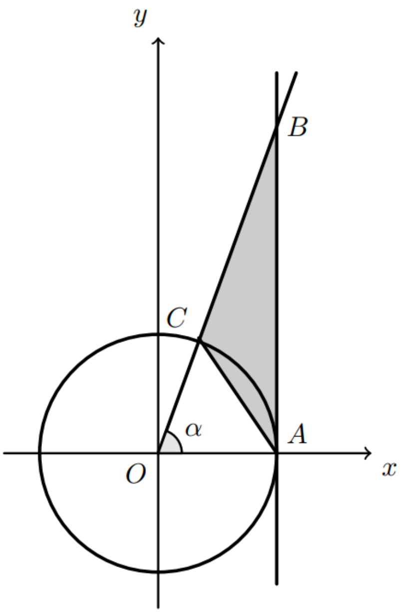
1. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica, o triângulo $[ABC]$ e a reta de equação $x=1$.



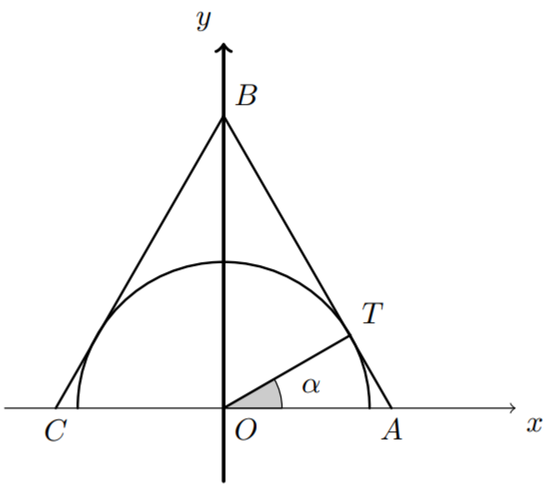
Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto B pertence à reta de equação $x=1$;
- C é o ponto de interseção da semirreta $\dot{O}B$ com a circunferência trigonométrica;
- $A\hat{O}B=\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ e $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Determine a área do triângulo $[ABC]$

Exame 2023, época especial

2. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. Oxy, uma semicircunferência de raio 2, e centro na origem do referencial, e o triângulo isósceles $[ABC]$.



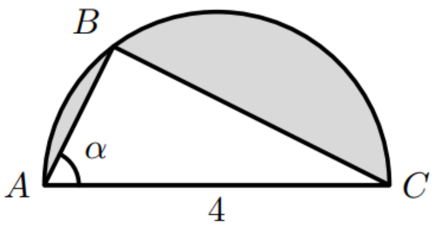
Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o vértice B pertence ao semieixo positivo Oy;
- o vértice C pertence ao semieixo negativo Ox;
- $\overline{AB}=\overline{BC}$;
- o lado $[AB]$ é tangente à semicircunferência no ponto T;
- $A\hat{O}T=\alpha$, $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada em função de α, por $\dfrac{4}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$

Exame 2023, 2.ª fase

3. Na figura ao lado, está representado um triângulo, $[ABC]$, inscrito numa semicircunferência de diâmetro $\overline{AC}=4$.



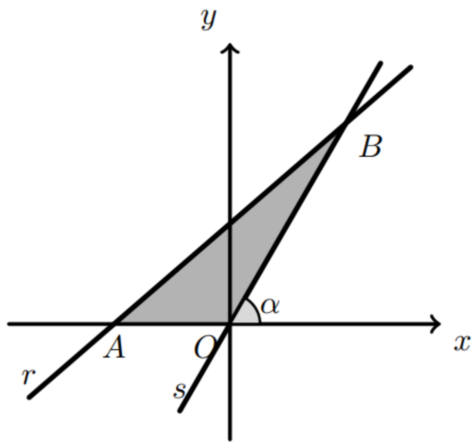
Seja α a amplitude do ângulo CAB.

Mostre que a área da região sombreada na figura é dada, em função de α, por

$$2\pi - 8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Exame 2022, época especial

4. Resolva este item sem recorrer à calculadora.



Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. Oxy, as retas r e s.

A reta r é definida pela equação $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+1$

A reta s passa pela origem do referencial e tem inclinação α.

O ponto A é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox.

O ponto B é o ponto de interseção das duas retas.

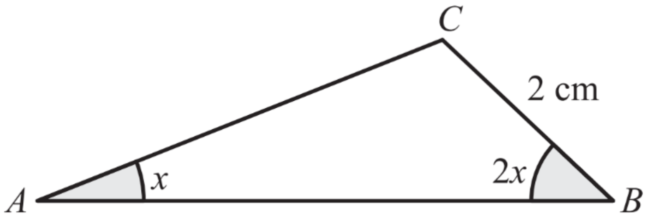
Sabe-se que $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Determine a área do triângulo $[AOB]$.

Exame 2022, 2.ª fase

5. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$.

Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo BAC.



Sabe-se que:

- $C\hat{B}A = 2x$
- $\overline{BC} = 2$ cm

Mostre que o comprimento de $[AB]$, em centímetros, é dado, para cada valor de x , pela expressão

$$8\cos^2 x - 2$$

Exame 2022, 1.ª fase

6. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. xOy, o arco de circunferência AB, contido no primeiro quadrante do plano cartesiano, cujo centro é a origem do referencial e cujo raio é igual a r $(r > 0)$.

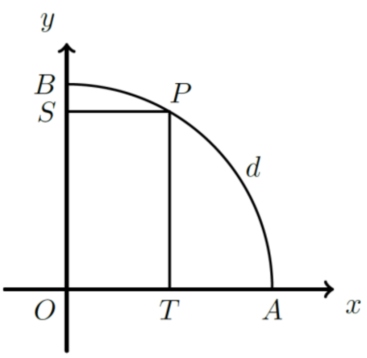
O ponto A pertence ao eixo Ox e o ponto B pertence ao eixo Oy

Seja P um ponto do arco AB, distinto de A e de B, e seja d o comprimento do arco AP

O ponto S pertence ao eixo das ordenadas e tem ordenada igual à do ponto P. O ponto T pertence ao eixo das abcissas e tem abcissa igual à do ponto P

Mostre que uma expressão que dá o valor de $\overline{BS} + \overline{TA}$, em função de d e de r, é

$$r\left(2 - \operatorname{sen}\left(\frac{d}{r}\right) - \cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$



Exame 2021, época especial

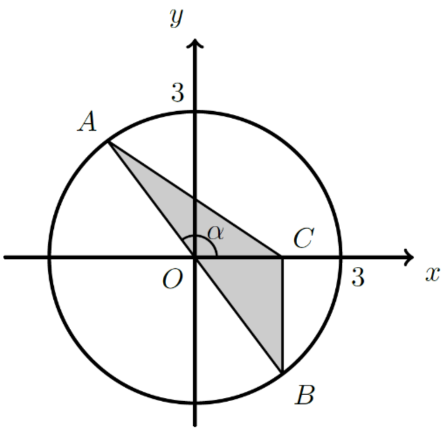
7. Sabe-se que $\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$ e que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$

Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{N}$

Exame 2021, 2.ª fase

8. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 3 e o triângulo $[ABC]$



Sabe-se que:

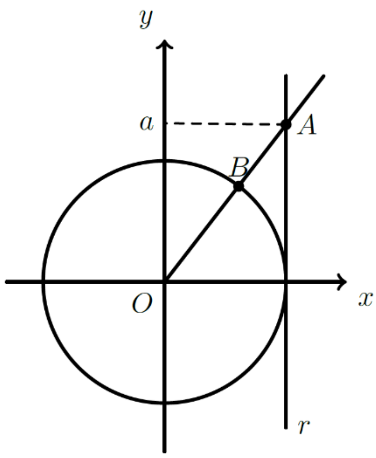
- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- α é a inclinação da reta AB, $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox
- a reta BC é paralela ao eixo Oy

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada pela expressão

$$-9 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

Exame 2021, 1.ª fase

9. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, a reta r de equação $x = 1$, e um ponto A, de ordenada a $(a > 1)$, pertencente à reta r



Está também representada a semirreta $\dot{O}A$, que intersecta a circunferência trigonométrica no ponto B

Qual das expressões seguintes dá, em função de a, a abcissa do ponto B?

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ **(B)** $\sqrt{a^2+1}$

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ **(D)** $\sqrt{a^2-1}$

Exame 2020, 1ª fase

10. Qual é o valor de $\operatorname{sen}\left(3\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 0 (D) 1

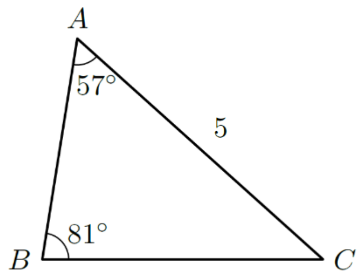
Exame 2020, 2ª fase

11. Qual é a solução da equação $2\cos x + 1 = 0$ no intervalo $[-\pi, 0]$?

(A) $-\dfrac{5\pi}{6}$ **(B)** $-\dfrac{2\pi}{3}$ **(C)** $-\dfrac{\pi}{3}$ **(D)** $-\dfrac{2\pi}{6}$

Exame 2019, 1.ª fase

12. Na figura ao lado, está representado um triângulo $[ABC]$



Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 5$
- $B\hat{A}C = 57°$
- $A\hat{B}C = 81°$

Qual é o valor de $\overline{AB}$, arredondado às centésimas ?

