1. Um tanque que inicialmente tinha um certo volume de água salgada, dispõe de duas torneiras, uma de enchimento e outra de vazamento. As duas torneiras são abertas, em simultâneo, sendo vertida água do mar para o tanque até estar cheio.

Admita que a massa de sal, m, em quilogramas, no tanque, t minutos após a abertura das torneiras, até o tanque estar cheio, é dada por

$$m(t)=\frac{30(1+0,006t)^3-29}{(1+0,006t)^2}, \text{ com } t\in[0,\ 250]$$

1.1. Qual é, com aproximação às unidades, a percentagem de aumento da massa de sal no tanque, no primeiro minuto após a abertura das torneiras?

(A) 152% (B) 52% (C) 250% (D) 25%

1.2. Existe um instante a partir do qual, passada meia hora, a massa do sal no tanque triplica.

Determine, recorrendo à calculadora, esse instante, sabendo-se que existe e é único.

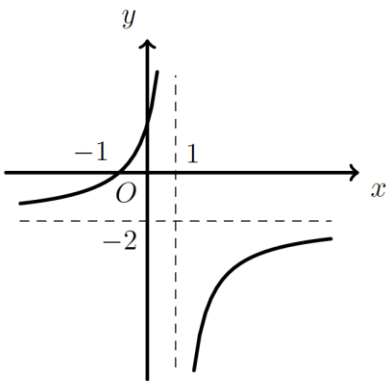
Apresente o resultado em minutos e segundos (com os segundos arredondados às unidades).

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) pontos(s) relevante(s) arredondado(s) às centésimas.

Exame 2022, 2.ª fase

2. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f



O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1

As retas de equações $x = 1$ e $y = -2$ são as assíntotas do gráfico da função f

Qual é o conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$?

(A) $]-\infty,-2[\cup]-2,0]$ **(B)** $]-\infty,-1]\cup]0,+\infty[$

(C) $]-\infty,0]\cup]1,+\infty[$ **(D)** $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$

Teste Intermédio 11.º Ano – março 2014

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 13 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2x-3}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

2.1. Resolva analiticamente, em $]1, +\infty[$, a condição $f(x) < \frac{1}{x-2}$

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

2.2. Considere, para cada número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = kx + 2$

Determine o valor de k para o qual se tem $(g \circ f)(-3) = 6$

2.3. Determine o contradomínio da função f

Para resolver este item, **recorra à calculadora gráfica**.
Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função f que visualizar na calculadora (sugere-se a utilização da janela em que $x \in [-5,5]$, $y \in [-15,10]$; nesse referencial:
  - assinale o ponto do gráfico de abcissa 1 e indique a sua ordenada
  - represente as assíntotas do gráfico de f
  - assinale o ponto do gráfico correspondente ao máximo relativo da função
- apresentar o contradomínio da função f , usando a notação de intervalos de números reais.

Teste Intermédio 11.º Ano – março 2014

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Considere a função g definida por $g(x) = f(x+a) + k$, com $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$

Sabe-se que as retas de equações $x = -2$ e $y = 2$ são assíntotas do gráfico de g

Quais são os valores de a e de k?

(A) $a = 1$ e $k = -2$ **(B)** $a = 1$ e $k = 2$ **(C)** $a = -1$ e $k = -2$ **(D)** $a = -1$ e $k = 2$

Teste Intermédio 11.º Ano – março 2013

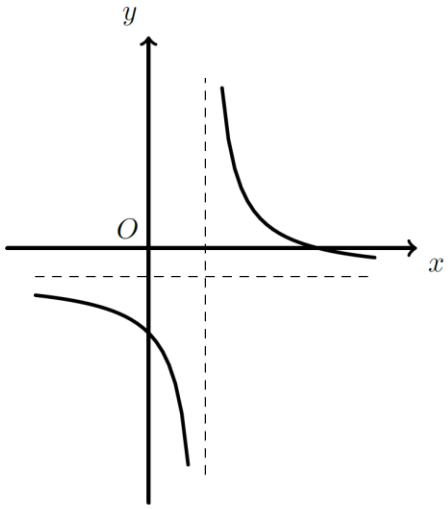
5. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

