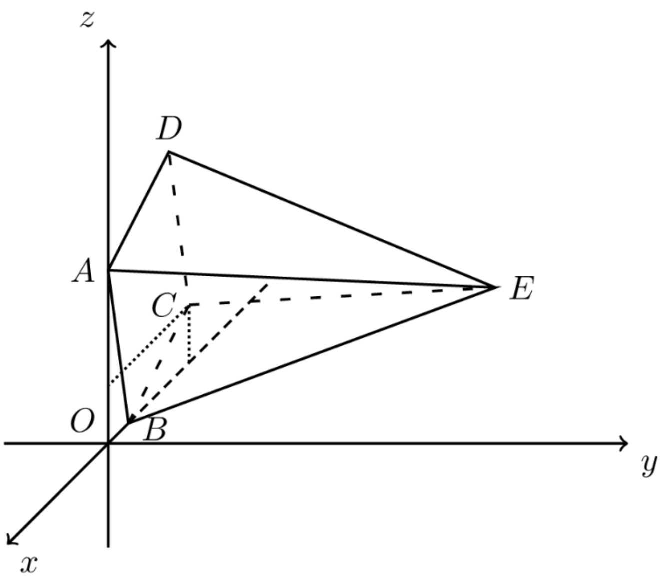
1. Na figura, está representada num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice $E$.




Sabe-se que:

- a base da pirâmide está contida no plano $Oxz$;
- o vértice $A$ pertence ao semieixo positivo $Oz$ e o vértice $B$ pertence ao semieixo negativo $Ox$;
- o vértice $E$ tem coordenadas $(-2,6,2)$;
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(-1,6,2)$;
- o volume da pirâmide é 20.

Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$

A base da pirâmide está contida no plano $Oxz$ e o vértice $E$ tem coordenadas $(-2,6,2)$, então o comprimento da altura da pirâmide é 6.

Como o volume da pirâmide é 20, temos, $V_{[ABCDE]}=20 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times A_{[ABCD]}\times 6=20 \Leftrightarrow 2\times \overline{AB}^2=20 \Leftrightarrow \overline{AB}^2=10$,

como $\overline{AB}^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$, então, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=10 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{10}$.

Sabemos que $\overrightarrow{BE}(-1,6,2)$, então podemos determinar as coordenadas de $B$ a partir do ponto $E$, isto é,

$B=E+\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow B=E-\overrightarrow{BE} \Leftrightarrow B=(-2,6,2)-(-1,6,2) \Leftrightarrow B=(-1,0,0)$

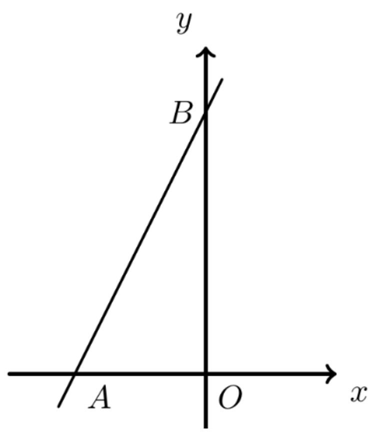
Temos que $\overrightarrow{AB}=B-A=(-1,0,0)-(0,0,z_A)=(-1,0,-z_A)$, com $z_A>0$

Assim, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2+0^2+z_A{}^2}=\sqrt{10} \Leftrightarrow 1+z_A{}^2=10 \Leftrightarrow z_A{}^2=9 \Leftrightarrow z_A=\pm \underset{z_A>0}{\Leftrightarrow} z_A=3$

Portanto, $\overrightarrow{AB}=(-1,0,-3)$

Exame 2021, época especial

2. Na figura, está representado num referencial o.n. $Oxy$, a reta $AB$.




Sabe-se que:

- o ponto $A$ pertence ao semieixo negativo $Ox$ e o ponto $B$ pertence ao semieixo positivo $Oy$;
- a reta $AB$ tem equação $y=2x+4$.

