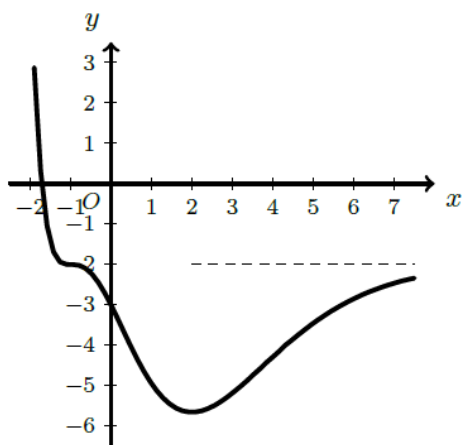
(I)



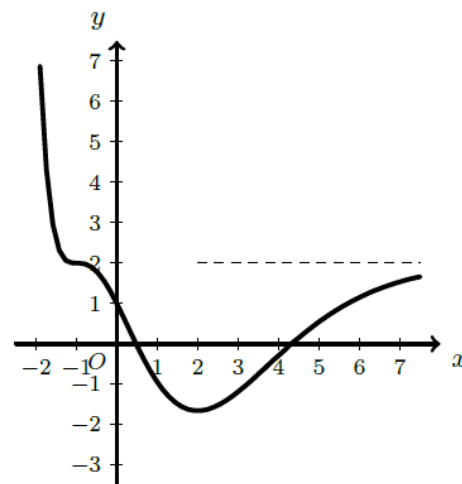
(II)



(III)



(IV)



Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, uma assíntota desse gráfico.

Elabore uma composição na qual:

- identifique a opção que pode representar a função g
- apresente as razões para rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões diferentes, uma por cada gráfico rejeitado.



32. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus 0$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1}}{e^{4x-1}} & \text{se } x < 0 \\ x \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$

Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0, e]$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame 2013, 1ª fase

33. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^a + a^2 \ln x$ (a é um número real maior do que 1), e seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa a . Qual é o declive da reta r ?

(A) $a^{a-1} + a^2$ (B) $a^a + a^2$ (C) $a^{a-1} + a$ (D) $a^a + a$

Teste Intermédio 12º ano, maio 2013

34. Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por

$$C(t) = 0,5t^2 \times e^{-0,1t}, \text{ com } t \geq 0$$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determine o valor de t para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

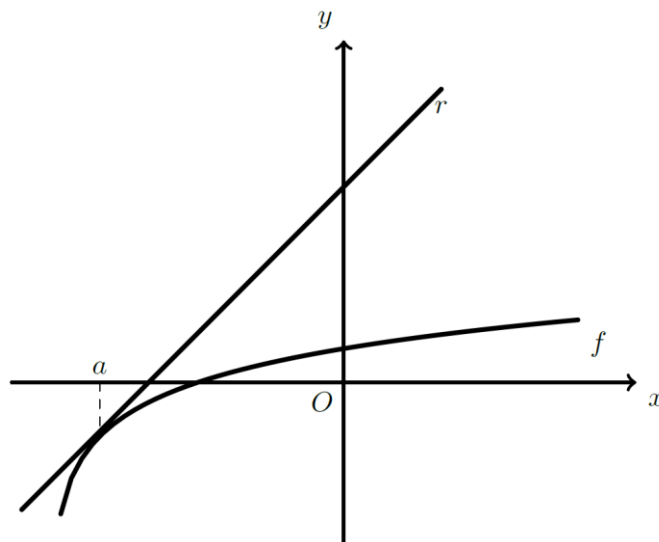
Exame 2012, época especial

35. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f , de domínio $] -6, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x}{3} + 2\right)$. Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa a
- a inclinação da reta r é, em radianos, $\frac{\pi}{4}$

Qual é o valor de a ?

(A) -4 (B) $-\frac{9}{2}$
(C) $-\frac{11}{2}$ (D) -5



Exame 2012, 2ª fase



36. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x & \text{se } x > 0 \\ xe^{1-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $x = -1$, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

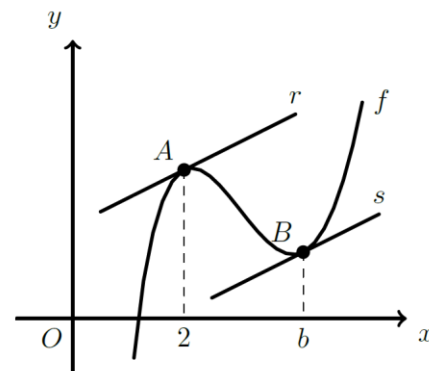
Exame 2012, 1ª fase

37. De uma certa função f sabe-se que:

- o seu domínio é $]1, +\infty[$
- a sua **derivada** é dada por $f'(x) = x^2 - 4x + \frac{9}{2} - 4 \ln(x-1)$

Na figura ao lado, estão representadas:

- parte do gráfico da função f
- a reta r que é tangente ao gráfico da função f no ponto A , de abscissa 2
- a reta s que é tangente ao gráfico da função f no ponto B



As retas r e s são paralelas.