As retas de equações $x = 2$ e $y = -1$ são as assintotas do gráfico da função f

4.1. Responda aos dois itens seguintes sem apresentar cálculos.

4.1.1. Qual é o valor de k para o qual a equação $f(x) = k$ é impossível?

4.1.2. Qual é o limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$?



4.2. Admita agora que a função f é definida pela expressão $f(x) = \dfrac{6-x}{x-2}$

4.2.1. Resolva analiticamente a condição $f(x) \leq \dfrac{4-x}{x+2}$

Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

4.2.2. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^3$

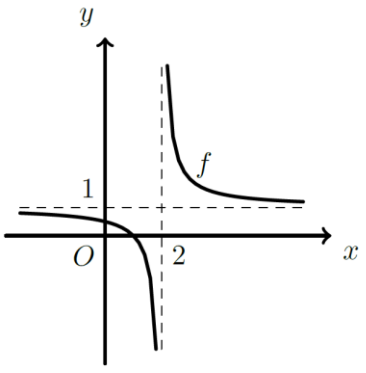
A equação $(f \circ g)(x) = x$ tem exatamente duas soluções.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, essas soluções.
Apresente as soluções arredondadas às centésimas.
Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);
- assinalar os pontos relevantes para responder à questão colocada.

Teste Intermédio 11.º Ano – março 2013

6. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f



As retas de equações $x = 2$ e $y = 1$ são as assíntotas do gráfico da função f

Para um certo número real k, a função g, definida por $g(x) = f(x) + k$, não tem zeros.

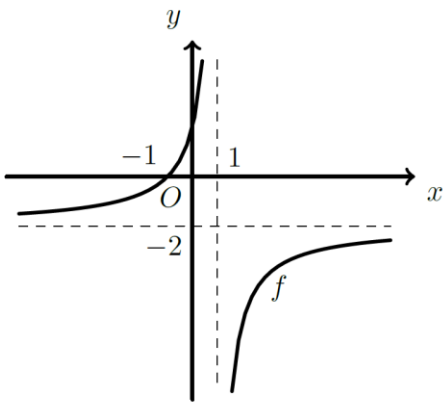
Qual é o valor de k?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** -2 **(D)** 2

Teste Intermédio 11.º Ano – fevereiro 2012

7. Na figura seguinte, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f

O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1
As retas de equações $x = 1$ e $y = -2$ são as assíntotas do gráfico da função f



6.1. Responda aos dois itens seguintes sem efetuar cálculos, ou seja, recorrendo apenas à leitura do gráfico.

6.1.1. Indique o contradomínio da função f

6.1.2. Apresente, usando a notação de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$

6.2. Defina, por uma expressão analítica, a função f

Teste Intermédio 11.º Ano – fevereiro 2012

8. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + 1$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por $g(x) = \frac{1}{x}$

Para um certo número real a, tem-se $(g \circ h)(a) = \frac{1}{9}$
(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

Qual é o valor de a ?

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10

Teste Intermédio 11.º Ano – maio 2011

9. Considere:

- a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 11$
- a função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Seja P o ponto de interseção das assintotas do gráfico da função g
Para um certo número real k, o ponto P pertence ao gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) + k$

Determine, utilizando métodos exclusivamente analíticos, o valor de k

Teste Intermédio 11.º Ano – maio 2011

10. Num certo ecossistema habitam as espécies animais A e B.

Admita que, t anos após o início do ano 2009, o número de animais, em **milhares**, da espécie A é dado aproximadamente por

$$A(t) = \frac{11t+6}{t+1}, \ (t \geq 0)$$

e que o número de animais, em **milhares**, da espécie B é dado aproximadamente por

$$B(t) = \frac{t+9}{t+3}, \ (t \geq 0)$$

Resolva os dois itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

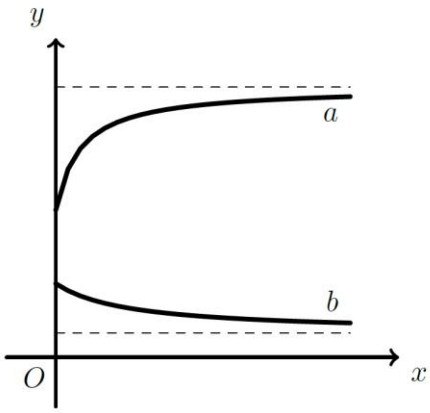
9.1. Desde o início do ano 2009 até ao início do ano 2010, morreram 500 animais da espécie A.

Determine quantos animais dessa espécie nasceram nesse intervalo de tempo.

9.2. Na figura ao lado, estão representadas graficamente as funções a e b

Tal como estes gráficos sugerem, a **diferença** entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B vai aumentando, com o decorrer do tempo, e tende para um certo valor.

Determine esse valor, recorrendo às assimptotas horizontais dos gráficos das funções e cujas equações deve apresentar.



Teste Intermédio 11.º Ano – maio 2010

11. Considere:

- a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 3 + \frac{6}{x}$
- a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3$

11.1. Determine, **usando exclusivamente métodos analíticos**, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \leq 5$
Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

11.2. A equação $f(x) = g(x)$ tem exatamente duas soluções, sendo uma delas positiva e a outra negativa. Determine a solução positiva, **utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora**.
Apresente essa solução arredondada às centésimas. Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o ponto relevante para a resolução do problema.