Seja $M$ o ponto médio da reta $[AB]$.

Quais são as coordenadas do ponto $M$?

(A) $\left(-\frac{1}{2},2\right)$  (B) $(-1,2)$  (C) $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$  (D) $(-2,4)$

Exame 2019, 2.ª fase

O ponto $B$ pertence ao semieixo positivo $Oy$ e à reta de equação $y=2x+4$, logo as suas coordenadas são $(0,4)$.

O ponto $A$ pertence ao semieixo negativo $Ox$ e à reta de equação $y=2x+4$, logo as suas coordenadas são $(2x+4=0,0)=(x=-2,0)=(-2,0)$

Assim, $\overrightarrow{AB}=B-A=(2,4)$

Logo, $M=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-2,0)+\frac{1}{2}(2,4)=(-2,0)+(1,2)=(-1,2)$

**OPÇÃO: B**

3. Considere num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=3$ e o ponto $P$ de coordenadas $(1,1,1)$, pertencente a essa superfície esférica.

Seja $\vec{u}=-2\overrightarrow{OP}$ e seja $Q=P+\vec{u}$

Determine as coordenadas do ponto $Q$ e refira, no contexto do problema, o significado de $[PQ]$.

O vetor $\overrightarrow{OP}=P-O=(1,1,1)$ e $\vec{u}=-2\overrightarrow{OP}=-2(1,1,1)=(-2,-2,-2)$

$Q=P+\vec{u}=(1,1,1)+(-2,-2,-2)=(-1,-1,-1)$

$[OP]$ é o raio da superfície esférica e $Q=P+\vec{u}\Leftrightarrow Q=P-2\overrightarrow{OP}\Leftrightarrow Q=P+2\overrightarrow{PO}$, isto é, $Q$ é o simétrico de $P$ relativamente à origem, logo $[PQ]$ é o diâmetro da superfície esférica.

Exame 2018, época especial

**4.** Para um certo número real $a$, diferente de zero, são paralelas as retas $r$ e $s$, definidas, num referencial o.n. $Oxy$, pelas condições $r: ax+2y+1=0$ e $s:(x,y)=(1,1)+k(a,2a)$, $k \in IR$.

Qual é o valor de $a$?

(A) $-4$ (B) $2$ (C) $-2$ (D) $4$

$r:\ ax+2y+1=0 \Leftrightarrow 2y=-ax-1 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{2}x-\frac{1}{2}$, então, $m_r=-\frac{a}{2}$

$s:\ (x,y)=(1,1)+k(a,2a),\ k\in IR$, então $m_s=\frac{2a}{a}=2$

Como $r$ e $s$ têm o mesmo declive:

$-\frac{a}{2}=2 \Leftrightarrow -a=4 \Leftrightarrow a=-4$

**OPÇÃO: A**

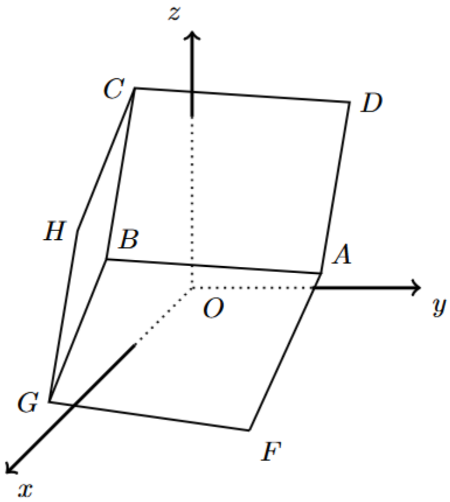
Exame 2018, época especial

**5.** Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto $E$ não está representado na figura).

Sabe-se que:

- o ponto $F$ tem coordenadas $(1,3,-4)$;
- o vetor $\overrightarrow{FA}$ tem coordenadas $(2,3,6)$.