Seja b a abscissa do ponto B

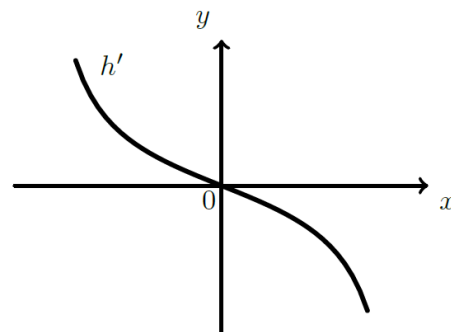
Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de b . Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que tiver necessidade de visualizar na calculadora para resolver graficamente a equação;
- assinalar o ponto relevante para a resolução do problema;
- apresentar o valor de b arredondado às centésimas.

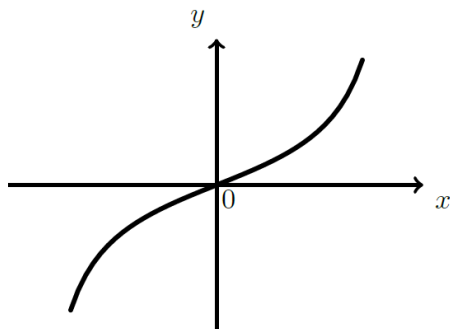
Teste Intermédio 12º ano, maio 2012

38. Na figura ao lado, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função h' , primeira derivada de h

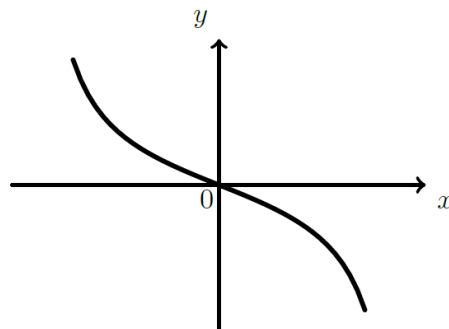
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?



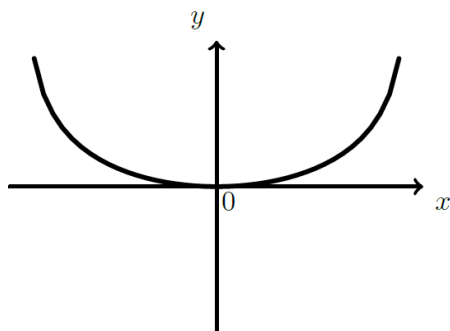
(A)



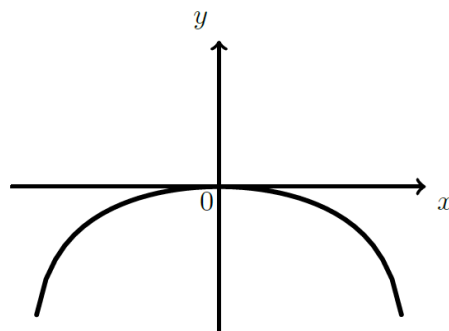
(B)



(C)



(D)



Exame 2011, época especial

39. Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

- $f(1) = f'(1) = 1$
- $g(x) = (2x - 1) \times f(x)$, para todo o valor real de x

Qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1?

- (A) $y = 3x - 2$ (B) $y = 3x + 4$ (C) $y = 2x - 1$ (D) $y = -3x + 2$

Exame 2011, época especial



40. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases} \quad (a \text{ é um número real.})$$

Seja f' a primeira derivada de f

Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0,1[$

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame 2011, época especial

41. Considere a função f , de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{x+1}{\ln(x+1)} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Estude f quanto à monotonia em $]2, +\infty[$, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame 2011, 2ª fase

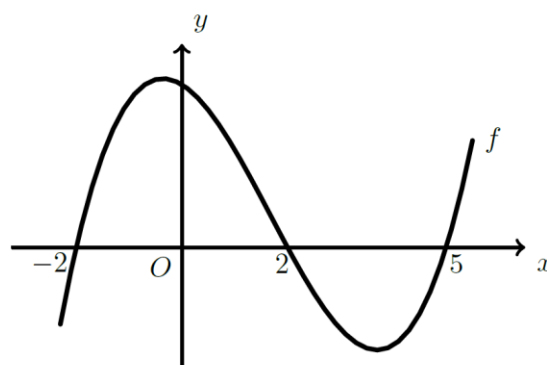
42. Na figura ao lado, está representada, num referencial ortogonal xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- -2, 2 e 5 são zeros de f
- f' representa a função derivada de f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $f'(0) \times f'(6) = 0$ (B) $f'(-3) \times f'(6) < 0$
(C) $f'(-3) \times f'(0) > 0$ (D) $f'(0) \times f'(6) < 0$



Exame 2011, 1ª fase

43. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zeros horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por

$$T(t) = 15 + 0,1t^2e^{-0,15t}, \text{ com } t \in [0,20]$$

Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame 2011, 1ª fase

44. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \frac{2 + \ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

O gráfico de f admite uma assíntota horizontal.