Teste Intermédio 11.º Ano – maio 2010

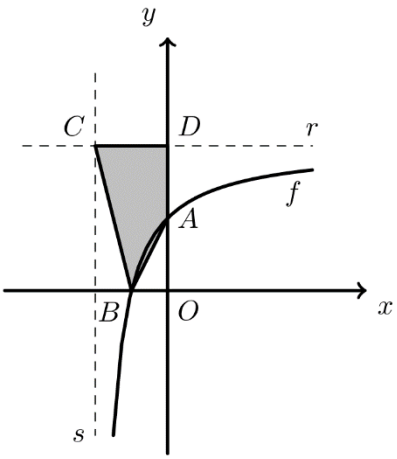
12. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por $f(x) = 4 - \dfrac{4}{x+2}$

Sem recorrer à calculadora, resolva os itens seguintes:

12.1. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \geq 3$
Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

12.2. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy:

- parte do gráfico da função f
- as retas r e s assíntotas do gráfico de f
- o quadrilátero $[ABCD]$



A e B são os pontos de intersecção do gráfico da função f com os eixos coordenados.

C é o ponto de interseção das retas r e s.

D é o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy.

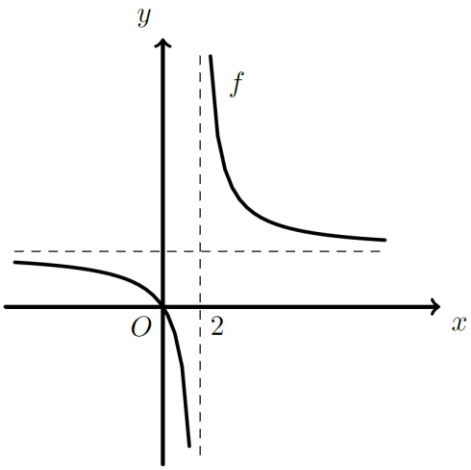
Determine a área do quadrilátero $[ABCD]$

Teste Intermédio 11.º Ano – maio 2009

13. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, bem como as duas assíntotas deste gráfico.

Tal como a figura sugere,

- a origem do referencial pertence ao gráfico de f
- uma das assíntotas é paralela ao eixo Ox
- a outra assíntota é paralela ao eixo Oy e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 2



Admita ainda que:

- a assíntota do gráfico de f é paralela ao eixo das abcissas tem equação $y = 3$
- f é definida por uma expressão do tipo $f(x) = a + \dfrac{b}{x-c}$ onde a, b e c designam números reais.

Indique os valores de a e de c e determine o valor de b

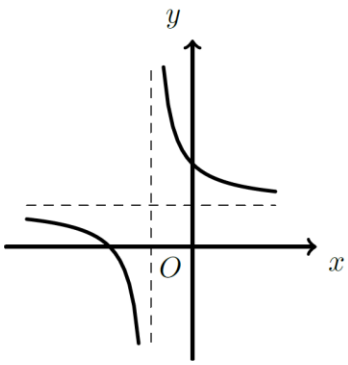
Teste Intermédio 11.º Ano – maio 2008

14. Considere um retângulo cuja área é igual a 5.
Qual das seguintes expressões representa o perímetro deste retângulo, em função do comprimento, x, de um dos seus lados?

(A) $2x + \dfrac{10}{x}$ **(B)** $2x + \dfrac{2x}{x}$ **(C)** $x + \dfrac{5}{x}$ **(D)** $2x + \dfrac{5}{x}$

Exame 2007, 2.ª fase

15. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, a expressão $f(x) = a + \dfrac{1}{x-b}$, define a função cujo gráfico está parcialmente representado na figura ao lado.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

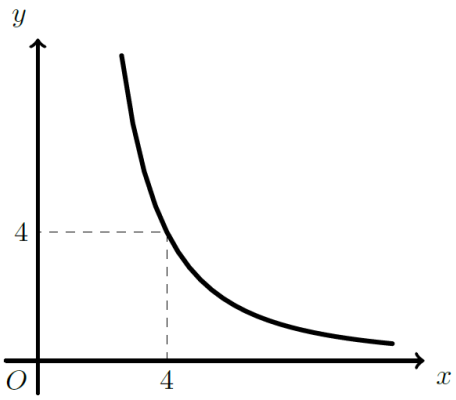
(A) $a > 0 \wedge b > 0$ **(B)** $a > 0 \wedge b < 0$