(A) 3,31 **(B)** 3,35 **(C)** 3,39 **(D)** 3,43

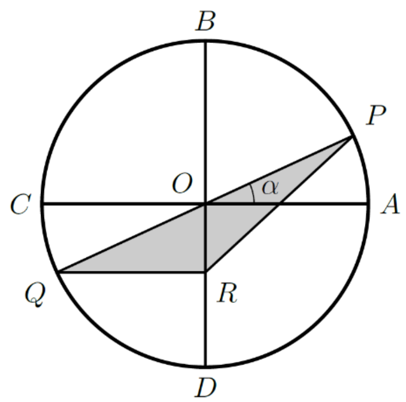
Exame 2018, 2.ª fase

13. Qual é o valor de $\operatorname{arcsen}(1) + \operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{7\pi}{6}$ **(B)** $\frac{\pi}{6}$ **(C)** $\frac{3\pi}{4}$ **(D)** $\frac{\pi}{4}$

Exame 2018, 1.ª fase

14. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1



Sabe-se que:

- os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- o ponto P pertence ao arco AB
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[QR]$ é paralelo a $[AC]$

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$;

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[PQR]$, representado a sombreado, em função de α ?

(A) $\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{4}$ **(B)** $\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$ **(C)** $2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(D)** $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

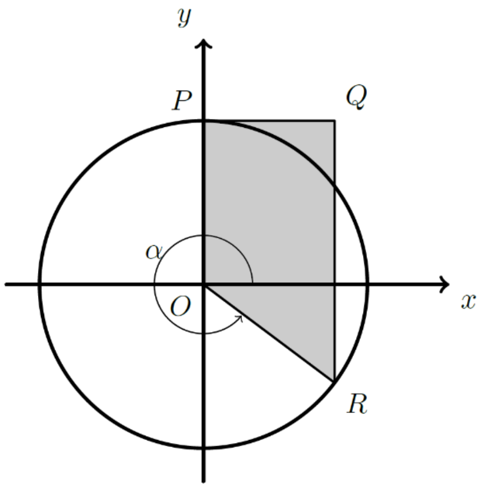
Exame 2016, 2.ª fase

15. Na figura ao lado, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo $[OPQR]$

Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas $(0,1)$
- o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$



Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio $[OPQR]$, em função de α ?

(A) $\dfrac{\cos\alpha}{2} + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(B)** $\dfrac{\cos\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(C) $\cos\alpha + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$ **(D)** $\cos\alpha - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$

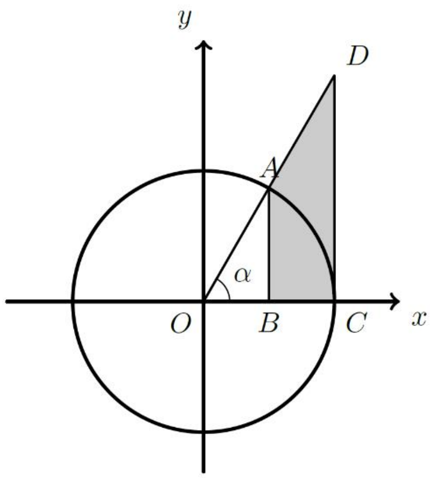
Exame 2016, 1.ª fase

16. Na figura ao lado, está representado o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o ponto C tem coordenadas $(1,0)$
- o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos ao eixo Oy

Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$



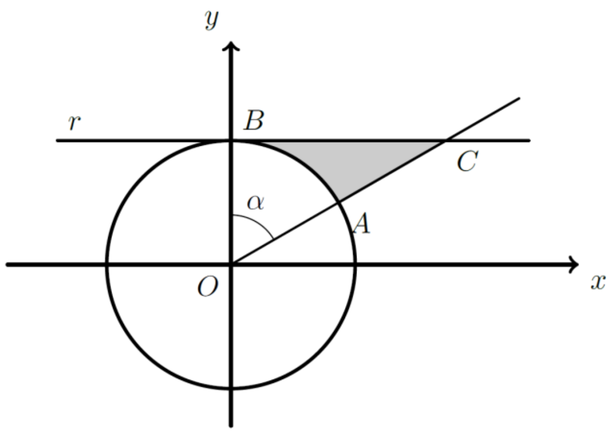
Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, em função de α ?

(A) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(B)** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$

(C) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(D)** $\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$

Exame 2015, 1.ª fase

17. Na figura ao lado, estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e a reta r



Sabe-se que:

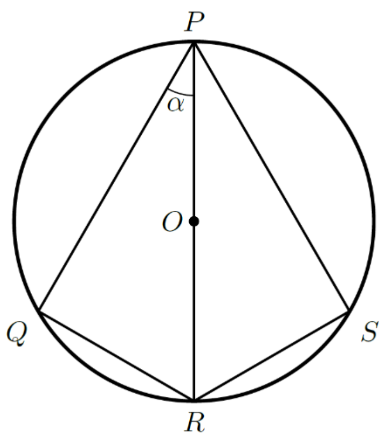
- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto B tem coordenadas $(0,1)$
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B
- o ponto C é o ponto de interseção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\frac{\operatorname{sen}\alpha - \alpha}{2}$ **(B)** $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \alpha}{2}$ **(C)** $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$ **(D)** $\frac{\alpha}{2}$

Exame 2014, época especial

18. Na figura ao lado, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S



Sabe-se que:

- os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;
- $[PR]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\overline{PQ} = \overline{PS}$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR
- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Mostre que a área do quadrilátero $[PQRS]$, é dada em função de α, pela expressão

$$16 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

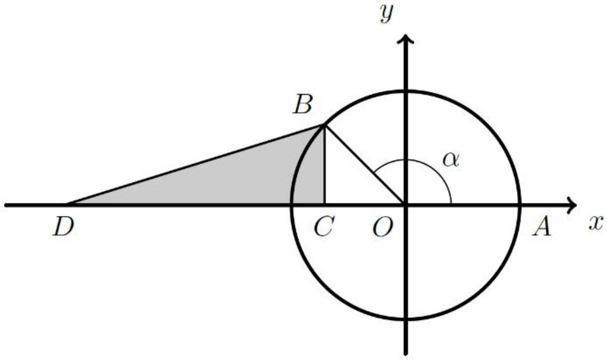
Para um certo número real θ, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\operatorname{tg}\theta = 2\sqrt{2}$
Determine o valor exato da área do quadrilátero $[PQRS]$ correspondente ao número real θ, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame 2014, 2.ª fase

19. Na figura seguinte, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio 1

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto A tem coordenadas $(1{,}0)$
- os pontos B e C têm a mesma abcissa;
- o ponto C tem ordenada zero;
- o ponto D tem coordenadas $(-3{,}0)$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$



Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área do triângulo $[BCD]$?

(A) $\frac{1}{2}(-3 - \operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$ **(B)** $\frac{1}{2}(-3 + \operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(C) $\frac{1}{2}(3 + \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$ **(D)** $\frac{1}{2}(3 - \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

Exame 2014, 1.ª fase

20. Qual das expressões seguintes designa um número real positivo, para qualquer x pertencente ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$?

(A) $\operatorname{sen} x + \cos x$ **(B)** $\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$ **(C)** $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$ **(D)** $\operatorname{sen} x \times \operatorname{tg} x$

Teste Intermédio 11.º ano, março 2014

21. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica $\operatorname{sen} x = 0{,}3$

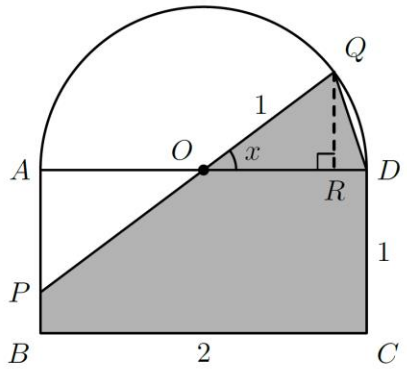
Quantas soluções tem esta equação no intervalo $[-20\pi, 20\pi[$?

(A) 20 **(B)** 40 **(C)** 60 **(D)** 80

Teste Intermédio 11.º ano, março 2014

22. Na figura ao lado, estão representados:

- o retângulo $[ABCD]$, em que $\overline{DC} = 1$ e $\overline{BC} = 2$
- o ponto O, ponto médio do segmento $[AD]$
- uma semicircunferência de centro no ponto O e raio 1



Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta AB, nunca coincidindo com A, mas podendo coincidir com B

Para cada posição do ponto P, seja Q o ponto de intersecção da reta PO com a semicircunferência.