Escreva uma equação cartesiana que defina a superfície esférica de centro no ponto $F$ à qual pertence o ponto $G$.




O comprimento do vetores $\overrightarrow{FA}$ e $\overrightarrow{FG}$ são iguais. Ambos os vetores são arestas do cubo.

$r=\left\|\overrightarrow{FA}\right\|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=\sqrt{49}=7$

$\therefore$ A superfície esférica é $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=49$

Teste Intermédio 11.º ano, março 2013

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta $t$ definida por

$$(x,y,z)=(-1,2,3)+k(0,1,0)\ ,\ k\in IR$$

Qual das condições seguintes também define a reta $t$?

(A) $x=-1 \wedge y=2$ (B) $y=2 \wedge z=3$ (C) $x=-1 \wedge z=3$ (D) $x=0 \wedge y=0$

O vetor da reta é $(0,1,0)$, logo a reta é paralela ao eixo $Oy$ (ordenadas).

Como a reta passa no ponto de coordenadas $(-1,2,3)$, então $x=-1 \wedge z=3$ define a reta.

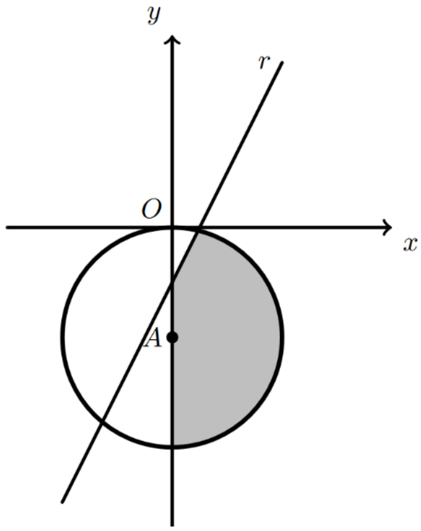
OPÇÃO: C

Teste Intermédio 10.º ano, março 2012

7. Considere num referencial o.n. $Oxy$:

- a reta $r$, definida pela equação $y=2x-1$;
- o ponto $A$ de coordenadas $(0,-2)$.

Escreva uma equação vetorial da reta $r$.




$m_r=2$, então um vetor diretor da reta é, por exemplo, $\vec{v}(1,2)$

Temos que $b=-1$, então, $(0,-1)$ pertence à reta.

$\therefore (x,y)=(0,-1)+k(1,2)\ ,\ k\in IR$

Teste Intermédio 10.º ano, março 2012

8. Considere num referencial o.n. $Oxyz$, a reta $r$ definida por $(x,y,z)=(3,4,5)+k(1,0,0)\ ,\ k\in IR$.

Qual das condições seguintes define uma reta paralela à reta $r$?

(A) $y=5 \wedge z=6$ (B) $x=3 \wedge y=4$

(C) $(x,y,z)=(1,0,0)+k(3,4,5)\ ,\ k\in IR$ (D) $(x,y,z)=(3,4,5)+k(0,1,0)\ ,\ k\in IR$

Os vetores diretores de (C) e (D) não são colineares com o vetor diretor reta $r$, logo não são paralelas.

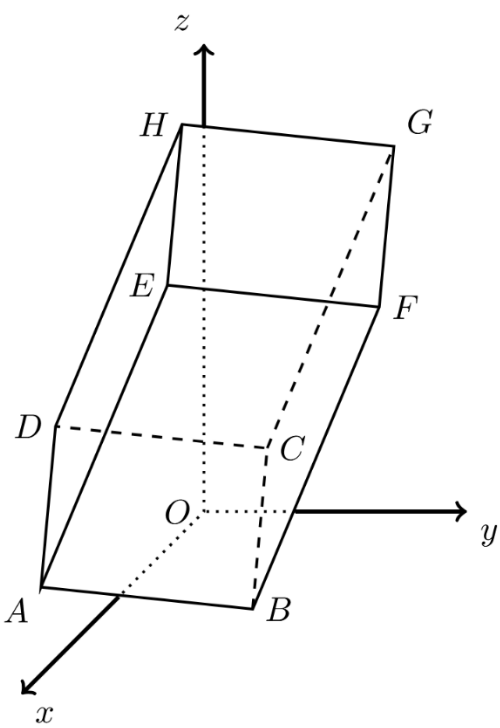
O vetor diretor da reta $r$, $(1,0,0)$ é paralelo ao eixo das abcissas, logo a reta que é paralela ao eixo das abcissas é $y=5 \wedge z=6$.