(C) $a < 0 \wedge b > 0$ **(D)** $a < 0 \wedge b < 0$

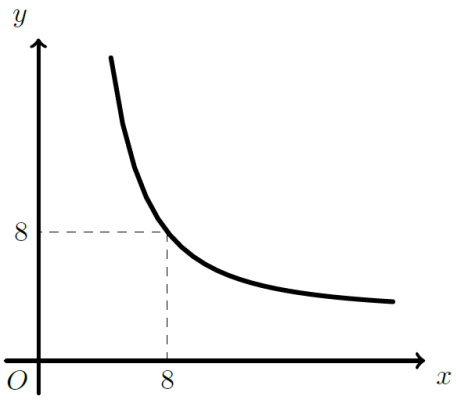
Teste Intermédio 11.º Ano – maio 2007

16. Pretende-se construir um prisma quadrangular regular com $64\,cm^3$ de volume.
A altura y do prisma, medida em cm, depende do comprimento x da aresta da base, igualmente medido em cm.
Qual dos gráficos seguintes traduz corretamente a relação entre estas duas variáveis?

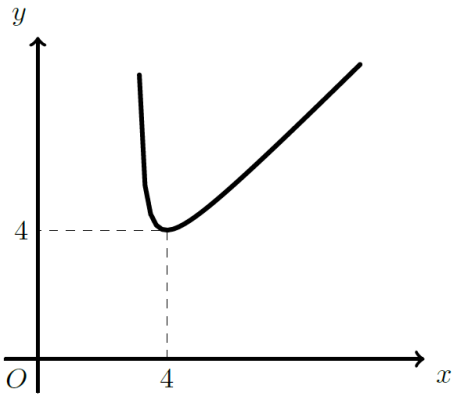
(A)



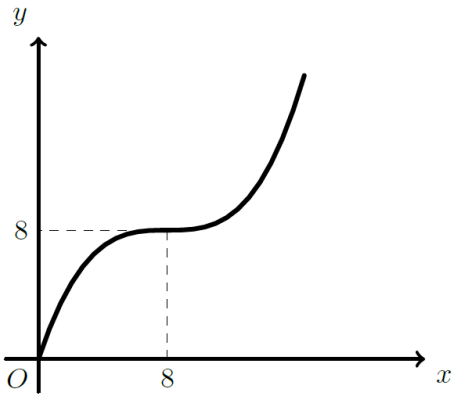
(B)



(C)



(D)



Exame 2006, época especial

17. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = 2 + \dfrac{1}{1-x}$

17.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine o conjunto dos números reais x tais que

$$f(x) \leq -1$$

Apresente a resposta final na forma de intervalo (ou união de intervalos).

17.2. O gráfico da função f tem duas assimptotas. Escreva as suas equações.

Teste Intermédio 11.º Ano – maio 2006

18. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, definida por $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$
Em cada uma das opções seguintes estão escritas duas equações.
Em qual das opções as duas equações definem as assíntotas do gráfico de f?

(A) $x = 2$ e $y = 1$ **(B)** $x = 2$ e $y = 2$

(C) $x = 3$ e $y = 1$ **(D)** $x = 3$ e $y = 2$

Exame 2005, época especial

19. Sabe-se que:

- o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, uma hora depois de ter tomado uma bebida alcoólica, é, numa certa unidade, igual ao quociente entre o peso do álcool ingerido (em gramas) e 70% do peso dessa pessoa (em quilogramas).
- num decilitro de um certo tipo de vinho existem 5 gramas de álcool.

Qual das expressões seguintes dá o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, em função do seu peso x (em quilogramas), uma hora depois de essa pessoa ter bebido dois decilitros desse vinho?

(A) $\dfrac{10}{70x}$ **(B)** $\dfrac{10}{0{,}7x}$ **(C)** $\dfrac{2}{70x}$ **(D)** $\dfrac{2}{0{,}7x}$

Exame 2004, 2.ª fase

20. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar embalagens de sumo de fruta, com capacidade de **dois litros**. Por questões de *marketing*, as embalagens deverão ter a forma de um **prisma quadrangular regular**.

Mostre que a área total da embalagem é dada por

$$A(x) = \frac{2x^3 + 8}{x}$$

(x é o comprimento da aresta da base, em dm)

Nota: Recorde que $1\ litro = 1dm^3$

Exame 2002, 2.ª fase

21. O coeficiente de ampliação A de uma certa lupa é dado, em função da distância d (em decímetros) da lupa ao objeto, por

$$A(d) = \frac{5}{5 - d}$$

Indique a que distância do objeto tem de estar a lupa para que o coeficiente de ampliação seja igual a 5.

(A) $2\ dm$ **(B)** $4\ dm$ **(C)** $6\ dm$ **(D)** $8\ dm$

Exame 2002, 2.ª fase