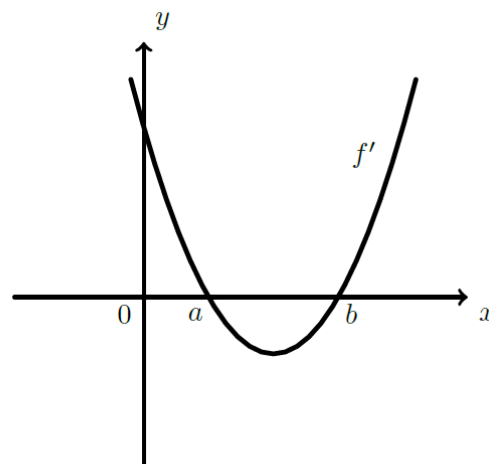
Seja P o ponto de interseção dessa assíntota com a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e .

Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

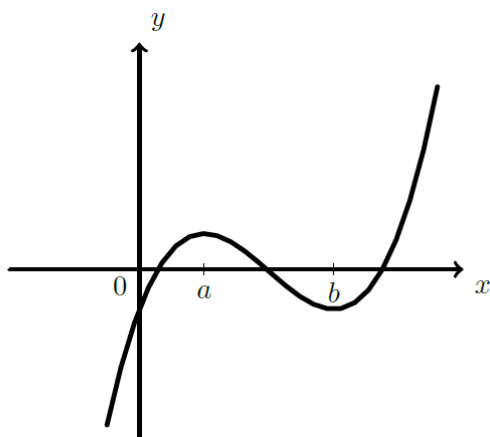
Exame 2011, 1ª fase

45. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função derivada, f' , de uma função f

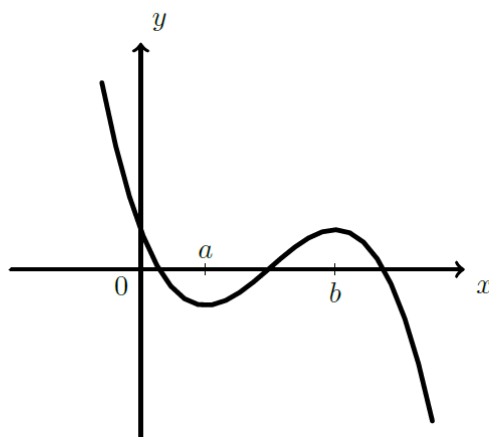
Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?



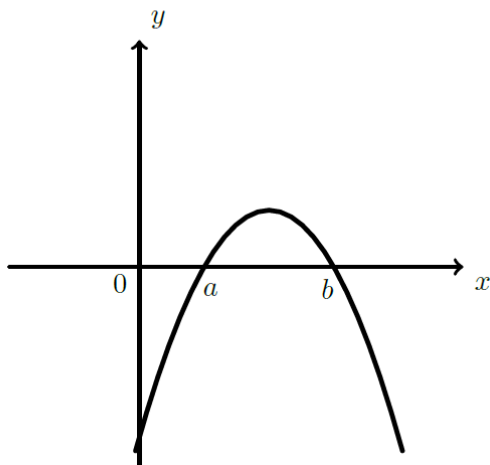
(A)



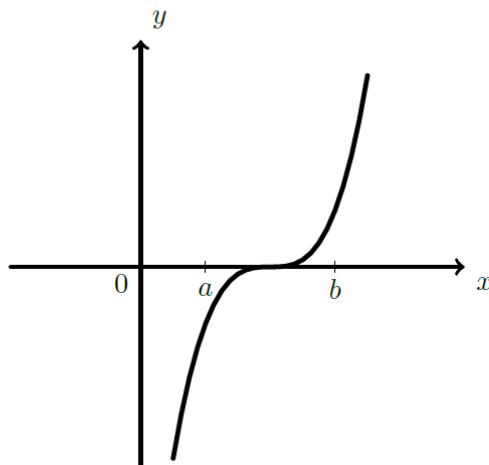
(B)



(C)



(D)



Exame 2010, época especial

46. Considere a função f , de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função f tem um extremo relativo no intervalo $]2, +\infty[$.

