TEOREMAS E OPERAÇÕES COM CONJUNTOS
Exercícios de Exames e Testes Intermédios
Resolução

1. Tem-se que $A \cap B = \varnothing$, pelo que os acontecimentos A e B são incompatíveis e portanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \underset{\substack{P(\overline{B})=0,6 \Leftrightarrow \\ P(B)=1-0,6 \Leftrightarrow \\ P(B)=0,4}}{\Leftrightarrow} 0,6 = P(A) + 0,4 \Leftrightarrow P(A) = 0,2$$

Assim, $P(\overline{A}) = 1 - 0,2 = 0,8$

OPÇÃO: D

Exame 2022, 1.ª fase

2. Tem-se que $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = \frac{8}{9}$

Então, $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{8}{9}$

Como os acontecimentos são independentes $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, tem-se $1 - P(A \cap B) = 1 - (P(A) \times P(B)) = \frac{8}{9}$

Os acontecimentos são equiprováveis, logo de $P(B) = P(A)$ vem que

$$1 - P(A) \times P(A) = \frac{8}{9} \Leftrightarrow (P(A))^2 = 1 - \frac{8}{9} \Leftrightarrow (P(A))^2 = \frac{1}{9} \underset{P(A)>0}{\Leftrightarrow} P(A) = \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

OPÇÃO: C

Exame 2019, época especial

3. A e B são acontecimentos equiprováveis e independentes, assim $P(A) = P(B)$ e $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = P(A) \times P(A) = (P(A))^2$

Logo, como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,64 = P(A) + P(A) - (P(A))^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (P(A))^2 - 2P(A) + 0,64 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 0,64}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm 1,2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 1,6 \vee P(A) = 0,4$$

Como $P(A) \leq 1$, então $P(A) = 0,4$

OPÇÃO: B

Exame 2018, época especial

4. Como $P(B)=1-P(\overline{B})=P(B)-P(A\cap B)$ vem que $P(B)=1-0,7=0,3$

Assim,

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cup B)=0,4+0,3-0,5\Leftrightarrow P(A\cup B)=0,2$

Portanto, $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0,2=0,8$

OPÇÃO: C

Exame 2015, 1.ª fase

5. Tem-se que $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cup B)$

Assim, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,48\Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=0,48\Leftrightarrow P(A\cup B)=1-0,48\Leftrightarrow P(A\cup B)=0,52$

A e B são acontecimentos independentes, logo $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

Assim, $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\Leftrightarrow P(A)\times P(B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

Portanto,

$0,4\times P(B)=0,4+P(B)-0,52\Leftrightarrow 0,4\times P(B)-P(B)=-0,12\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B)(1-0,4)=0,12\Leftrightarrow P(B)=\dfrac{0,12}{0,6}\Leftrightarrow P(B)=0,2$

OPÇÃO: C

Exame 2014, 2.ª fase

6. Tem-se que $P(A\cap B)=0$, porque A e B são acontecimentos incompatíveis.

De $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$ e $P(A\cap B)=0$, vem que

$P(\overline{A}\cap B)=P(B)\Leftrightarrow 0,55=P(B)$

Como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, $P(A\cap B)=0$ e $P(A)=0,3$, temos que:

$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0,85=0,15$

$P(\overline{A\cup B})\underset{\text{Leis de Morgan}}{=}P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,15$

OPÇÃO: C

Exame 2013, época especial

7. A e B são independentes se $P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$

Tem-se ainda que:

$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0,6=0,4$

$P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,4$

$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-0,4=0,6$

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0,3+0,4-0,6=0,1$

Como $P(A)\times P(B)=0,3\times 0,4=0,12\neq 0,1$ portanto $P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$

Logo A e B não são acontecimentos independentes.