OPÇÃO: A

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2011

**9.** Na figura, está representado num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.

As coordenadas dos pontos $A$, $B$ e $G$ são $(11,-1,2)$, $(8,5,0)$ e $(6,9,15)$ respetivamente.




**9.1.** Determine as coordenadas do ponto $H$.

$[ABCDEFGH]$ é um prisma quadrangular regular, logo as bases são quadrados, pelo que $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{GH}$.

$H=G+\overrightarrow{GH} \Leftrightarrow H=G+\overrightarrow{BA}$

$\boxed{\text{C.A.:} \quad \overrightarrow{BA}=B-A=(11,-1,2)-(8,5,0)=(3,-6,2)}$

$H=G+\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow H=(6,9,15)+(3,-6,2)=(9,3,17)$

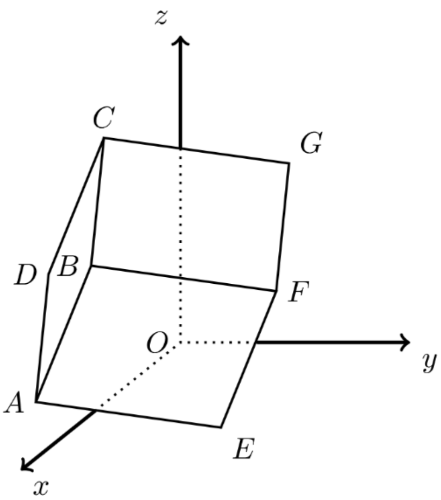
**9.2.** Escreva uma condição que defina a reta que passa no ponto $G$ e que é paralela ao eixo $Ox$.

Como a reta é paralela a $Ox$, então o vetor diretor da reta é $\vec{v}(1,0,0)$ e como passa em $G(6,9,15)$, a condição que define a reta é:

$$(x,y,z)=(6,9,15)=k(1,0,0),\ k\in IR$$

Teste Intermédio 10.º ano, maio 2011

**10.** Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto $H$ não está representado na figura).




**10.1.** Preencha cada um dos espaços seguintes utilizando a designação de um ponto ou de um vetor, de modo a obter afirmações verdadeiras.

$\ldots\ldots\ldots + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC}$

$F + \overrightarrow{CD} = \ldots\ldots\ldots$

$D + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \ldots\ldots\ldots$

$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC}$

$F + \overrightarrow{CD} = E$

$D + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = F$

**10.2.** Admita agora que:

- o ponto $A$ tem coordenadas $(11,-1,2)$;
- o ponto $B$ tem coordenadas $(13,2,8)$;
- o ponto $E$ tem coordenadas $(8,5,0)$.

**10.2.1.** Determine a área da secção produzida no cubo pelo plano $ABG$.

A secção do cubo produzida pelo plano $ABG$ é o retângulo $[ABGH]$

O comprimento da medida da aresta do cubo é $\overrightarrow{AB} = B - A = (13,2,8)-(11,-1,2)=(2,3,6)$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$$

O comprimento da diagonal da face é

$$\overline{BG}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 \Leftrightarrow \overline{BG}^2 = 49+49 \underset{\overline{BG}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BG} = \sqrt{98} \Leftrightarrow \overline{BG} = 7\sqrt{2}$$

Portanto a área da secção é $A_{[ABGH]} = \overline{AB} \times \overline{BG} = 7 \times 7\sqrt{2} = 49\sqrt{2}$

**10.2.2.** Define, por uma condição, a reta que contém o ponto $F$ e é paralela ao eixo $Oz$.

Por **10.2.1.** $\overrightarrow{AB}=(2,3,6)$.

