GEOMETRIA ANALÍTICA – DECLIVE E INCLINAÇÃO

Exercícios de Exames e Testes Intermédios

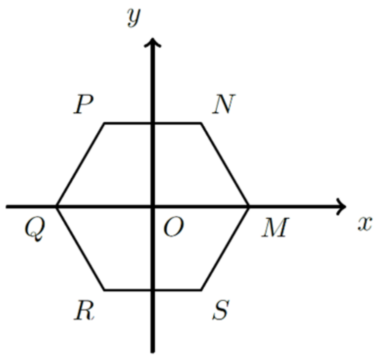
1. Na figura al lado, está representado, num referencial o.n. Oxy, um hexágono regular $[MNPQRS]$ centrado na origem.

Sabe-se que o vértice M tem coordenadas $(1\,,0)$, e que o vértice N pertence ao primeiro quadrante.

Qual é a equação reduzida da reta MN?

(A) $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ (B) $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{6}$

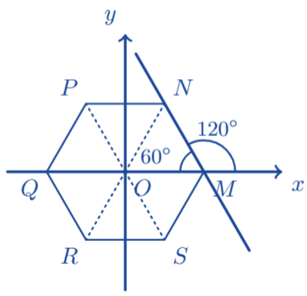
(C) $y=-x+2$ (D) $y=-x+1$



Exame 2020, época especial

Como $[MNPQRS]$ é um hexágono regular pode ser dividido em triângulos equiláteros, pelo que o triângulo $[OMN]$ é equilátero.

Assim, o ângulo definido pelo semieixo positivo Ox e a reta MN tem amplitude $180^\circ-60^\circ=120^\circ$, isto é, a inclinação da reta MN é de 120°.



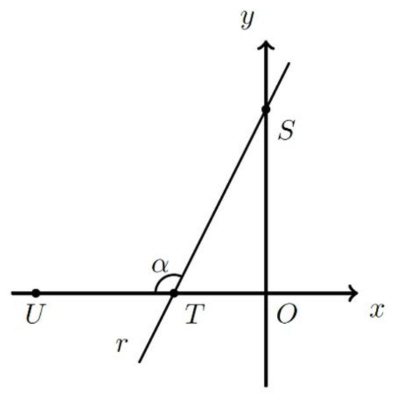
$m_{NM}=\tan(120^\circ)=-\sqrt{3}$, logo a equação reduzida de MN é da forma $y=-\sqrt{3}x+b$

Como $(1\,,0)$, pertence à reta, temos, $0=-\sqrt{3}\times 1+b \Leftrightarrow b=\sqrt{3}$

Logo, $MN:\ y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$

OPÇÃO: A

2. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. Oxy, os pontos S, T e U e a reta r de equação $y = 2x + 4$.



Sabe-se que:

- os pontos S e T são, respetivamente, os pontos de interseção da reta r com os eixos Oy e Ox;
- o ponto U pertence ao eixo Ox e tem abcissa inefrior à do ponto T.

Qual dos valores seguintes é o valor, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo STU?

(A) 4,25 (B) 2,68 (C) 2,03 (D) 1,82

Exame 2020, 1.ª fase

$$m_r = 2 \Leftrightarrow \tan\left(O\hat{T}S\right) = 2 \Leftrightarrow O\hat{T}S = \tan^{-1}(2)$$

$$S\hat{T}U + O\hat{T}S = \pi \Leftrightarrow S\hat{T}U = \pi - \tan^{-1}(2) \Leftrightarrow S\hat{T}U \approx 2{,}03 \text{ rad}$$

OPÇÃO: C

3. Consiedere, num referencial o.n. Oxy, a circunferência centrada na origem do referencial e que passa no ponto $A(2,1)$.

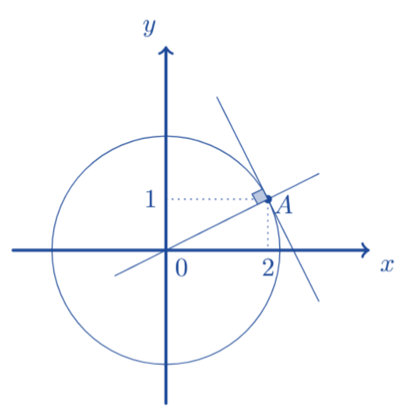
Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A.