Teste Intermédio 12.º ano, fevereiro 2013

8. De $\overline{A}\cup(A\cap\overline{B})=(\overline{A}\cup A)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\Omega\cap(\overline{A\cap B})=\overline{A\cap B}$ e $P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$

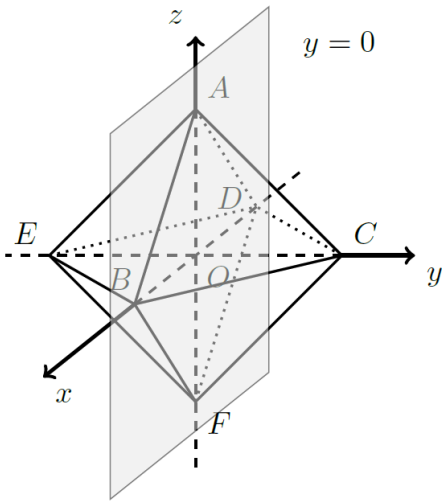
Tem-se que $P(\overline{A}\cup(A\cap\overline{B}))=P(\overline{A\cap B})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

OPÇÃO: D

Teste Intermédio 12.º ano, novembro 2013

9. X e Y são independentes se $P(X)\times P(Y)=P(X\cap Y)$

Observando a figura, pode-se verificar que apenas os pontos *A, B, D* e *E* pertencem ao plano de equação $y=0$, pelo que existem 4 casos favoráveis ao acontecimento *X*, num total de 6 casos possíveis, isto é, recorrendo à Regra de Laplace, tem-se:



$$P(X)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Analisando as coordenadas dos pontos, podemos verificar que todos os vértices do octaedro têm duas coordenadas nulas, pelo que a soma das coordenadas é igual à coordenada não nula.

Assim, como os pontos *A, B* e *C* têm coordenada não nula positiva, a soma das coordenadas é positiva, e para os restantes pontos e coordenada não nula é negativa, e por isso a soma das coordenadas é negativa, pelo que existem 3 casos favoráveis à ocorrência do acontecimento Y, num total de 6 possíveis, e assim, recorrendo à Regra de Laplace, tem-se:

$$P(Y)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

O acontecimento $X\cap Y$ corresponde a selecionar um vértice que pertence ao plano de equação $y=0$ e cuja soma das coordenadas seja positiva.

Assim, pode-se verificar que apenas os pontos *A* e *B* verificam simultaneamente as duas condições, pelo que existem 2 casos favoráveis, e assim, recorrendo à Regra de Laplace, tem-se:

$$P(X\cap Y)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad P(X)\times P(Y)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

Pelo que $P(X)\times P(Y)=P(X\cap Y)$

Logo *X* e *Y* são acontecimentos independentes.

Teste Intermédio 12.º ano, novembro 2013

10. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

Como A e B são independentes, tem-se que $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

Assim, $P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$

Como $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

Portanto, $\frac{3}{10} + P(B) - \frac{3}{4} = \frac{3}{10} \times P(B) \Leftrightarrow 6 + 20P(B) - 15 = 6P(B) \Leftrightarrow 14P(B) = 9 \Leftrightarrow P(B) = \frac{9}{14}$

OPÇÃO: B

Exame 2012, 1.ª fase

11. Sabe-se que:

- A: «O aluno é do sexo feminino», então seja $\overline{A}$: «O aluno é do sexo masculino»
- B : «O aluno está no 12.º ano» , então seja $\overline{B}$: «O aluno não está no 12.º ano»

Portanto $\overline{A} \cap \overline{B}$ representa «O aluno é do sexo masculino e não está no 12.º ano»

Como, $\overline{A} \cap \overline{B} \underset{\text{Leis de Morgan}}{=} \overline{A \cup B}$

OPÇÃO: D

Teste Intermédio 12.º ano, maio 2012

12. Como A e B são acontecimentos independentes $A \cap B = \varnothing$, pelo que $P(A \cap B) = 0$

OPÇÃO: C

Teste Intermédio 12.º ano, março 2012

13. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como A e B são acontecimentos independentes, tem-se que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Assim,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B)(1 - P(A)) \underset{P(\overline{A})=1-P(A)}{\Leftrightarrow} P(A \cup B) - P(A) = P(B)P(\overline{A}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{P(\overline{A})} \underset{P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,9=0,1}{\Leftrightarrow} P(B) = \frac{0,73 - 0,1}{0,9} = 0,7$