Temos que:

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$ , e $F=E+\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow F=E+\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow F=(8,5,0)+(2,3,6) \Leftrightarrow F=(10,8,6)$

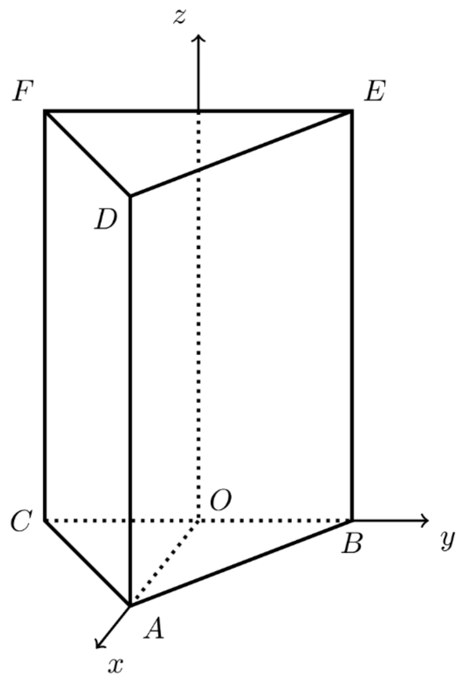
Como a reta é paralela ao eixo $Oz$ , então o vetor diretor da reta é $\vec{v}(0,0,1)$.

Assim, a equação vetorial da reta é:

$$(x,y,z)=(10,8,6)+k(0,0,1)\,,\ k\in IR$$

Teste Intermédio 10.º ano, janeiro 2010

**11.** Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$ , o prisma triangular **não regular** [*ABCDEF*].




Sabe-se que:

- as bases são triângulos isósceles $\left(\overline{AB}=\overline{AC} \text{ e } \overline{DE}=\overline{DF}\right)$;
- a base [*ABC*] está contida no plano $Oxy$ ;
- as arestas laterais do prisma são perpendiculares às bases;
- o ponto $A$ tem coordenadas $(4,0,0)$;
- o ponto $E$ tem coordenadas $(0,3,8)$;
- o ponto $F$ é simétrico do ponto $E$ relativamente ao plano $Oxz$ .

Determine uma equação vetorial da reta *DF*

As coordenadas dos pontos $D$ e $F$ são $(x_A,y_A,z_E)=(4,0,8)$ e $(x_E,-y_E,z_E)=(0,-3,8)$, respetivamente.

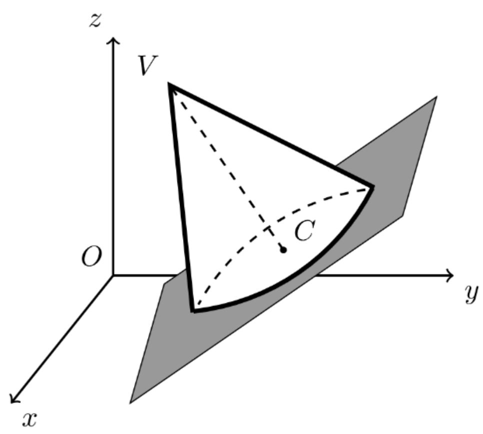
Assim, $\overrightarrow{DF}=F-D=(0,-3,8)-(4,0,8)=(-4,-3,0)$

Portanto uma equação vetorial de $DF$ , é:

$$(x,y,z)=(4,0,8)+k(-4,-3,0)\,,\ k\in IR$$

Teste Intermédio 10.º ano, maio 2009

**12.** Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.




Sabe-se que:

- o vértice $V$ tem coordenadas $(1,2,6)$;
- o ponto $C$ é o centro da base do cone.