Qual é a ordenada na origem da reta r?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

Exame 2018, 2.ª fase

Como a tangente é prependicular ao raio, a reta r é perpendicular à reta AO, ou seja, o declive da reta r é $m_r = -\frac{1}{m_{OA}}$



$$m_{OA} = \frac{y_A}{x_a} = \frac{1}{2}, \text{ assim, } m_r = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

Logo, $r:\ y = -2x + b$, substituindo as coordenadas do ponto A, temos $1 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 5$

OPÇÃO: B

4. Considere, num referencial o.n. Oxy, uma reta r de inclinação α

Sabe-se que $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Qual pode a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = -5x$ (B) $y = 4x$ (C) $y = -2x$ (D) $y = 3x$

Exame 2018, 2.ª fase

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Leftrightarrow 1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 1+\tan^2\alpha = 5 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha = \pm 2 \underset{\cos\alpha<0}{\Leftrightarrow} \tan\alpha = -2$$

Logo, $y = -2x$ pode ser a equação reduzida da reta r

OPÇÃO: C

5. Considere, num referencial o.n. Oxy, a circunferência definida pela equação

$$x^2+(y-1)^2=2$$

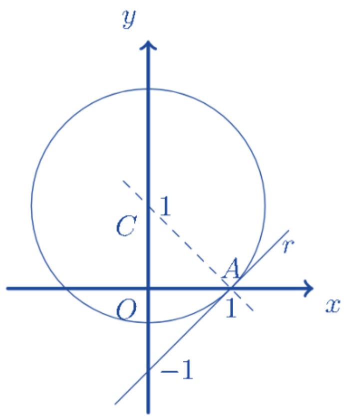
Esta circunferência interseta o eixo Ox em dois pontos. Destes pontos, seja A o que tem abcissa positiva.

Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A.

Qual é a equação reduzida da reta r?

(A) $y=x+1$ (B) $y=x-1$ (C) $1=2x+2$ (D) $y=2x-2$

Exame 2015, 2.ª fase



Vamos determinar as coordenadas de interseção da circunferência com o eixo das abcissas, Ox.

$x^2+(0-1)^2=2 \Leftrightarrow x^2+1=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$

As coordenadas são $(-1,0)$ e $(1,0)$ como A tem abcissa positiva, então $A(1,0)$

A reta r é tangenta à circunferência em A, logo, r é perpendicular ao raio $[AC]$, sendo $C(0,1)$ o centro da origem.

Assim, $m_{AC}=\frac{1-0}{0-1}=-1$, logo, $m_r=-\frac{1}{m_{AC}}=-\frac{1}{-1}=1$

Logo, $r:\ y=1\times x+b$, como $A(1,0)$ pertence à circunferência, temos $0=1\times 1+b \Leftrightarrow b=-1$

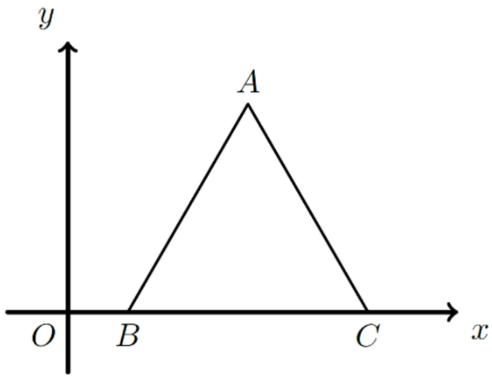
Portanto, $r: y=x-1$

OPÇÃO: B

6. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. Oxy, um triângulo equilátero $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem ordenada positiva;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox ;
- o ponto B tem bacissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1 .



Qual é equação reduzida da reta AB ?