OPÇÃO: D

Exame 2011, época especial

14. Como A e B são acontecimentos incompatíveis, tem-se que $A \cap B = \varnothing$, isto é, $P(A \cap B) = 0$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,3 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,2$

Assim, $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,3 = 0,7$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B) = 0,7 + 0 - 0,5 = 0,2$

OPÇÃO: A

Exame 2011, época especial

15. A e B são independentes então $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

Nas 7 cartas existem:

- 4 cartas do naipe de espadas, logo $P(A) = \frac{4}{7}$
- 2 reis, logo $P(B) = \frac{2}{7}$

Assim, $P(A) \times P(B) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{49}$

Temos ainda que $P(A \cap B)$ é a probabilidade de retirar o reio de espadas, isto é, existe apenas 1 carta cuja extração é favorável a este acontecimento, num conjunto de 7 possíveis, pelo que $P(A \cap B) = \frac{1}{7}$

Ora como $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$ pode-se afirmar que A e B não são independentes.

Teste Intermédio 12.º ano, janeiro 2011

16. Como $P(\overline{B}) = 0,3$, então $P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$

Assim,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,7 - 0,3 = 0,8$

OPÇÃO: D

Exame 2010, época especial

17. A probabilidade de uma das amigas telefonar à sua mãe é $P(A \cup B)$

Os acontecimentos A e B são independentes, logo $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Assim,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \times 0,8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,94$

Como o resultado pedido é em percentagem, tem-se que $P(A \cup B) = 94\%$

Exame 2010, época especial

18. A e B são acontecimentos incompatíveis, então $A \cap B = \varnothing$, ou seja, $P(A \cap B) = 0$

Como:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) + 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 70\% = 30\% + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 40\%$

OPÇÃO: B

Exame 2010, 1.ª fase

19. A e B são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$

Assim, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7$

OPÇÃO: B

Teste Intermédio 12.º ano, março 2010

20. Sabe-se que:

- $P(A) = 0,5$
- $P(B) = 0,7$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,5 + 0,7 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1,2 - P(A \cap B)$

Como $P(A \cup B) \leq 1$, então $P(A \cap B) > 0$, logo $A \cap B \neq \varnothing$, isto é, A e B são acontecimentos compatíveis.

OPÇÃO: B

Teste Intermédio 12.º ano, dezembro 2008

21. R e S são independentes se $P(R)\times P(S)=P(R\cap S)$

Por observação, o dado tem duas faces com os números todos iguais (número de casos favoráveis) num total de seis faces (número de casos possíveis). Assim, a probabilidade do acontecimento R é $P(R)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Da mesma forma, observa-se que o dado tem duas faces em que a soma dos três algarismos é 3 (1+1+1=3 e 2+1+0=3) num total de seis faces. Assim, a probabilidade do acontecimento S é $P(S)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Logo, $P(R)\times P(S)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

Tem-se ainda que o acontecimento $R\cap S$ corresponde a **«os números saídos são todos iguais, e a sua soma é igual a três»**, pelo que apenas existe uma face do dado (1+1+1=3) que corresponde ao acontecimento $R\cap S$

Portanto, $P(R\cap S)=\frac{1}{6}$

Conclui-se assim que $P(R)\times P(S)\neq P(R\cap S)$, isto é, os acontecimentos R e S não são independentes.

Teste Intermédio 12.º ano, dezembro 2008

22. Pretende-se calcular a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva.

Para se utilizar a igualdade $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)-P\left(\overline{B}\right)+P\left(A\cup B\right)$ vamos caracterizar os acontecimentos

- A: «O estudante escolhido ser rapaz»
- B: «O estudante escolhido ter tido classificação positiva»

Assim, $\overline{A}\cup\overline{B}$ é o acontecimento «o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva»

Tem-se que o número de casos possíveis é 160+120=280, correspondendo ao número total de estudantes que realizam o exame (160 raparigas e 120 rapazes).