Seja x a amplitude, em radianos, do ângulo DOQ $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$

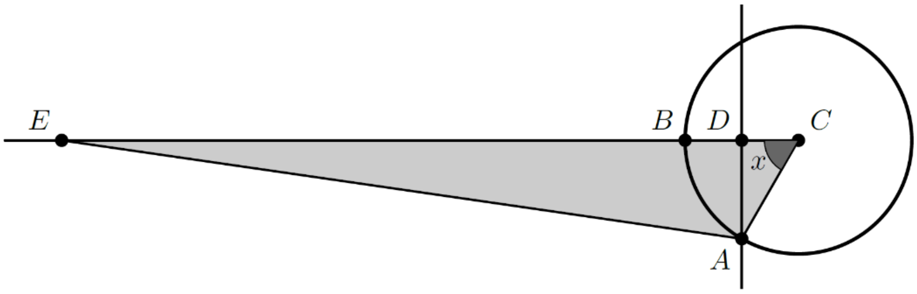
Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

22.1. Mostre que a área do polígono $[BCDQP]$, representado a sombreado, é dada, em função de x, por $2 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2}$

22.2. Para uma certa posição do ponto P, tem-se $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5}$
Determine, para essa posição do ponto P, a área do polígono $[BCDQP]$
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Teste Intermédio 11.º ano, março 2014

23. Na figura ao lado, estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta $\dot{C}B$, a reta AD e o triângulo $[ACE]$



Sabe-se que:

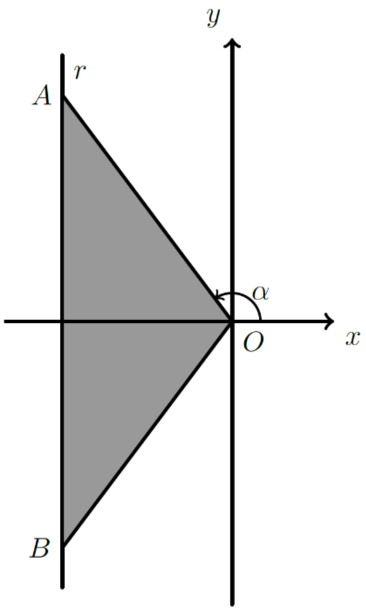
- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- os pontos D e E pertencem à semirreta $\dot{C}B$
- a reta AD é perpendicular à semirreta $\dot{C}B$
- o ponto A desloca-se sobre a circunferência, e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE} = 6$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Mostre que a área do triângulo $[ACE]$ é dada, em função de x, por $\frac{\operatorname{sen} x(6 + \cos x)}{2}$

Exame 2013, época especial

24. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, o triângulo $[OAB]$ e a reta r
Sabe-se que:

- a reta r é definida por $x = -3$
- o ponto A pertence à reta r e tem ordenada positiva;
- o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$



Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, pela expressão $-6\,\text{tg}\,\alpha - \dfrac{6}{\cos\alpha}$

Exame 2013, 2.ª fase

25. Considere o intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$

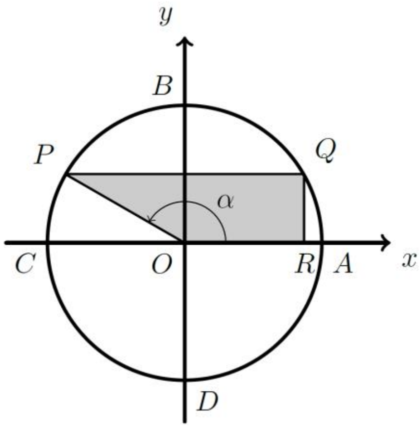
Qual das equações seguintes **não** tem solução neste intervalo?

(A) $\cos x = -0{,}5$ **(B)** $\text{sen}\, x = -0{,}5$ **(C)** $\cos x = -0{,}9$ **(D)** $\text{sen}\, x = -0{,}9$

Teste Intermédio 11.º ano, março 2013

26. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico.

Os pontos A, B, C e D são os pontos de intersecção da circunferência com os eixos do referencial.



Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco BC, nunca coincidindo com B nem com C
Para cada posição do ponto P, seja Q o ponto do arco AB que tem ordenada igual à ordenada do ponto P e seja R o ponto do eixo Ox que tem abcissa igual à abcissa do ponto Q

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$, $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

26.1. Mostre que a área do trapézio $[OPQR]$ é dada por $-\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

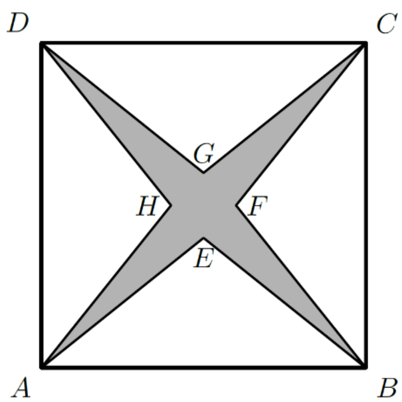
26.2. Para uma certa posição do ponto P, a reta OP intersecta a reta de equação $x = 1$ num ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$

Determine, para essa posição do ponto P, a área do trapézio $[OPQR]$
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Teste Intermédio 11.º ano, março 2013

27. Na figura ao lado, está representado o quadrado $[ABCD]$
Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$



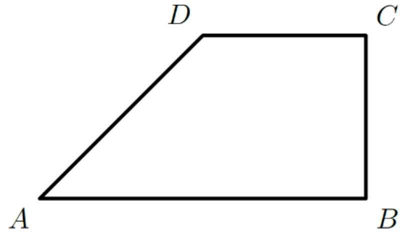
Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por

$$16(1 - \operatorname{tg} x)$$

Exame 2012, 2.ª fase

28. Na figura ao lado, está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$
Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 1$
- $\overline{CD} = 1$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

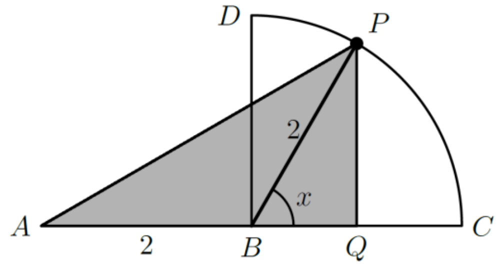


Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado, em função de α, por $3 + \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

Exame 2012, 1.ª fase

29. Relativamente à figura ao lado, sabe-se que:

- o segmento de reta $[AC]$ tem comprimento 4
- o ponto B é o ponto médio de $[AC]$
- o segmento de reta [BD] é perpendicular a $[AC]$
- o arco de circunferência CD tem centro em B



Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco CD, nunca coincidindo com C nem com D, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[BC]$ de tal forma que $[PQ]$ é sempre perpendicular a $[BC]$
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo CBP

Mostre que a área do triângulo $[APQ]$ é dada por $2\operatorname{sen} x(1 + \cos x)$ $\quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Teste Intermédio 12.º ano, maio 2012 (adaptado)

30. Seja θ um número real. Sabe-se que θ é uma solução da equação $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{3}$

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$?

(A) $\pi - \theta$ **(B)** $\pi + \theta$ **(C)** $\frac{\pi}{2} - \theta$ **(D)** $\frac{\pi}{2} + \theta$

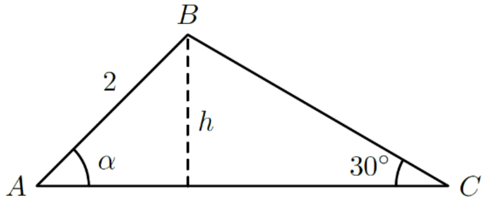
Teste Intermédio 11.º ano, fevereiro 2012

31. Considere o triângulo $[ABC]$ representado na figura seguinte.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2$
- $A\hat{C}B = 30°$

Seja $\alpha = B\hat{A}C$



Qual das expressões seguintes representa $\overline{BC}$, em função de α ?

(A) $4\,\text{sen}\,\alpha$ **(B)** $6\,\text{sen}\,\alpha$ **(C)** $4\cos\alpha$ **(D)** $6\cos\alpha$

Teste Intermédio 11.º ano, fevereiro 2012

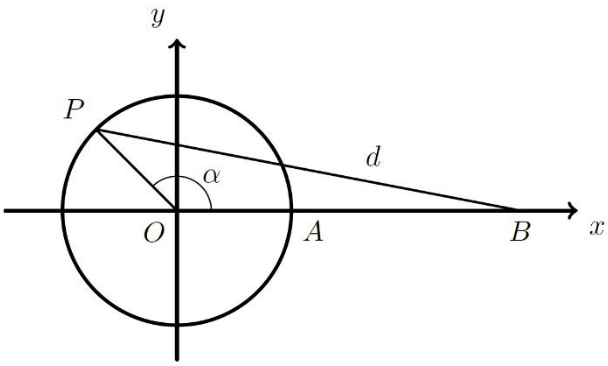
32. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$
- o ponto B tem coordenadas $(3,0)$

Considere que um ponto P se move sobre a circunferência.

Para cada posição do ponto P, seja $d = \overline{PB}$ e seja $\alpha \in [0,2\pi[$, a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$



Resolva os itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

32.1. Mostre que $d^2 = 10 - 6\cos\alpha$

Sugestão: Exprima as coordenadas do ponto P em função de α e utilize a fórmula da distância entre dois pontos.

