1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2i$

Determine, sem recorrer à calculadora, os números complexos z que são solução da equação

$$iz^2 + z_1^{\,2} \times \left(\overline{z}_2\right)^3 - 2 = 0$$

Apresente esses números na forma trigonométrica.

Exame 2021, época especial

2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $(1+2i)z+(1-2i)\overline{z}+10=0$ define, no plano complexo, uma reta.

Considere todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta reta.

Determine qual deles tem menor módulo.

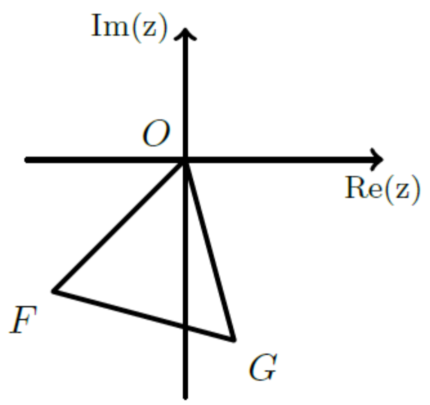
Apresente esse número na forma $a+bi$, com, $a,b \in IR$

Exame 2021, 2.ª fase

3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z_1 = -1-i$

Na figura ao lado está representado, no plano complexo, o triângulo equilátero $[OFG]$

Sabe-se que o ponto F é a imagem geométrica do número complexo z_1 e que o ponto G é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$ e pertence ao quarto quadrante.



A que é igual o número complexo z_2 ?

(A) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ **(B)** $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(C) $1+\sqrt{2}i$ **(D)** $1+\sqrt{3}i$

Exame 2020, época especial

4. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja $z_1 = \dfrac{2}{1-i} + \dfrac{4}{i^5}$ e seja z_2 um número complexo tal que $|z_2| = \sqrt{5}$

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas e iguais.

Determine z_2, apresente o resultado na forma $a + bi$, com, $a, b \in IR$

Exame 2020, 2.ª fase

5. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva este item sem recorrer à calculadora. Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = \overline{z}$

Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular.

Determine o perímetro desse polígono.

Exame 2020, 1.ª fase

6. Para um certo número real x, pertence ao intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{12}\right[$, o número complexo $z = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{10}$

Verifica a condição $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$

Qual é o valor de x arredondado às centésimas?

(A) 0,02 **(B)** 0,03 **(C)** 0,12 **(D)** 0,13

Exame 2018, 1.ª fase

7. Seja $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3ke^{1\left(\frac{3\pi}{2}\right)}, \text{ com } k \in IR^+$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$

Qual é o valor de k ?

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Exame 2017, 1.ª fase

8. Seja ρ um número real positivo, e seja θ um número real pertence ao intervalo $]0\,,\pi[$

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-1+i}{\left(\rho e^{i\theta}\right)^2}$ e $w = -\sqrt{2}i$

Sabe-se que $z = w$

Determine o valor de ρ e o valor de θ

Exame 2016, 2.ª fase

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{8e^{i\theta}}{-1+\sqrt{3}i} \quad \text{e} \quad z_2 = e^{i(2\theta)}$$

Determine o valor de θ pertencente ao intervalo $]0\,,\pi[$ de modo que $\overline{z}_1 \times z_2$ seja um número real.

Exame 2016, 1.ª fase

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}e^{i\theta}}$

Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0\,,2\pi[$, para os quais z é um número imaginário puro.

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

Exame 2015, 1.ª fase

11. Seja $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos.

11.1. Considere $z_1 = \frac{1-i}{2i} - i^{-1}$ e $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Averigue se a imagem geométrica do complexo $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

11.2. Considere o número complexo $w = \text{sen}(2\alpha) + 2i\cos^2\alpha$ com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Escreva w na forma trigonométrica

Exame 2014, época especial

12. Seja $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos.

12.1. Considere $z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ e $w = \frac{(z-i)^4}{1+zi}$

No plano complexo, seja O a origem do referencial.

Seja A a imagem geométrica do número complexo $\bar{z}$ e seja B a imagem geométrica do número complexo w.

Determine a área do triângulo $[AOB]$, sem utilizar a calculadora.

12.1. Seja $\alpha \in]0, \pi[$

Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 2\cos\alpha z + 1 = 0$

Apresente as soluções, em função de α, na forma trigonométrica.

Exame 2014, 2.ª fase

13. Seja $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos.

13.1. Considere $z_1 = \dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$ e $z_2 = e^{i\alpha}$, com $\alpha \in [0,\pi[$

Determine os valores de α, de modo que $z_1 \times (z_2)^2$ seja um número imaginário puro, sem utilizar a calculadora.

13.1. Seja z um número complexo tal que $|1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10$

Mostre que $|z| \leq 2$

Exame 2014, 1.ª fase

14. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+2ie^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}$
Seja $z = e^{i\theta}$, com θ pertencente a $[0,2\pi[$
Determine θ de modo que $\dfrac{z}{z_1}$ seja um número real negativo, sem utilizar a calculadora.

Exame 2013, época especial

15. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Considere $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22}$ e $z_2 = \dfrac{-2}{iz_1}$
Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

Exame 2013, 2.ª fase

16. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_2 = 1+i$
Seja $z_3 = e^{i\alpha}$
Determine o valor de α pertencente ao intervalo $]-2\pi,-\pi[$ sabendo que $z_3 + \overline{z_2}$ é um número real.

Exame 2013, 1.ª fase

17. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Mostre, sem recorrer à calculadora, que o número $2e^{i\left(\frac{\pi}{10}\right)}$ é solução da equação $z^6 \times \overline{z} = 128i$
$\overline{z}$ designa o conjugado de z

Teste Intermédio 12.º ano, maio 2012

18. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Seja w um número complexo não nulo.
Mostre, sem recorrer à calculadora, que, se o conjugado de w é igual a metade do inverso de w, então a imagem geométrica de w pertence à circunferência de centro na origem e de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exame 2012, época especial

19. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Seja $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que $z_1 = e^{i\alpha}$ e $z_2 = e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$
Mostre, analiticamente, que a imagem geométrica de z_1+z_2, no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

Exame 2012, 2.ª fase

20. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = (-2+i)^3$ e $z_2 = \frac{1+28i}{2+i}$

20.1. Resolva a equação $z^3 + z_1 = z_2$, sem recorrer à calculadora.

Apresente as soluções da equação na forma trigonométrica.

20.2. Seja w um número complexo não nulo.

Mostre que, se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z, então $z = 1$ ou $z = -1$

Exame 2012, 1.ª fase

21. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Para um certo número inteiro k, a expressão $\frac{\left(\sqrt{2}i\right)^3 \times e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{k+i}$ designa um número real.
Determine esse número k

Teste Intermédio 12.º ano, maio 2012