O número de casos favoráveis para o acontecimento $\overline{A}$, correspondendo ao número de raparigas é $P\left(\overline{A}\right)=\frac{160}{280}$

O número de casos favoráveis para o acontecimento B é $160\times0,65+120\times0,6=176$, correspondendo a 65% das raparigas e 60% dos rapazes que tiveram positiva. Assim, $P\left(B\right)=\frac{176}{280}$

O número de casos favoráveis para o acontecimento $A\cup B$ é $120+160\times0,65=224$, correspondendo à soma do número de rapazes com 65% das raparigas que teve positiva. Assim, $P\left(A\cup B\right)=\frac{224}{280}$

Portanto, utilizando a igualdade sugerida:

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)-P\left(\overline{B}\right)+P\left(A\cup B\right)=\frac{160}{280}-\frac{176}{280}+\frac{224}{280}=\frac{208}{280}\approx0,74$$

Exame 2008, 2.ª fase

23. Tem-se que:

$$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\Leftrightarrow P\left(A\right)=P\left(A\cup B\right)-P\left(B\right)+P\left(A\cap B\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\right)=80\%-60\%+10\%=30\%$$

OPÇÃO: C

Exame 2008, 1.ª fase

24. Comecemos por definir os acontecimentos:

- X: «Tirar um iogurte de pêssego»
- Y: «Tirar um sumo de laranja»

Definidos os acontecimentos, temos que $a = P(X) = \frac{1}{5}$, $b = P(Y) = \frac{1}{3}$ e sabemos que X e Y são independentes.

Como a probabilidade de que não ocorra X nem ocorra Y é igual a $1 - a - b + a \times b$, temos que a probabilidade de, ao tirar, ao acaso, um iogurte e um sumo do frigorífico, e o iogurte não ser de pêssego e o sumo não ser de laranja é:

$$1 - a - b + a \times b = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$$

Exame 2007, 2.ª fase

25. A e B são acontecimentos se $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

Sabe-se que existem $9 \times 9 \times 9 = 9^3$ algarismos diferentes que se podem formar com os nove algarismos (casos possíveis).

A probabilidade dos acontecimentos A, B e $A \cap B$ é:

- A: «o número escolhido é múltiplo de 5»

Apenas os números cujo algarismo das unidades é 5, $9 \times 9 \times 1 = 9^2$ (casos favoráveis)

$$P(A) = \frac{9^2}{9^3} = \frac{1}{9}$$

- B: «o número escolhido tem os algarismos todos diferentes»

Existem $9 \times 8 \times 7$ números cujos algarismos são todos diferentes (casos favoráveis)

$$P(B) = \frac{9 \times 8 \times 7}{9^3} = \frac{56}{9^2}$$

- $A \cap B$: «Os números que são múltiplos de 5 e que são todos diferentes»

Existem $8 \times 7 \times 1$ números que são múltiplos de 5 e que são todos diferentes (casos favoráveis)

$$P(A \cap B) = \frac{8 \times 7}{9^3}$$

Assim, como $P(A) \times P(B) = \frac{1}{9} \times \frac{56}{9^2} = \frac{56}{9^3} = P(A \cap B)$

Os acontecimentos A e B são acontecimentos independentes.

Exame 2007, 1.ª fase

26. Tem-se que $(A \cup B) \cap C = \varnothing \Leftrightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing \Leftrightarrow A \cap C = \varnothing \wedge B \cap C = \varnothing$

Assim, como $A \cap C = \varnothing$, então $P(A \cap C) = 0$, pelo que

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0,21 + 0,47 = 0,68$

Exame 2007, 1.ª fase

27. Como $A \subset B$, então $A \cup B = B$, pelo que $P\left[(A \cup B) \cap \overline{B}\right] = P\left(B \cap \overline{B}\right) = P(\varnothing) = 0$

OPÇÃO: A

Teste Intermédio 12.º ano, dezembro 2006

28. Como A e B são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Substituindo os valores, temos que:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = P(A) \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{4}$

Assim, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

Teste Intermédio 12.º ano, dezembro 2006

29. Pretende-se que $P(A \cap B) = P(A)$, então $A \cap B = A$, isto é $A \subset B$

No âmbito da experiência descrita, pode-se definir, por exemplo, os acontecimentos A e B, nem impossíveis nem certos, tais que $A \neq B$ e $P(A \cap B) = P(A)$:

— A: o produto dos dois números saídos é 42

— B: o produto dos dois números saídos é um número par

Exame 2006, época especial

30. **Opção 1**: como todos os alunos da turma têm 16 ou 17 ou mais do que 17 anos, tem-se que $X \cup Y = \Omega$, pelo que $P(X \cup Y) = 1$ e assim $P(X \cup Y) < 1$ é falsa.