32.2. Resolva os dois itens seguintes tendo em conta que $d^2 = 10 - 6\cos\alpha$

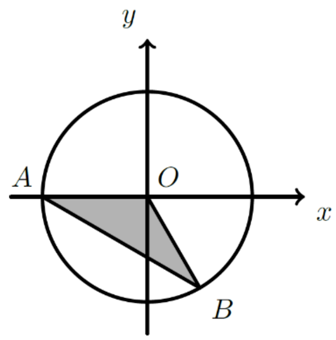
32.2.1. Determine os valores de $\alpha \in [0,2\pi[$, para os quais $d^2 = 7$

32.2.2. Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $[0,\pi]$, tem-se $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{35}$
Determine d, para esse valor de α

Teste Intermédio 11.º ano, fevereiro 2012

33. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o. n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$
Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto O e raio 1
- A é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$
- B pertence à circunferência e tem ordenada negativa;
- o ângulo AOB tem amplitude igual a $\frac{2\pi}{3}$ radianos.



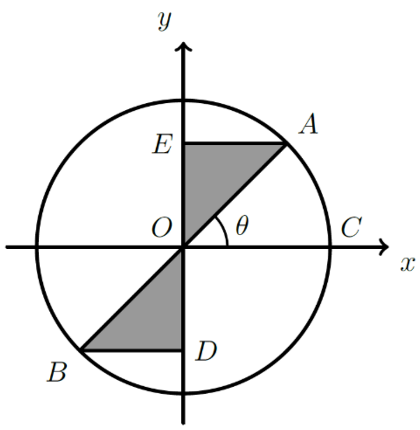
Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{\sqrt{1}}{2}$ **(C)** $\frac{\sqrt{1}}{4}$ **(D)** $\sqrt{3}$

Exame 2011, época especial

34. Na figura ao lado, está representado, num referencial o. n. xOy, um círculo trigonométrico.
Sabe-se que:

- C é o ponto de coordenadas (1,0)
- Os pontos D e E pertencem ao eixo Oy
- $[AB]$ é um diâmetro do círculo trigonométrico
- as retas EA e BD são paralelas ao eixo Ox
- θ é a amplitude do ângulo COA
- $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$



Qual das expressões seguintes dá a o perímetro da região sombreada na figura anterior?

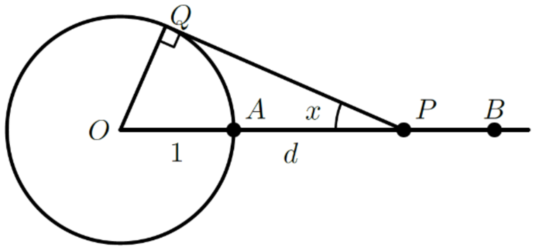
(A) $2(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$ **(B)** $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ **(C)** $2(1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$ **(D)** $1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

Exame 2011, 2.ª fase

35. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- os pontos O, A, e B são colineares;
- o ponto A está entre o ponto O e o ponto B
- o ponto P desloca-se ao longo da semirreta $\dot{A}B$, nunca coincidindo com o ponto A
- d é a distância do ponto A ao ponto P
- para cada posição do ponto P, o ponto Q é um ponto da circunferência tal que a reta PQ é tangente à circunferência;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo OPQ $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$



Sem recorrer à calculadora, mostre que $d = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2011

36. Determine o valor de $3 - \dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ sabendo que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e que $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\dfrac{4}{5}$

Resolva este item **sem recorrer à calculadora**.

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2011

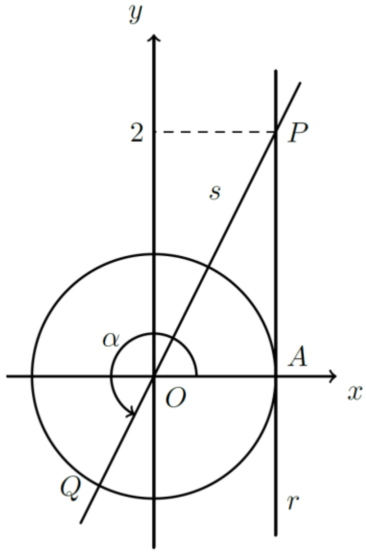
37. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica $\cos x = 0{,}9$

Em qual dos intervalos seguintes esta equação **não** tem solução?

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **(B)** $[0, \pi]$ **(C)** $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ **(D)** $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2011

38. Na figura ao lado, está representado o círculo trigonométrico.



Sabe-se que:

- a reta r é tangente à circunferência no ponto $A(1,0)$
- a reta s passa na origem do referencial e intersecta a reta r no ponto P, cuja ordenada é 2
- o ponto Q, situado no terceiro quadrante, pertence à reta s

Seja α a amplitude, em **radianos**, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}Q$

Qual é o valor de α, arredondado às centésimas?

(A) 4,23 **(B)** 4,25 **(C)** 4,27 **(D)** 4,29

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2011

39. Sejam α, β e θ três números reais.

Sabe-se que:

- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$
- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\alpha + \theta = 2\pi$

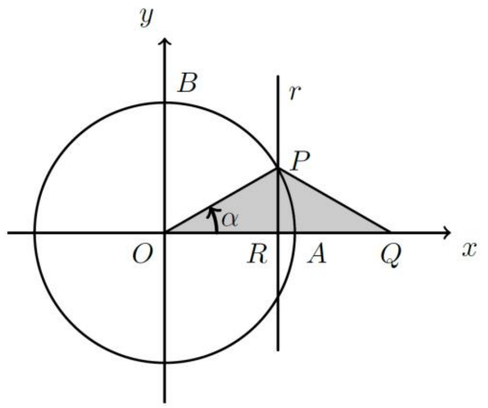
Qual das expressões seguintes é equivalente a $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\theta$?

(A) $2\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$ **(B)** $2\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$ **(C)** $-\cos\alpha$ **(D)** $\cos\alpha$

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2011

40. Na figura seguinte, está representada, em referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 5

Os pontos A e B são os pontos de intersecção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy, respetivamente.
Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B



Para cada posição do ponto P, sabe-se que:

- o ponto Q é o ponto do eixo Ox tal que $\overline{PO} = \overline{PQ}$
- a reta r é a mediatriz do segmento $[OQ]$
- o ponto R é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = 25 \operatorname{sen} x \cos x$

Resolva os itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

40.1. Mostre que a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por $f(\alpha)$

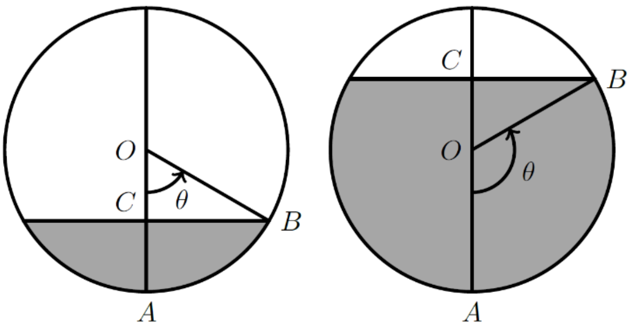
40.2. Determine o valor de α, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para o qual se tem $f(\alpha) = 25\cos^2\alpha$

40.3. Seja θ um número real, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tal que $f(\theta) = 5$
Determine o valor de $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2$

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2011

41. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.
As figuras seguintes representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas.
Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.
Sabe-se que:

- o ponto O é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente



A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ, por h, de domínio $[0,\pi]$

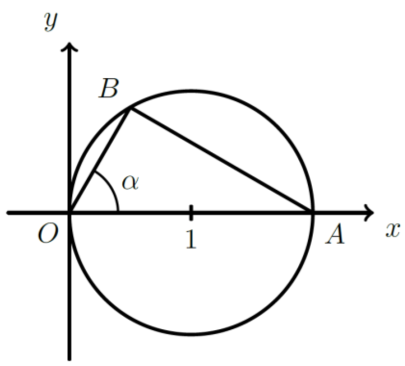
Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

41.1. Mostre que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, para qualquer $\theta \in]0,\pi[$

41.2. Resolva a condição $h(\theta) = 3,\ \theta \in]0,\pi[$
Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

Exame 2010, 2.ª fase

42. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.



Sabe-se que:

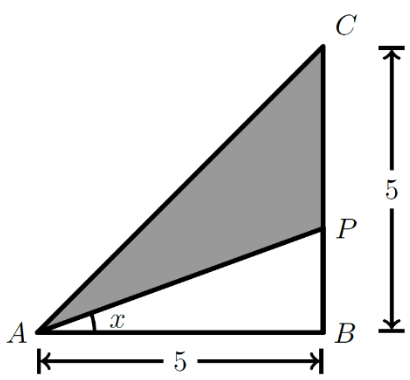
- a circunferência tem diâmetro $[OA]$;
- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.

Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por $2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$

Exame 2010, 1.ª fase

43. Na figura ao lado, está representado um triângulo retângulo $[ABC]$, cujos catetos $[AB]$ e $[BC]$, medem 5 unidades.
Considere que um ponto P se desloca sobre o cateto $[BC]$, nunca coincidindo com nem B com C
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAP $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$



Mostre, **usando exclusivamente métodos analíticos**, que para cada valor de x, o **perímetro** do triângulo $[APC]$ é dado por

$$\frac{5}{\cos x} - 5\operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$$

Teste Intermédio 12.º ano, maio 2010

44. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica E, de equação

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$$

Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o ponto P, de coordenadas $(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 2+\cos\alpha)$, pertence à superfície esférica E

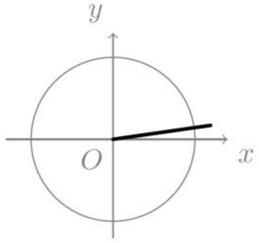
Determine os valores numéricos das coordenadas do ponto P

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2010

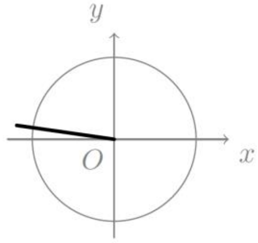
45. Em cada uma das figuras seguintes, está representado, no círculo trigonométrico, a traço grosso, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox

Em qual das figuras esse ângulo pode ter 3 radianos de amplitude?

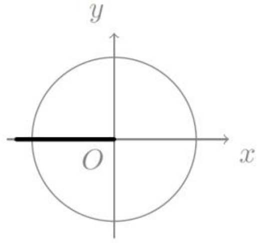
(A)



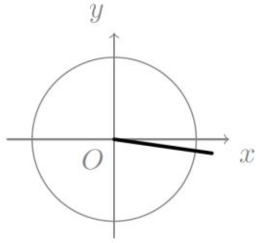
(B)



(C)



(D)



Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2010

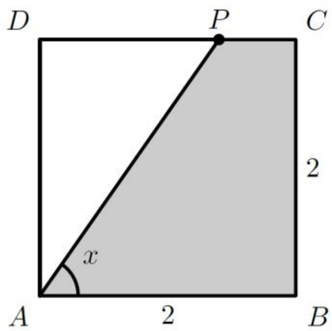
46. Considere a equação trigonométrica $\operatorname{sen} x = 0{,}1$

Em qual dos intervalos seguintes esta equação **não** tem solução?

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **(B)** $[0, \pi]$ **(C)** $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ **(D)** $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2010

47. Na figura ao lado, está representado o quadrado $[ABCD]$ de lado 2



Considere que um ponto P se desloca ao longo do lado $[CD]$, nunca coincidindo com o ponto C, nem com o ponto D

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAP $\left(x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Resolva os três itens seguintes, **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

47.1. Mostre que a área da região sombreada é dada por $4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$

47.2. Determine o valor de x para o qual a área da região sombreada é $\frac{12 - 2\sqrt{3}}{3}$

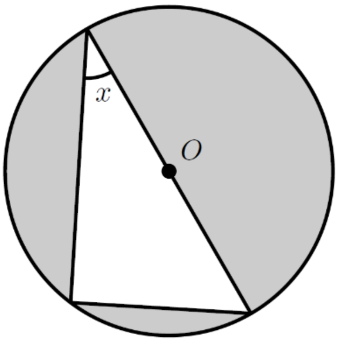
47.3. Para um certo valor de x, sabe-se que $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15}{17}$
Determine, para esse valor de x, a área da região sombreada.

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2010

48. Na figura ao lado, está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1.

Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência.

Qual das expressões seguintes representa, em função de x, a área da parte sombreada?



(A) $\pi - 2\operatorname{sen} x \cos x$ **(B)** $\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{sen} x \cos x$

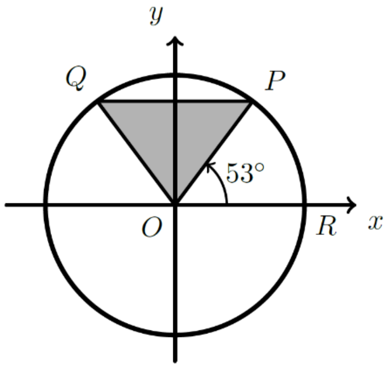
(C) $\pi - \operatorname{sen} x \cos x$ **(D)** $\pi - \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2}$

Exame 2009, 1.ª fase

49. Na figura ao lado está representado o círculo trigonométrico.

Os pontos P e Q pertencem à circunferência, sendo PQ a reta paralela ao eixo Ox. O ponto R pertence ao eixo Ox. O ângulo ROP tem 53° de amplitude.

Qual é o perímetro do triângulo $[OPQ]$ (valor aproximado às décimas) ?



(A) 3,2 **(B)** 3,4 **(C)** 3,6 **(D)** 3,8

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2009

50. A Inês olhou para o seu relógio quando este marcava 10 h e 45 min.
Passado algum tempo, ao ver novamente as horas, a Inês concluiu que o ponteiro dos minutos tinha rodado -3π radianos.

Que horas marcava o relógio da Inês, neste último instante?

(A) 11 h e 15 min **(B)** 11 h e 45 min **(C)** 12 h e 15 min **(D)** 13 h e 45 min

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2009

51. Considere a equação trigonométrica $\cos x = -0{,}3$

Num dos intervalos seguintes, esta equação tem **apenas uma** solução. Em qual deles?

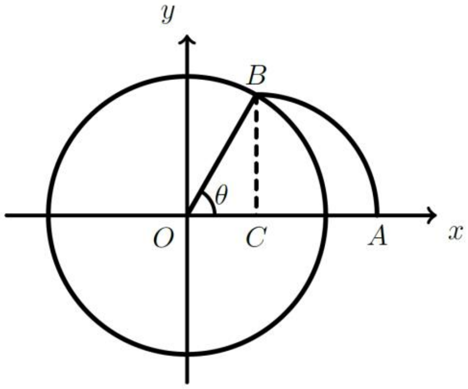
(A) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ **(B)** $[0, \pi]$ **(C)** $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ **(D)** $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2009

52. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy:

- o círculo trigonométrico
- o raio $[OB]$ deste círculo
- o arco de circunferência AB, de centro no ponto C

Tal como a figura sugere, o ponto B pertence ao primeiro quadrante, os pontos A e C pertencem ao eixo Ox e a reta BC é perpendicular a este eixo.



Seja θ a amplitude do ângulo AOB

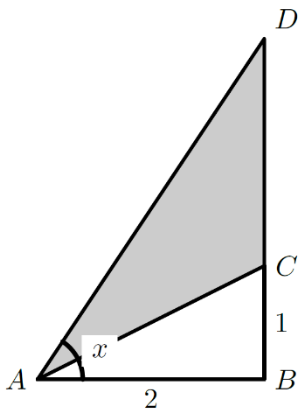
Qual é a abcissa do ponto A?

(A) $1+\operatorname{sen}\theta$ **(B)** $1+\cos\theta$ **(C)** $\cos\theta+\operatorname{sen}\theta$ **(D)** $1+\cos\theta+\operatorname{sen}\theta$

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2009

53. Relativamente à figura ao lado, sabe-se que:

- o triângulo $[ABD]$ é retângulo
- o ponto C pertence ao cateto $[BD]$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAD
- $\overline{AB}=2$ e $\overline{BC}=1$



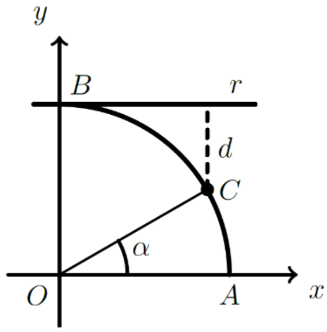
48.1. Mostre que a área do triângulo $[ACD]$ é dada por $2\operatorname{tg}x-1$

48.2. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[ACD]$ é igual a 1

48.3. Sabendo que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\frac{5}{13}$ e que $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, determine o valor de $2\operatorname{tg}a-1$

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2009

54. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. xOy, um arco de circunferência AB, de centro na origem do referencial e raio igual a 1
A reta r tem equação $y=1$
O ponto C pertence ao arco AB
Seja α a amplitude do ângulo AOC



Qual das expressões seguintes dá a distância d do ponto C à reta r?

(A) $1+\operatorname{sen}\alpha$ **(B)** $1-\operatorname{sen}\alpha$ **(C)** $1+\cos\alpha$ **(D)** $1-\cos\alpha$

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2008

55. Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) $\cos(\pi - x)$ **(B)** $\operatorname{sen}(\pi - x)$ **(C)** $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ **(D)** $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

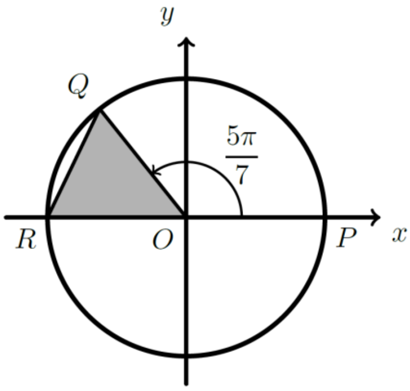
Teste Intermédio 11.º ano, maio 2008

56. Na figura ao lado está representado o círculo trigonométrico.

Tal como a figura sugere, O é a origem do referencial, Q pertence à circunferência, P é o ponto de coordenadas $(1,0)$ e R é o ponto de coordenadas $(-1,0)$

A amplitude, em radianos, do ângulo POQ é $\frac{5\pi}{7}$

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo $[OQR]$?