(A) $y=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$ (B) $y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$ (C) $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ (D) $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

Exame 2015, 1.ª fase

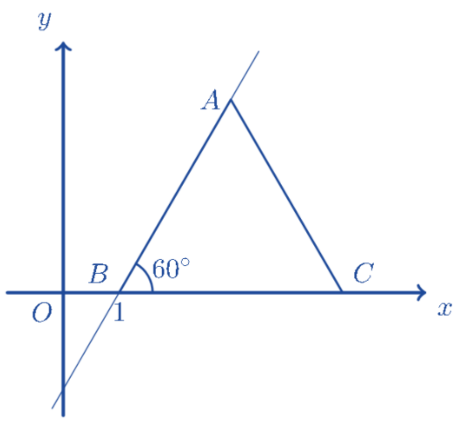
Como o triângulo é equilátero, temos que $A\hat{B}C=60^{o}$, logo a inclinação da reta AB é 60^{o}, logo, $m_{AB}=\tan 60^{o}=\sqrt{3}$

Assim, $AB:\ y=\sqrt{3}x+b$

Como $A(1,0)$ pertence à reta AB , então:

$0=\sqrt{3}\times 1+b \Leftrightarrow b=-\sqrt{3}$

Portanto, $AB: y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$



OPÇÃO: D

7. Num referencial o.n. Oxy, considere a circunferência definida por $x^2+y^2=5$

A reta r é tangente À circunferência no ponto de ordenadas $(1,2)$

Qual é o declive da reta r?

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

Teste Intermédio 11.º ano, fevereiro 2012

O centro da circunferência é a origem do referencial.

A reta que contém os pontos $(0,0)$ e $(1,2)$, contém o raio e é perpendicular à reta tangente no ponto $(1,2)$

Assim, $m_{\text{raio}}=\frac{2-0}{1-0}=2$, logo, o declive da reta perpendicular é $m_r=-\frac{1}{m_{\text{raio}}}=-\frac{1}{2}$

OPÇÃO: B

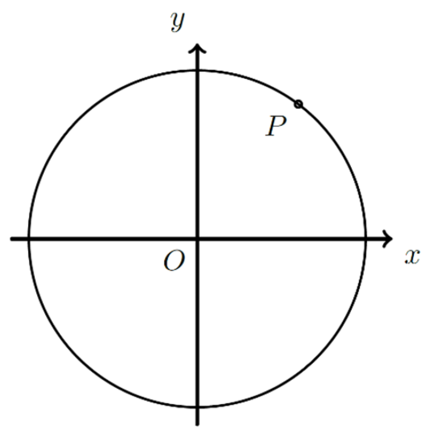
8. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxy, s circunferência de centro em O e raio 5.

Os pontos A e B são os pontos de interseção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy, respetivamente.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B.

Considere agora o caso em que a abcissa do ponto P é 3.

Determine, **sem recorrer à calculadora** a equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto P.



Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2011

A circunferência de centro na origem e raio 5, é definida pela equação $x^2+y^2=25$

Temos que a abcissa do ponto P é 3 e o ponto P pertence à circunferência, então

$$3^2+y^2=25 \Leftrightarrow y^2=25-9 \Leftrightarrow y^2=16 \Leftrightarrow y=-4 \vee y=4 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} y=4$$

Portanto, $P(3,4)$ e $m_{OP}=\frac{4}{3}$

Como a reta tangente é perpendicular ao raio no ponto P e a reta OP contém o raio, temos que

$$m=-\frac{1}{m_{OP}}=-\frac{1}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4}$$

Assim, $y=-\frac{3}{4}x+b \underset{P(3,4)}{\Leftrightarrow} 4=-\frac{3}{4}\times 3+b \Leftrightarrow \frac{16}{4}+\frac{9}{4}=b \Leftrightarrow b=\frac{25}{4}$

Portanto a equação reduzida da reta tangente à circunferência no ponto P é $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

9. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de equação

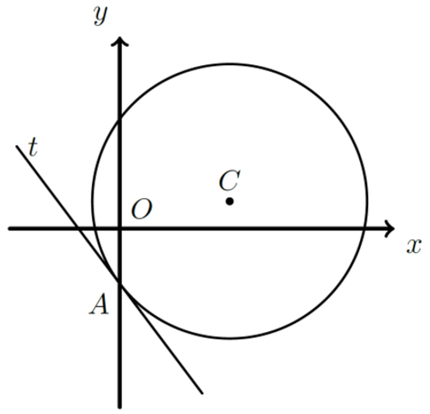
$$(x-4)^2+(y-1)^2=25$$

O ponto C é o centro da circunferência.