Exame 2010, 2ª fase

- 47.** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3-1}$.
Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 0$

Exame 2010, 2ª fase

- 48.** Considere uma função f , de domínio $]0, 3[$, cuja derivada f' , de domínio $]0, 3[$, é definida por

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar os intervalos de monotonia da função f ;
- assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

Exame 2010, 1ª fase

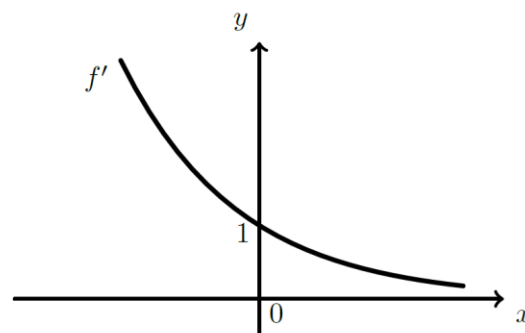
- 49.** Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 + 4x^2e^{-x}$.
Mostre, usando exclusivamente métodos analíticos, que a função f tem um único mínimo relativo e determine-o.

Teste Intermédio 12º ano, maio 2010

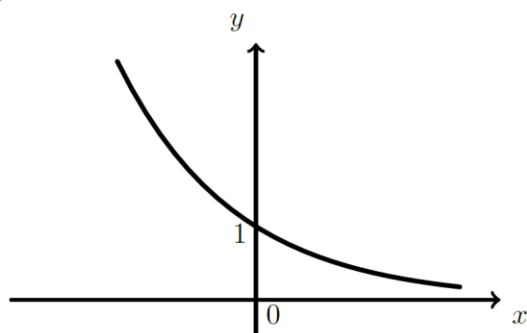
50. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma função f' , derivada de f , ambas de domínio $\mathbb{R}$, em que o eixo Ox é uma assíntota do gráfico de f'

Seja a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) + x$

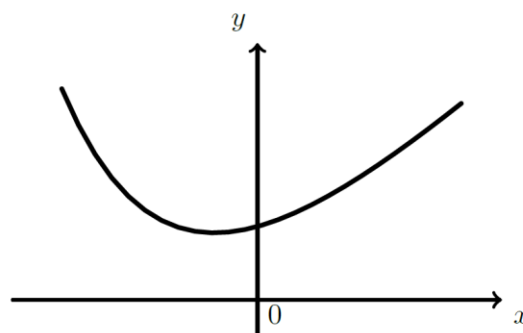
Qual das figuras seguintes pode representar parte do gráfico da função g' , derivada de g ?



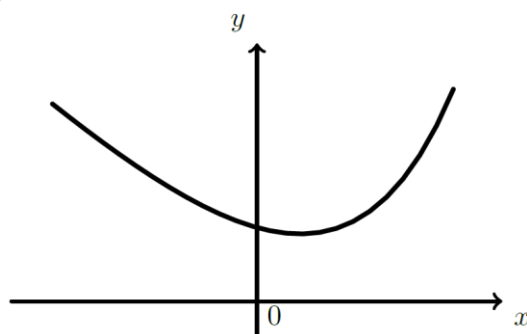
(A)



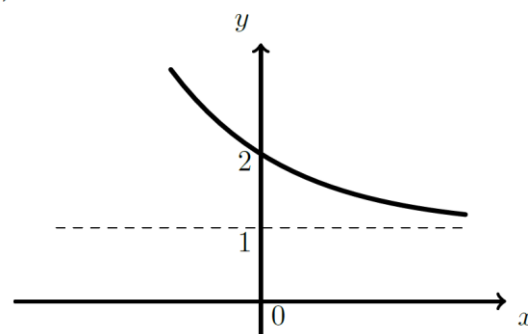
(B)



(C)



(D)



Exame 2009, 2ª fase

51. Numa certa zona de cultivo, foi detetada uma doença que atinge as culturas. A área afetada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir. Admita que a área, em hectares, afetada pela doença, é dada, em função de t , por

$$A(t) = 2 - t + 5 \ln(t + 1)$$

sendo t ($0 \leq t < 16$) o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detetada essa doença.

Determine a área máxima afetada pela doença.

Resolva este item, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, e apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

Nota: A calculadora pode ser usada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame 2009, 2ª fase

52. Num certo dia, o Fernando esteve doente e tomou, às 9 horas da manhã, um medicamento cuja concentração $C(t)$ no sangue, em mg/l , t horas após o medicamento ter sido ministrado, é dada por

$$C(t) = 2te^{-0,3t} \quad (t \geq 0)$$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determine a que horas se verificou a concentração máxima.