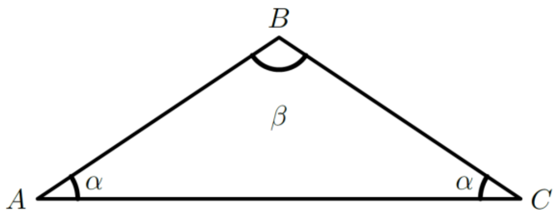


(A) 0,39 **(B)** 0,42 **(C)** 0,46 **(D)** 0,49

Teste Intermédio 12.º ano, abril 2008

57. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$ com dois ângulos de amplitude α e um ângulo de amplitude β

Qual das igualdades seguintes é verdadeira, para qualquer triângulo nestas condições?



(A) $\cos\beta = \operatorname{sen}(2\alpha)$ **(B)** $\cos\beta = \cos(2\alpha)$ **(C)** $\cos\beta = -\operatorname{sen}(2\alpha)$ **(D)** $\cos\beta = -\cos(2\alpha)$

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2008

58. Seja θ um valor pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Qual das expressões seguintes designa um número real positivo?

(A) $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$ **(B)** $\operatorname{sen}\theta \times \cos\theta$ **(C)** $\operatorname{sen}\theta \times \operatorname{tg}\theta$ **(D)** $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{tg}\theta$

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2008

59. Considere a equação $1 + 3\,\mathrm{tg}\,(2x) = 4$

Qual dos seguintes valores é solução desta equação?

(A) $-\frac{\pi}{8}$ **(B)** $\frac{3\pi}{8}$ **(C)** $\frac{5\pi}{8}$ **(D)** $\frac{7\pi}{8}$

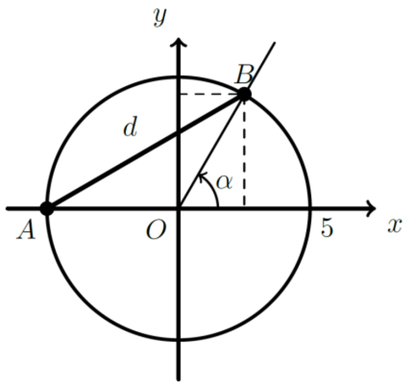
Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2008

60. Na figura seguinte estão representadas, em referencial o.n. xOy, uma reta e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5

Os pontos A e B pertencem à circunferência.
O ponto A também pertence ao eixo das abcissas.

Admita que o ponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.
Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}B$

Seja d o comprimento do segmento $[AB]$



55.1. Mostre que $d^2 = 50 + 50\cos\alpha$

55.2. Para uma certa posição do ponto B, tem-se $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{24}$
Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de d

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2008

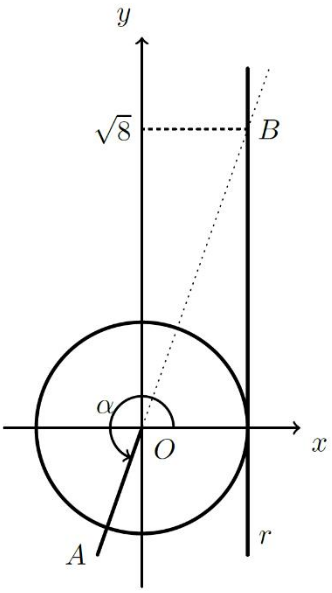
61. Indique as soluções da equação $5 + 2\cos x = 6$ que pertencem ao intervalo $]0,2\pi[$

(A) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ **(B)** $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ **(C)** $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ **(D)** $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2007

62. Na figura junta estão representados, em referencial o.n. xOy:

- o círculo trigonométrico
- a reta r, de equação $x = 1$
- o ângulo, de amplitude α, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$
- o ponto B, intersecção do prolongamento da semirreta $\dot{O}A$ com a reta r



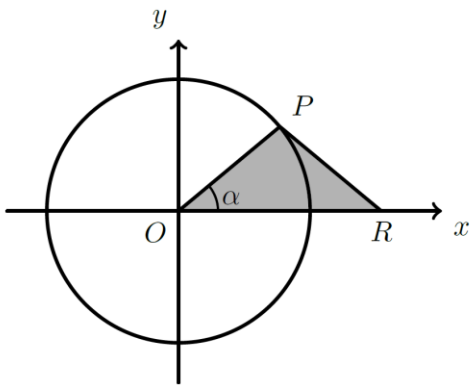
Como a figura sugere, a ordenada de é B é $\sqrt{8}$

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de

$$5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+2\cos(3\pi-\alpha)$$

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2007

63. Na figura seguinte está representado o círculo trigonométrico e um triângulo $[OPR]$



O ponto P desloca-se ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.
O ponto Q desloca-se ao longo do eixo Ox, de tal modo que o triângulo $[OPR]$ é sempre isósceles.
Sendo α a amplitude, em radianos, do ângulo ROP, qual das expressões seguintes dá a **área** do triângulo $[OPR]$, em função de α ?

(A) $\text{sen}\,\alpha\,.\cos\alpha$ **(B)** $2\,.\,\text{sen}\,\alpha\,.\cos\alpha$

(C) $\dfrac{1+\text{sen}\,\alpha\,.\cos\alpha}{2}$ **(D)** $\dfrac{(1+\cos\alpha)\,.\,\text{sen}\,\alpha}{2}$

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2006

64. Da amplitude α de um certo ângulo orientado sabe-se que $\cos\alpha < 0$ e $\text{tg}\,\alpha > 0$

Qual das expressões seguintes dá o valor de $\text{sen}\,\alpha$?

(A) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ **(B)** $-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ **(C)** $\sqrt{1+\cos^2\alpha}$ **(D)** $-\sqrt{1+\cos^2\alpha}$

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2006

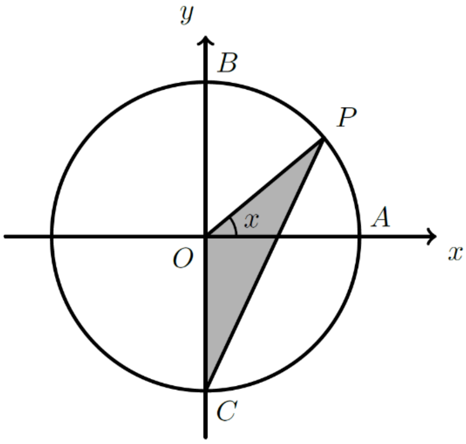
65. Sabe-se que $\beta \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{5}$

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\cos x = -\dfrac{1}{5}$?

(A) $\pi + \beta$ **(B)** $\dfrac{\pi}{2} + \beta$ **(C)** $-\beta$ **(D)** $\dfrac{\pi}{2} - \beta$

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2006

66. Na figura ao lado está representado o círculo trigonométrico.
Os pontos A, B e C têm coordenadas $(1{,}0)$, $(0{,}1)$ e $(0, -1)$, respetivamente.
O Ponto P desloca-se ao logo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto B.
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo AOP, e seja $f(x)$ a área do triângulo $[OPC]$.



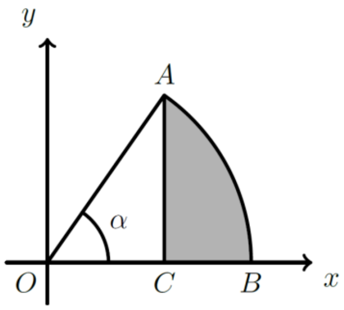
Qual das expressões seguintes define a função f ?

(A) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{2}$ **(B)** $\dfrac{\cos x}{2}$

(C) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2}$ **(D)** $\dfrac{\operatorname{sen} x . \cos x}{2}$

Exame 2006, época especial

67. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. xOy, um arco AB, que está contido na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.
O ponto C pertence ao eixo Ox e o segmento de reta $[AC]$ é perpendicular a este eixo.
α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB.
Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α?



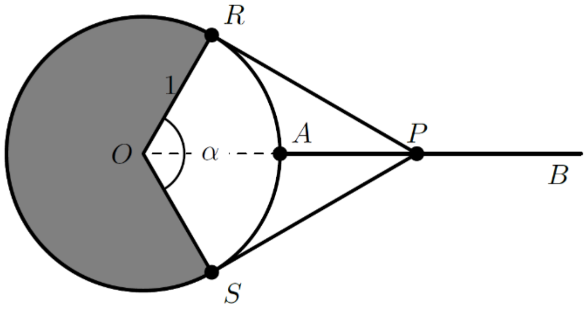
(A) $\pi \times \alpha + \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha$ **(B)** $\pi \times \alpha + \operatorname{sen} \alpha + 1 - \cos \alpha$

(C) $1 + \alpha - \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha$ **(D)** $1 + \alpha + \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha$

Exame 2006, 2.ª fase

68. Na figura ao lado, estão representadas uma semirreta $\dot{A}B$ e uma circunferência de centro O e de raio 1 (os pontos O, A e B são colineares; o ponto A pertence à circunferência.