O ponto A tem coordenadas $(0,-2)$ pertence à circunferência.

A reta t é tangente à circunferência no ponto A.

Determine a equação reduzida da reta t



Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2010

A reta t é perpendicular à reta que contém o raio $[AC]$.

Sabemos que $C(4,1)$ e $A(0,-2)$, logo, $m_{AC}=\frac{-2-1}{0-4}=\frac{3}{4}$ e $m_t=-\frac{1}{m_{AC}}=-\frac{1}{\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}$

A ordenada na origem é -2, logo, $r:\ y=-\frac{4}{3}x-2$

10. Considere, num referencial o.n. Oxy, a reta r de equação $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}$

Seja s a reta perpendicular a r e qua passa no ponto de coordenadas $(1,4)$.

Qual é a equação reduzida da reta s?

(A) $y=2x+2$ (B) $y=-2x+6$ (C) $y=-2x+\frac{5}{3}$ (D) $y=2x+\frac{5}{3}$

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2009

Como o declive de s é perpendicular à reta r, então

$$m_s=-\frac{1}{m_r}=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2$$

Como a reta s passa no ponto de coordenadas $(1,4)$, temos

$$4=2\times1+b\Leftrightarrow b=2$$

Portanto, $s:\ y=2x+2$

OPÇÃO: A

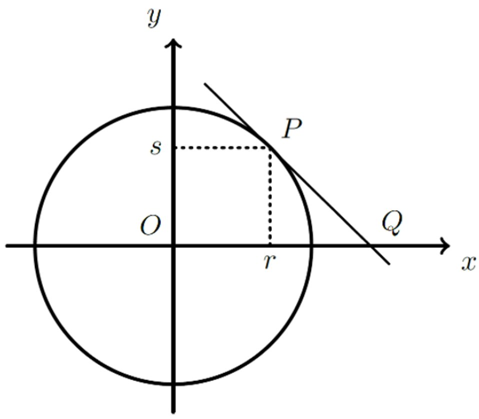
11. Considere um ponto P, do primeiro quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro na origem e raio 1

Sejam $(r\,,s)$ as coordenadas do ponto P

Seja t a reta tangenmte à circunferência no ponto P

Seja Q o ponto de interseção da reta t com o eixo Oz

Prove que a abcissa do ponto Q é $\frac{1}{r}$



Teste Intermédio 11.º ano, maio 2007

Como o declive de PQ é perpendicular à reta que contém o raio, $[OP]$ da circunferência, então

$$m_t=-\frac{1}{m_{OP}}$$

$$m_{OP}=\frac{s-0}{r-0}=\frac{s}{r}$$

Assim, $m_t=-\frac{1}{\frac{s}{r}}=-\frac{r}{s}$, e a equação da reta t é da forma $y=-\frac{r}{s}x+b$

Para descobrirmos a ordenada na origem, utilizamos as coordenadas do ponto P

$$s=-\frac{r}{s}\times r+b\Leftrightarrow s=-\frac{r^2}{s}+b\Leftrightarrow s+\frac{r^2}{s}=b\Leftrightarrow b=\frac{s^2+r^2}{s}$$

Como a circunferência tem raio 1 e o centro é a origem do referencial, temos que a equação reduzida da circunferência é $x^2+y^2=1$, e como $P(r\,,s)$, pertence à circunferência, temos

$$r^2+s^2=1$$

Assim, $b=\frac{s^2+r^2}{s}\underset{s^2+r^2=1}{=}\frac{1}{s}$

Logo, a equação da reta t é $y=-\frac{r}{s}x+\frac{1}{s}$

O ponto Q é do tipo $(x_Q\,,0)$ porque Q pertence ao eixo da abcissas.

Portanto, $0=-\frac{r}{s}\times x_Q+\frac{1}{s}\Leftrightarrow -\frac{r}{s}\times x_Q=-\frac{1}{s}\Leftrightarrow x_Q=-\frac{1}{s}\times\left(-\frac{s}{r}\right)\Leftrightarrow x_Q=\frac{1}{r}$ c.q.m.