Opção 2: tem-se que os alunos da turma cuja idade é par ou um múltiplo de 4, são exatamente os mesmos cuja idade é par, pelo que $X \cup Y = X$, e assim a afirmação $P(X \cup Y) > P(X)$ é falsa.

Opção 3: como não existem raparigas de 18 anos na turma, tem-se que $X \cap Y = \varnothing$, pelo que $P(X \cap Y) = 0$ e assim a afirmação $P(X \cap Y) > 0$ é falsa

Logo, na **opção 4** as três afirmações são verdadeiras.

Exame 2006, 2.ª fase

31. Como $A = A \cup B \ \vee \ A \subset (A \cup B)$, então $P(A) \leq P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A \cup B) \geq P(A) \Leftrightarrow P(A) \geq 0,3$

Como

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - 0,3 \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 0,7$ e $\overline{A} = \overline{A} \cup B \ \vee \ \overline{A} \subset (\overline{A} \cup B)$, então

$P(\overline{A}) \leq P(\overline{A} \cup B) \Leftrightarrow P(\overline{A} \cup B) \geq P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\overline{A} \cup B) \geq 0,7$

Como $A \cap B = A \ \vee \ (A \cap B) \subset A$, então $P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq 0,3$

Como

$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ e $P(A \cap B) \leq 0,3$, vem que $P(\overline{A \cap B}) > 1 - 0,3 \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) > 0,7$

Assim temos que o único acontecimento que pode ter probabilidade inferior a 0,3 é o acontecimento $A \cap B$

OPÇÃO: C

Exame 2006, 1.ª fase

32. O acontecimento $A \cup B$ é: «selecionar uma rapariga ou um aluno que não usa óculos».

O acontecimento contrário de $A \cup B$ é: «selecionar um rapaz e um aluno que usa óculos», que, observando as opções, corresponde a: «o aluno é um rapaz e usa óculos

OPÇÃO: A

Exame 2005, época especial

33. Vamos recorrer a um contraexemplo para mostrar.

Consideremos a experiência aleatória de lançar um dado cúbico equilibrado e consideremos os acontecimentos:

— X: sair um número par

— Y: sair um número ímpar

Temos que $P(X \cap Y) = 0$, e $P(X) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e $P(Y) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, logo X e Y não são impossíveis.

OPÇÃO D

Exame 2005, 1.ª fase

34. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$

Substituindo os valores conhecidos, temos que:

$P(B) = 0,8 + 0,1 - 0,3 = 0,6$

Assim, $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,6 = 0,4$

OPÇÃO: D

Exame 2004, 2.ª fase

35. Dois acontecimentos A e B são incompatíveis se $A \cap B = \varnothing$, ou seja se $P(A \cap B) = 0$. Assim temos que

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dois acontecimentos A e $\overline{A}$ são contrários se $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1$

OPÇÃO: C

Exame 2004, 1.ª fase

36. Como o saco contém bolas azuis, brancas e pretas, ao retirar, ao acaso, uma bola do saco, ela pode ser qualquer uma das cores referidas.

Temos os seguintes acontecimentos:

- A – a bola retirada é azul
- B – a bola retirada é branca

Assim, o acontecimento contrário de A é o acontecimento $\overline{A}$ - a bola retirada não é azul, isto significa que a bola retirada é branca ou preta.

Da mesma forma, o acontecimento contrário de B é o acontecimento $\overline{B}$ - a bola retirada não é branca, isto é, a bola retirada é azul ou preta.