Considere que o ponto P se desloca ao longo da semirreta $\dot{A}B$, nunca coincidindo com o ponto A.
Os pontos R e S acompanham o movimento do ponto P, de tal forma que as retas PR e PS são sempre tangentes à circunferência, nos pontos R e S, respetivamente.
Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo SOR ($\alpha \in]0,\pi[$)



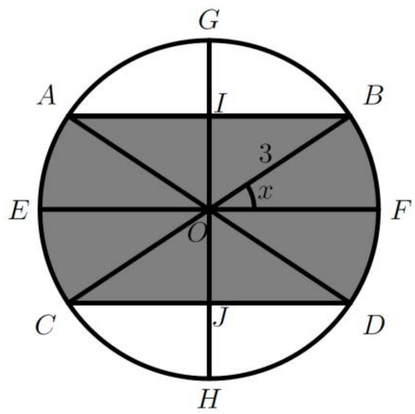
Mostre que a área do **quadrilátero** $[ORPS]$ é dada, em função de α, por tg $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Exame 2005, época especial

69. Na figura ao lado está representada uma circunferência com centro no ponto O e **raio 3**
Os diâmetros $[EF]$ e $[GH]$ são perpendiculares.

Considere que o ponto B se desloca sobre o arco FG.
Os pontos A, C e D acompanham o movimento do ponto B, de tal forma que:

- as cordas $[AB]$ e $[CD]$ permanecem paralelas a $[EF]$;
- $[AD]$ e $[BC]$ são sempre diâmetros da circunferência



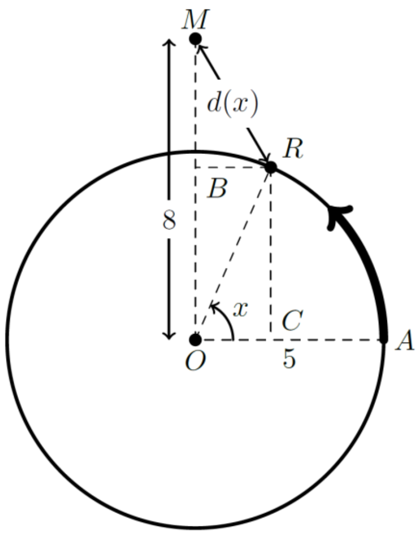
Os pontos I e J também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de interseção de $[GH]$ com $[AB]$ e $[CD]$, respetivamente.
Para cada posição do ponto B, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo FOB, $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x por $18(x + \operatorname{sen} x . \cos x)$

Sugestão: use a decomposição sugerida na figura.

Exame 2005, 1.ª fase

70. A Rita foi andar num carrossel. A figura ao lado ilustra a situação. Em cada volta, que se inicia no ponto A, a Rita descreve uma circunferência com 5 metros de raio, centrada no ponto O, rodando no sentido indicado na figura.
A mãe da Rita ficou a observá-la de um ponto M, situado à distância de 8 metros de O e tal que o ângulo AOM é reto.
Para cada posição R, da Rita, fica determinado um ângulo de amplitude x, medida em radianos, que tem como lado origem a semirreta $\dot{O}A$ e como lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$.

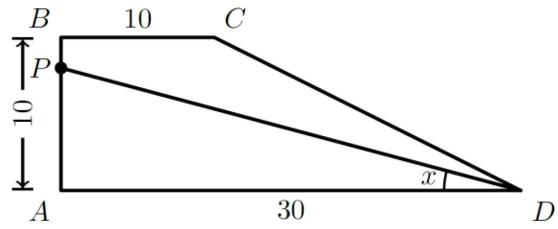


Mostre que, para cada valor de x, a distância $d(x)$, da Rita à mãe, é dada, em metros, por

$$\sqrt{89 - 80 \operatorname{sen} x}$$

Exame 2003, Prova de Militares

71. Na figura ao lado está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$, cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento.
Considere que um ponto P se desloca sobre o segmento $[AB]$.
Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA.
Pretende-se determinar o valor de x para o qual o segmento $[PD]$ divide o trapézio em duas figuras com a mesma área.
Qual das equações seguintes traduz este problema?



(A) $\dfrac{30^2 \operatorname{sen} x}{2} = 100$ **(B)** $\dfrac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$

(C) $\dfrac{30 \times 10 \operatorname{sen} x}{4} = 150$ **(D)** $\dfrac{30 \times 10 \operatorname{tg} x}{4} = 150$

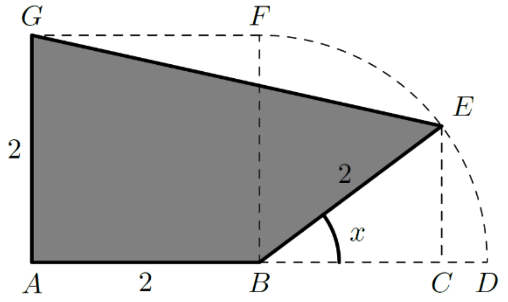
Exame 2003, 2.ª fase

72. Considere $\theta \in \mathbb{R}$. Sabendo que $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{1}{2}$, **sem recorrer à calculadora**, calcule o valor de $2 - 5 \operatorname{sen}^2 \theta$

Exame 2003, 1.ª fase (2.ª chamada)

73. Na figura ao lado está representado a sombreado um polígono $[ABEG]$.
Tem-se que:

- $[ABFG]$é um quadrado de lado 2
- FD é um arco de circunferência de centro em B; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento $[BD]$, de tal forma que se tem sempre $[EC] \perp [BD]$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$



73.1. Mostre que a área do polígono $[ABEG]$ é dada, em função de x, por $2(1 + \operatorname{sen} x + \cos x)$
(Sugestão: pode ser-lhe útil considerar o trapézio $[ACEG]$)

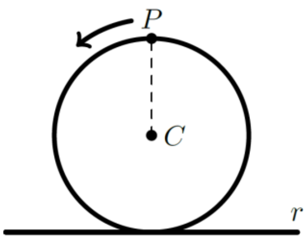
73.2. Determine a área do trapézio para $x = 0$ e para $x = \frac{\pi}{2}$
Interprete geometricamente cada um dos valores obtidos.

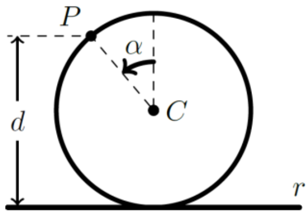
Exame 2003, 1.ª fase (1.ª chamada)

74. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma reta r.
Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se à distância de duas unidades da reta r.

Seja d a distância de P a r, após uma rotação de amplitude α.

Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer número real positivo α?



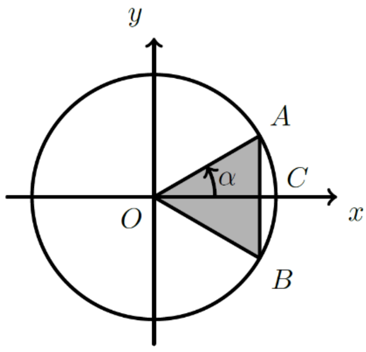


(A) $d = 1 + \cos\alpha$ **(B)** $d = 2 + \operatorname{sen}\alpha$

(C) $d = 1 - \cos\alpha$ **(D)** $d = 2 - \operatorname{sen}\alpha$

Exame 2002, 2.ª fase

75. Na figura ao lado estão representados, em referencial o. n. xOy, o círculo trigonométrico e um triângulo $[OAB]$.
Os pontos A e B pertencem à circunferência.
O segmento $[AB]$ é perpendicular ao semieixo positivo Ox.
O ponto C é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox.
Seja α a amplitude do ângulo COA $\quad \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[OAB]$, em função de α?



(A) $\operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha$ **(B)** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \cos\alpha}{2}$

(C) $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\alpha$ **(D)** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\alpha}{2}$

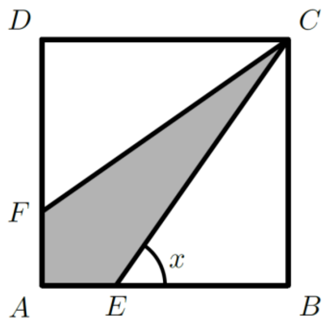
Exame 2002, 1.ª fase (2.ª chamada)

76. Na figura ao lado está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado 1.

O ponto E desloca-se sobre o lado $[AB]$ e o ponto F desloca-se sobre o lado $[AD]$, de tal forma que se tem sempre $\overline{AE} = \overline{AF}$.

Para cada posição do ponto E, seja a x amplitude do ângulo BEC $\left(x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que o **perímetro** do quadrilátero $[CEAF]$ é dado, em função de x, por $2 - \dfrac{2}{\operatorname{tg} x} + \dfrac{2}{\operatorname{sen} x}$



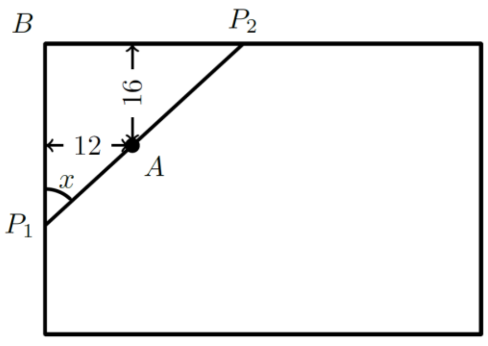
Exame 2002, 1.ª fase (1.ª chamada)

77. Na figura ao lado está representado um lago artificial de forma retangular.

Pretende-se construir uma ponte, ligando duas margens do lago, entre os pontos P_1 e P_2, tal como a figura ilustra.

A ponte tem um ponto de apoio A, situado a 12 m de uma das margens e a 16 m da outra.