Apresente o resultado em horas e minutos, arredondando estes às unidades.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame 2009, 1ª fase

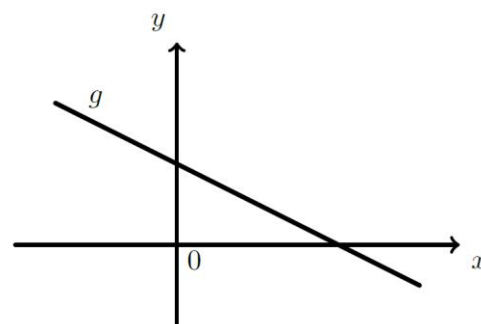
53. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$
Seja g a função cujo gráfico é a reta representada na figura ao lado.

Seja $h = f + g$

Seja h' a função derivada da função h . O gráfico da função h' é uma reta. Sejam m e b , respetivamente, o declive e a ordenada na origem desta reta.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $m > 0$ e $b > 0$ (B) $m > 0$ e $b < 0$
(C) $m < 0$ e $b > 0$ (D) $m < 0$ e $b < 0$



Teste Intermédio 12º ano. Maio 2009

54. De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua **derivada**, f' , é definida por

$$f'(x) = (2x + 4)e^x$$

Seja A o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas. Sabe-se que a ordenada deste ponto é igual a 1.

Sem recorrer à calculadora, determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto A .

Teste Intermédio 12º ano. Maio 2009

55. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
Determine, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 2.

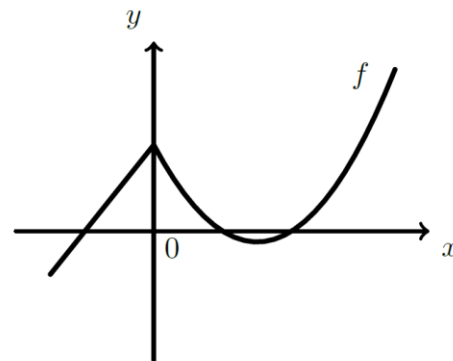
Exame 2008, época especial

56. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).
Estude, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e os valores dos extremos relativos, caso existam.

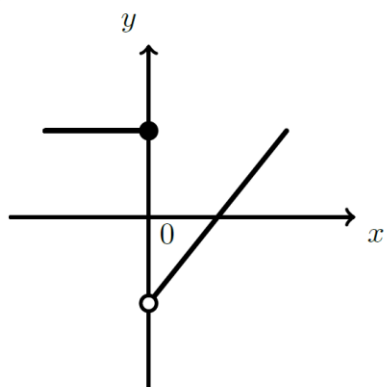
Exame 2008, época especial

57. A figura ao lado representa parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

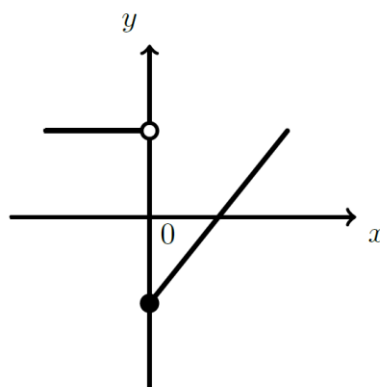
Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica de f' , derivada de f ?



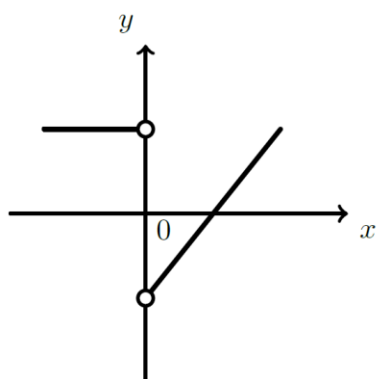
(A)



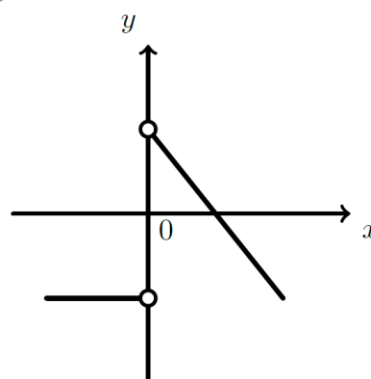
(B)



(C)



(D)



Exame 2008, 1ª fase

58. Seja h a função de domínio $] -1, +\infty[$, definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x + 1)$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).

Usando **métodos analíticos**, estude a função h , quanto à monotonia, no seu domínio.