Opção A: Os acontecimentos A e B não são contrários, já se verificou que o contrário do acontecimento A é que a bola retirada seja branca ou preta e o acontecimento B é que a bola retirada seja branca.

Opção B: Os acontecimentos A e $\overline{B}$, também não são contrários. O acontecimento A é que a bola retirada seja azul e o acontecimento $\overline{B}$ é que a bola retirada seja azul ou preta.

Opção C: Os acontecimentos A e B não podem ocorrer em simultâneo, porque só é retirada uma bola, e cada bola só tem uma cor, pelo que são incompatíveis.

Opção D: Quando é retirada uma bola azul, é também **não branca** ($\overline{B}$), assim os acontecimentos A e $\overline{B}$ ocorrem em simultâneo, ou seja, não são incompatíveis.

OPÇÃO: C

Exame 2003, 1.ª fase – 2.ª chamada

37. Tem-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, então

$P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,8 - P(A \cap B)$

Como $P(A \cap B) \geq 0$, então $P(A \cup B) \leq 0,8$

Também, $(A \cap B) \subset A$, então $P(A \cap B) \leq P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) \leq 0,3$

Assim, $P(A \cup B) = 0,8 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) \geq 0,8 - 0,3 \Leftrightarrow P(A \cup B) \geq 0,5$

Logo pode-se afirmar que $0,5 \leq P(A \cup B) \leq 0,8$

OPÇÃO: C

Exame 2003, 1.ª fase – 1.ª chamada

38. Fazendo a contagem dos alunos que têm 16 anos ou são raparigas, tem-se 5 + 2 + 4 + 4 = 15 casos favoráveis, num total de 25 casos possíveis.

Recorrendo à Regra de Laplace, tem-se $P(\text{ter 16 anos ou ser uma rapariga}) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

Exame 2002, prova militares

39. Comece-se por definir os acontecimentos:

- A: «O António acerta no alvo»
- B: «O Belmiro acerta no alvo»

Como A e B são acontecimento independentes, tem-se que:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$

Como o alvo é atingido se ocorrer o acontecimento A ou o acontecimento B, tem-se que a probabilidade de o alvo ser atingido é

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,6 + 0,7 - 0,42 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,88$

OPÇÃO: B

Exame 2001, época especial

40. Comece-se por definir os acontecimentos:

- A: «A bola retirada é amarela»
- B: «A bola retirada tem o número 1»

Tem-se que a bola amarela número 1 estar no saco é equivalente a $P(A \cap B) > 0$

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,5$
- $P(B) = 0,25$
- $P(A \cup B) = 0,625$

Então, $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,5 + 0,25 - 0,625 = 0,125$

Logo, pode-se concluir que a probabilidade de extrair a bola amarela com o número 1 é superior a zero, isto é, a bola amarela com o número 1 está no saco.

Exame 2001, 1.ª fase – 1.ª chamada

41. Como $A \subset B$, então:

- $P(A) \leq P(B)$
- $(A \cap B) = A$, pelo que $P(A \cap B) = P(A)$ (e $P(A) \neq 0$ porque A não é um acontecimento impossível)
- $(A \cup B) = B$, pelo que $P(A \cap B) = P(B)$ (e $P(B) \neq 1$ porque não é um acontecimento certo)
- Como $P(A) \leq P(B)$, $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ e $P(B) = 1 - P(\overline{B})$ então

$$P(A) \leq P(B) \Leftrightarrow 1 - P(\overline{A}) \leq 1 - P(\overline{B}) \Leftrightarrow -P(\overline{A}) \leq -P(\overline{B}) \Leftrightarrow P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})$$

OPÇÃO: D

Prova modelo 2001

42. O acontecimento $A \cup B$ corresponde a «sair face ímpar ou número maior ou igual a 4», o que corresponde a verificar-se a ocorrência das faces 1, 3, 4, 5 ou 6.

Assim o acontecimento contrário de $A \cup B$ corresponde a «não sair uma das faces 1, 3, 4, 5 ou 6» o que significa «sair face 2»

OPÇÃO: C

Exame 2000, 1.ª fase – 1.ª chamada