Seja x a amplitude do ângulo P_2P_1B.



77.1. Mostre que o comprimento da ponte, em metros, é dado por $\dfrac{16 \operatorname{sen} x + 12 \cos x}{\operatorname{sen} x \,.\, \cos x}$

77.2. Considerando que a localização de P_1 e P_2 pode variar, determine o comprimento da ponte para o qual se tem $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$
Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

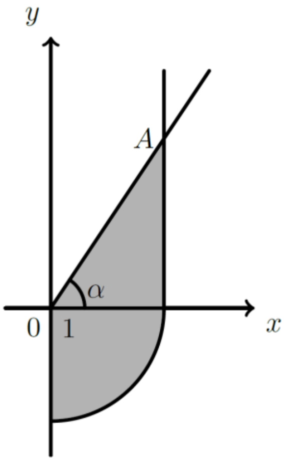
Exame 2001, época especial

78. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy:

- um quarto de círculo, de centro na origem e raio 1
- uma semirreta paralela ao eixo Oy, com origem no ponto (1,0)
- um ponto A, pertencente a esta semirreta
- um ângulo de amplitude α, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$

Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de α ?

(A) $\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$ **(B)** $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}$ **(C)** $\pi + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$ **(D)** $\pi + \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}$



Exame 2001, 1.ª fase (2.ª chamada)

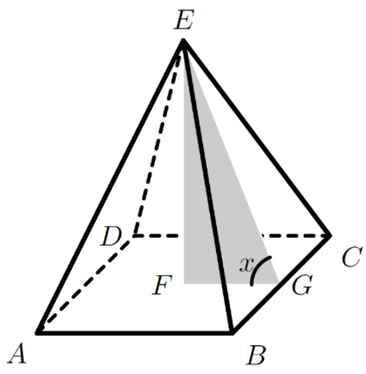
79. Na figura ao lado está representada uma pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide tem centro F e lado 2
- G é o ponto médio da aresta BC
- x designa a amplitude do ângulo FGE

Mostre que a a área total da pirâmide é dada, em função de x, por

$$\frac{4\cos x + 4}{\cos x} \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$



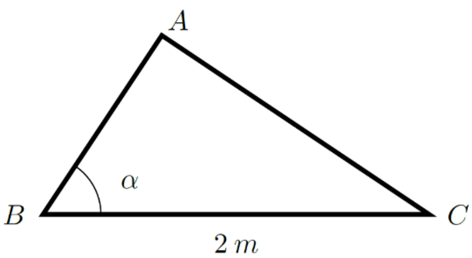
Exame 2001, 1.ª fase (1.ª chamada)

80. Na figura ao lado está representado um triângulo retângulo $[ABC]$, cuja hipotenusa mede $2\,m$.

Qual das expressões seguintes dá a área (em m^2) do triângulo $[ABC]$, em função da amplitude, α, do ângulo ABC?

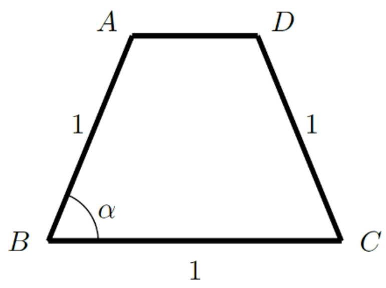
(A) $2.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha$ **(B)** $2.\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{tg}\alpha$

(C) $4.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha$ **(D)** $4.\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{tg}\alpha$



Exame 2001, Prova para Militares

81. Na figura ao lado está representado o trapézio isósceles $[ABCD]$ (os lados $[AD]$ e BC são paralelos).



Tem-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$
- $\overline{AD} \leq 1$

Seja α a amplitude do ângulo ABC, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

81.1. Mostre que, para cada $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, a área do trapézio é igual a $(\operatorname{sen}\alpha)(1 - \cos\alpha)$

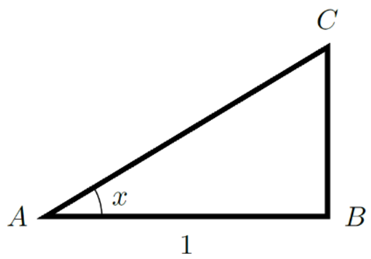
81.2. Determine a área do trapézios para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e interprete geometricamente o resultado obtido, caracterizando o quadrilátero que se obtém neste caso.

Exame 1999, Prova modelo

82. Considere um triângulo retângulo $[ABC]$, cujos catetos são $[AB]$ e $[BC]$
Admita que se tem $\overline{AB} = 1$ e que x designa a amplitude do ângulo BAC

82.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[ABC]$ é dado, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, por

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}$$

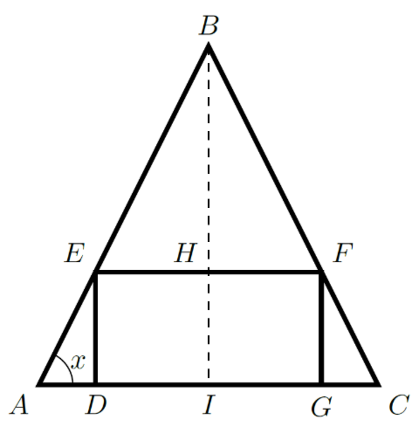


82.2. Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$
Determine o valor do perímetro do triângulo $[ABC]$ para este valor de α

Exame 1998, Prova para militares

83. Na figura ao lado

- o triângulo $[ABC]$ é isósceles $(\overline{AB} = \overline{BC})$
- $[DEFG]$ é um retângulo
- $\overline{DG} = 2$
- $\overline{DE} = 1$
- x designa a amplitude do ângulo BAC



Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por

$$2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \qquad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

(Nota: Pode ser-lhe útil reparar que $B\hat{E}F = B\hat{A}C$)

Exame 1998, 2.ª fase

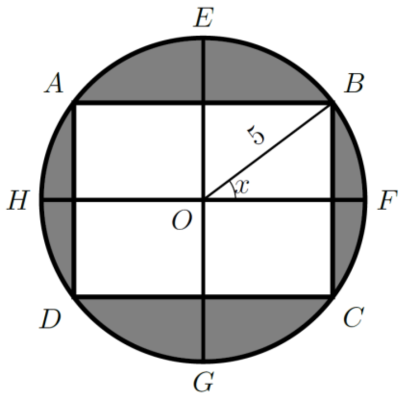
84. A figura ao lado representa um canteiro de forma circular com $5\,m$ de raio.

O canteiro tem uma zona retangular, que se destina à plantação de flores, e uma zona relvada, assinalada a sombreado na figura.

Os vértices A, B, C e D do retângulo pertencem à circunferência que limita o canteiro.

Na figura também estão assinalados:

- dois diâmetros da circunferência, $[EG]$ e $[HF]$, que contêm os pontos médios dos lados do retângulo
- o centro O da circunferência
- o ângulo BOF, de amplitude x $\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$



Mostre que a área (em m^2) da zona relvada é dada por $25(\pi - 4\,\text{sen}\,x.\cos x)$

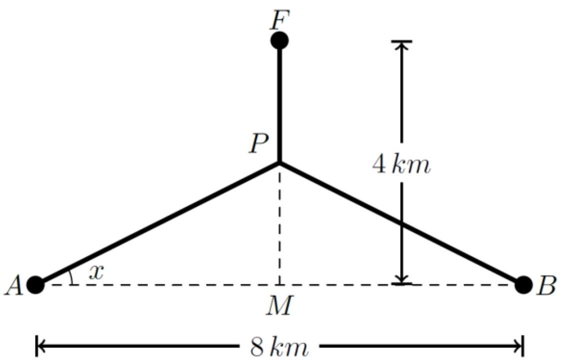
Exame 1998, 1.ª fase (2.ª chamada)

85. Duas povoações, A e B, distanciadas $8\,km$ uma da outra estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F.

Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura ao lado. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até um ponto P e dois que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.

Tem-se ainda que

- o ponto M, ponto médio de $[AB]$, dista $4\,km$ de F;
- x é amplitude do ângulo PAM $\left(x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)$



85.1. Tomando para unidade o quilómetro, mostre que o comprimento total da canalização é dado por

$$4 + \frac{8 - 4\,\text{sen}\,x}{\cos x}$$

(Sugestão: Comece por mostrar que $\overline{PA} = \dfrac{4}{\cos x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4\,\text{tg}\,x$)

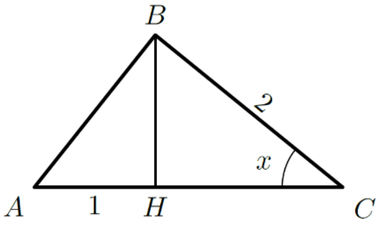
85.2. Calcule o comprimento total da canalização para $x = 0$ e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

Exame 1998, 1.ª fase (1.ª chamada)

86. Na figura seguinte está representado um triângulo triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- x é a amplitude do ângulo BCA;
- $\overline{BC} = 2$
- $[BH]$ é a altura relativa ao vértice B;
- $\overline{AH} = 1$



Mostre que a área de um triângulo $[ABC]$ é dada, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, por $\operatorname{sen} x(1 + 2\cos x)$

Exame 1998, Prova Modelo