Indique os intervalos de monotonia e, se existir algum extremo relativo, determine-o.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

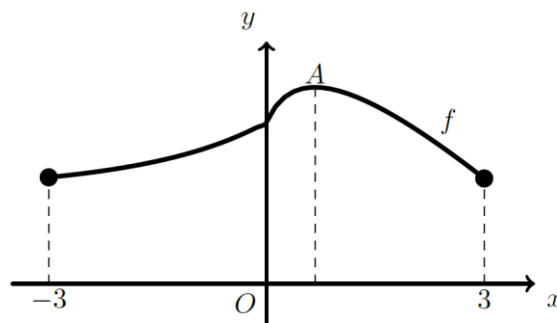
Exame 2008, 1ª fase

59. Seja f a função de domínio $[-3,3]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 + x}{x} & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ 2 - x + \ln(1 + 3x) & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Na figura ao lado está representado o gráfico da função f . Tal como a figura sugere:

- A é o ponto do gráfico de f de ordenada máxima
- a abcissa do ponto A é positiva



- 59.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, determine a abcissa do ponto A .

- 59.2. Na figura seguinte está novamente representado o gráfico de f , no qual se assinalou um ponto B , no segundo quadrante.

A reta r é tangente ao gráfico de f , no ponto B .

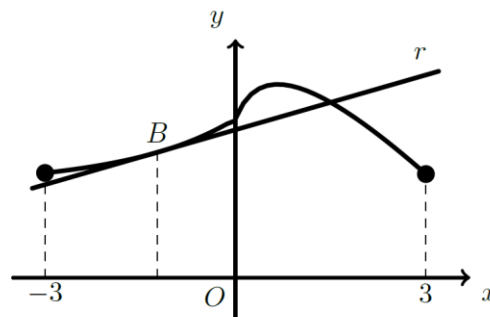
Considere o seguinte problema:

Determinar a abcissa do ponto B , sabendo que a reta r tem declive $0,23$

Traduza este problema por meio de uma equação e, recorrendo à calculadora resolva-a graficamente, encontrando assim um valor aproximado da abcissa do ponto B .

Pode realizar algum trabalho analítico antes de recorrer à calculadora.

Reproduza na sua folha de prova o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresente o valor pedido arredondado às centésimas.



Teste Intermédio 12º ano. Abril 2008

60. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$.
Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Exame 2008, 2ª fase

61. Admita que a intensidade da luz solar, x metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por

$$I(x) = ae^{-bx} \quad (x \geq 0)$$

a e b são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efetuada a medição.

Sempre que se atribui um valor a a e um valor a b obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$

Considere agora $b = 0,05$ e $a = 10$

Estude essa função quanto à monotonia e existência de assíntotas do seu gráfico.

Interprete os resultados obtidos no contexto da situação descrita.

Exame 2007, 1ª fase

62. Seja a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{2-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

62.1. Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à monotonia, no intervalo $]0,1[$

62.2. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

Seja s a reta que passa na origem do referencial e é paralela à reta r .

A reta s intersecta o gráfico de f num ponto.

Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto. Apresente os valores arredondados às centésimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtidos na calculadora.

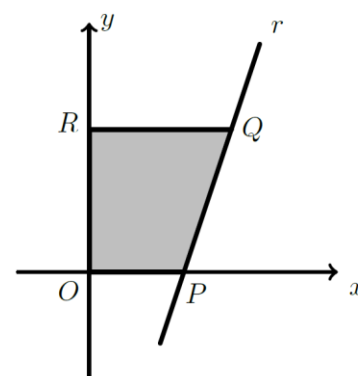
Exame 2006, época especial

63. Seja f a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = x + x \ln(x-1)$.

Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy , uma reta r e um trapézio $[OPQR]$.

- Q tem abscissa 2 e pertence ao gráfico de f (o qual não está representado na figura);
- r é tangente ao gráfico de f no ponto Q ;
- P é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox ;
- R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto Q .

Sem recorrer à calculadora, determine a área do trapézio $[OPQR]$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



Exame 2006, 2ª fase

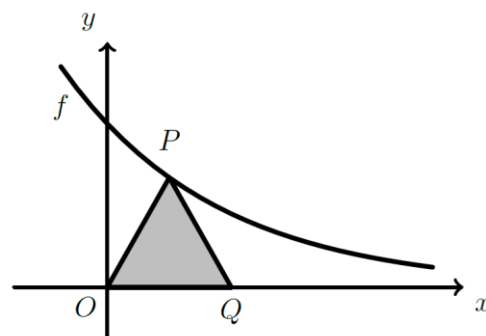
64. Na figura ao lado estão representados:
- parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x}$
 - um triângulo isósceles $[OPQ]$, $(\overline{PO} = \overline{PQ})$ em que:
 - O é a origem do referencial;
 - P é um ponto do gráfico de f ;
 - Q pertence ao eixo das abscissas.

Considere que o ponto P se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f .

O ponto Q acompanha o movimento do ponto P , deslocando-se ao longo do eixo das abscissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$.

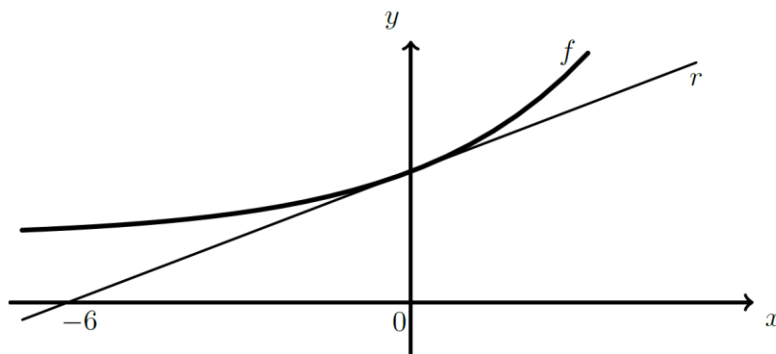
Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abscissa x do ponto P , a área do triângulo $[OPQ]$, definida por $A(x) = xe^{-x}$

Sem recorrer à calculadora, estude a função A quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo $[OPQ]$ pode assumir.



Exame 2006, 1ª fase

65. Na figura ao lado está representado, em referencial xOy , parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{ax} + 1$ (a é uma constante real positiva).



Na figura está também representada a reta r , que é tangente ao gráfico de f no ponto em que este interseja o eixo Oy .

A reta r interseja o eixo Ox no ponto de abscissa -6. Qual é o valor de a ?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

Exame 2005, época especial

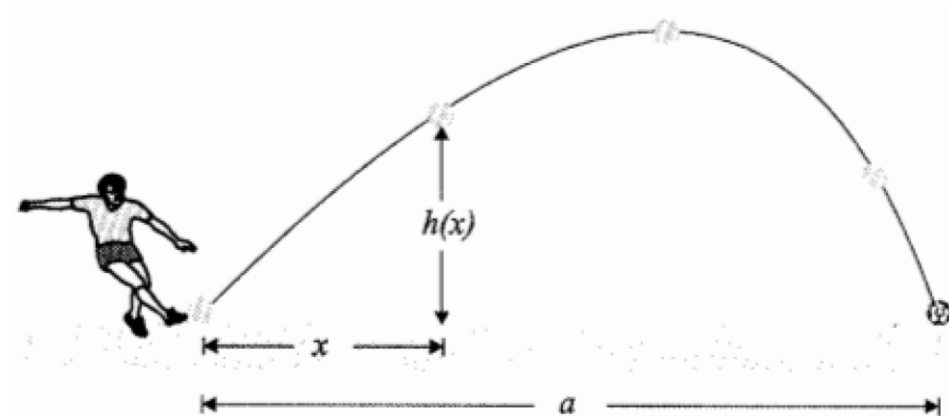
66. De uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f tem derivada finita em todos os pontos de $\mathbb{R}$
- $f(0) = -1$
- f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$ e é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = [f(x)]^2$. Prove que 1 é o mínimo da função g .

Exame 2005, época especial

67. Na figura ao lado está representada a trajetória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador de da seleção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.



Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu.

Considere a função h definida em $[0, a]$ por

$$h(x) = 2x + 10 \ln(1 - 0,1x) \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projeção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.

Sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, estude a função h quanto à monotonia e conclua qual foi a maior altura que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada. Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

Exame 2005, 2ª fase



68. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que a sua **derivada** é dada por

$$f'(x) = 2 + x \ln x, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Seja P o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox .

Sabendo que $f(1) = 3$, determine a abscissa do ponto P , **sem recorrer à calculadora**.

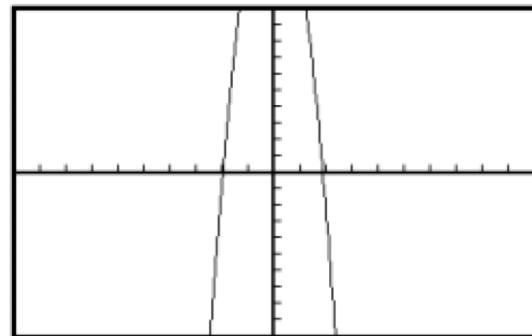
Exame 2005, 1ª fase

69. De uma certa função h , **contínua** em $\mathbb{R}$, obteve-se com a calculadora, na janela de visualização *standard* $[-10,10] \times [-10,10]$, o gráfico apresentado na figura ao lado.

A função h é crescente em $[-3,0]$ e é decrescente em $[0,3]$. Qual das afirmações seguintes **pode** ser verdadeira?

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$ (B) A função h é ímpar

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 10$ (D) $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) > 0$



Exame 2004, época especial

70. Seja f a função definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{3x + 2}{2x + 2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à monotonia em $\mathbb{R}^+$.

Exame 2004, época especial

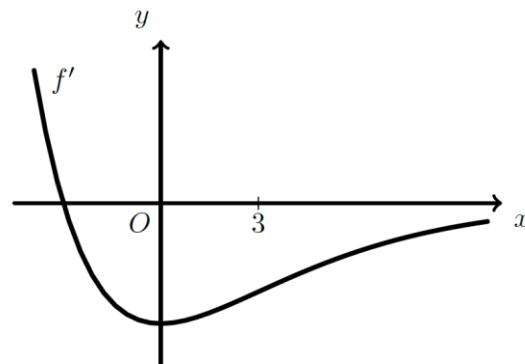
71. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

Na figura ao lado encontra-se parte do gráfico de f' , função derivada de f .

Sabe-se ainda que $f(0) = 2$

Qual pode ser o valor de $f(3)$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 7



Exame 2004, 2ª fase

72. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

Sem recorrer à calculadora, determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Exame 2004, 2ª fase

73. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + 3x^2 e^{-x}$

Sem recorrer à calculadora, mostre que a função f tem um único mínimo relativo e determine-o.

Exame 2004, 1ª fase

74. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$

Sem recorrer à calculadora, estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Exame 2003, prova militares

75. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja expressão analítica é um polinómio do quarto grau, que tem uma raiz dupla x_0 . Prove que o eixo Ox é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa x_0 .

Sugestão: tenha em conta que, se x_0 é uma raiz dupla do polinómio que define a função g , então tem-se $g(x) = (x - x_0)^2(ax^2 + bx + c)$

Exame 2003, prova militares

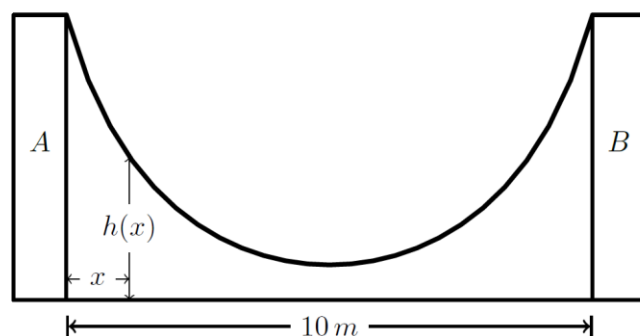
76. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes, A e B , distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura ao lado.

Considere a função h definida por

$$h(x) = 15 - 4 \ln(-x^2 + 10x + 11)$$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

Admita que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado a x metros à direita da parede A .



Sem recorrer à calculadora, estude a função h quanto à monotonia e conclua daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante das duas paredes que a altura da rampa é mínima.

Exame 2003, 1ª fase – 2ª chamada

77. Num laboratório, foi colocado um purificador de ar. Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois. Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar **diminuiu**, enquanto o purificador esteve ligado. Uma vez o purificador desligado, o nível de poluição do ar **começou de imediato a aumentar**. Admita que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por

$$P(t) = 1 - \frac{\ln(t+1)}{t+1}, \quad t \in [0, 24] \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:

Quanto tempo esteve o purificador de ar ligado?

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades) e sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame 2003, 1ª fase – 1ª chamada

78. Prove que, para qualquer função quadrática, existe um e um só ponto do gráfico onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame 2003, 1ª fase – 1ª chamada

79. Considere as funções $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = \ln x \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

$$g(x) = x^2 - 3$$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude, quanto à monotonia, a função $f - g$

Exame 2002, prova militares

80. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar embalagens de sumo de fruta, com capacidade de **dois litros**. Por questões de *marketing*, as embalagens deverão ter a forma de um **prisma quadrangular regular**.

A área total da embalagem é dada por

$$A(x) = \frac{2x^3 + 8}{x}$$

(x é o comprimento da aresta da base, em dm)

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, mostre que existe um valor de x para o qual a área total da embalagem é mínima e determine-o.



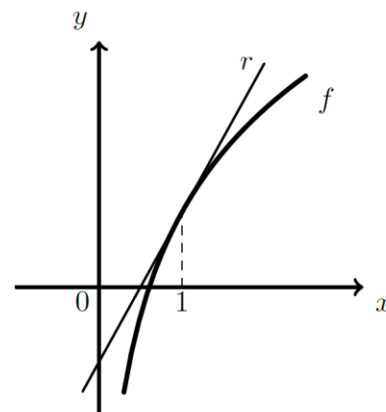
Exame 2002, 2ª fase

81. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do domínio, e **crescente**.
Sejam a e b dois quaisquer números reais. Considere as retas r e s , tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e b , respetivamente.
Prove que as retas r e s não podem ser perpendiculares.

Exame 2002, 2ª fase

82. Na figura ao lado estão representadas, num referencial o. n. xOy
- parte do gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 1 + 2 \ln x$.
 - a reta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1
- Qual é o declive da reta r ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4



Exame 2002, 1ª fase – 1ª chamada