Seja $W$ o ponto simétrico do ponto $V$, em relação ao plano $Oxy$.

Indique as coordenadas do ponto $W$ e escreva uma condição que defina o segmento de reta $[VW]$.

Como $W$ é simétrico de $V$ em relação ao plano $Oxy$, então $W(x_V, y_V, -z_V)=(1,2,-6)$

O vetor diretor do segmento de reta $[VW]$ é o vetor $\overrightarrow{VW}$, este vetor tem o mesmo comprimento do segmento de reta e é paralelo ao eixo $Oz$. $\overrightarrow{VW}=W-V=(1,2,-6)-(1,2,6)=(0,0,-12)$

Portanto uma condição que define o segmento de reta $[VW]$ é:

$$(x,y,z)=(1,2,6)+k(0,0,-12),\ k\in[0,1]$$

Teste Intermédio 11.º ano, janeiro 2009

**13.** Qual das condições seguintes define, num referencial o.n. $Oxyz$, uma reta paralela ao eixo $Oz$?

(A) $(x,y,z)=(7,0,0)+k(1,1,0),\ k\in IR$

(B) $(x,y,z)=(1,1,0)+k(0,0,7),\ k\in IR$

(C) $(x,y,z)=(1,1,0)+k(7,0,0),\ k\in IR$

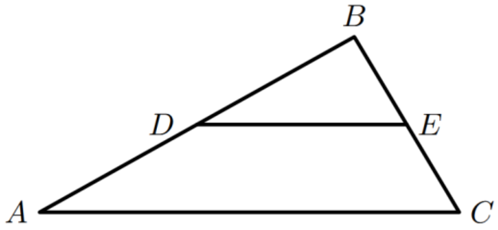
(D) $(x,y,z)=(0,0,7)+k(1,1,0),\ k\in IR$

Por observação das quatro hipóteses, a única equação vetorial que tem um vetor diretor paralelo ao eixo das cotas, é a reta da opção B, $\vec{v}(0,0,7)$.

OPÇÃO: B

Teste Intermédio 10.º ano, janeiro 2009

**14.** Na figura está representado um triângulo $[ABC]$. Os pontos $D$ e $E$ são pontos médios dos lados $[AB]$ e $[BC]$ respetivamente.




**Utilizando o cálculo vetorial**, prove que as retas $AC$ e $DE$ são paralelas.

**Sugestão:**

*Percorra as seguintes etapas*:

- *exprima o vetor* $\overrightarrow{AC}$ *à custa dos vetores* $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$;
- *relacione o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *com o vetor* $\overrightarrow{DB}$;
- *relacione o vetor* $\overrightarrow{BC}$ *com o vetor* $\overrightarrow{BE}$;
- *mostre que* $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DE}$;
- *utilize a igualdade anterior para justificar que as retas AC e DE são paralelas.*

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DB}$, $D$ é ponto médio de $[AB]$

$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE}$, $E$ é ponto médio de $[BC]$

Assim, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{BE} = 2\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}\right) = 2\overrightarrow{DE}$

Portanto, como $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DE}$, então os vetores são colineares, isto é, as retas $AC$ e $DE$ são paralelas.

Teste Intermédio 10.º ano, janeiro 2009

15. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere:

- a esfera $E$ definida pela condição $x^2+y^2+z^2 \leq 4$;
- a reta $r$ de equação vetorial $(x,y,z)=(0,0,2)+k(0,1,0)$, $k \in IR$

A interseção da esfera E com a reta $r$ é

(A) um segmento de reta de comprimento 2 (B) um segmento de reta de comprimento 4

(C) um ponto (D) o conjunto vazio

A esfera $E$ tem centro na origem e raio 2, logo o ponto $(0,0,2)$, que pertence à reta $r$, é o ponto com a cota maior da esfera.

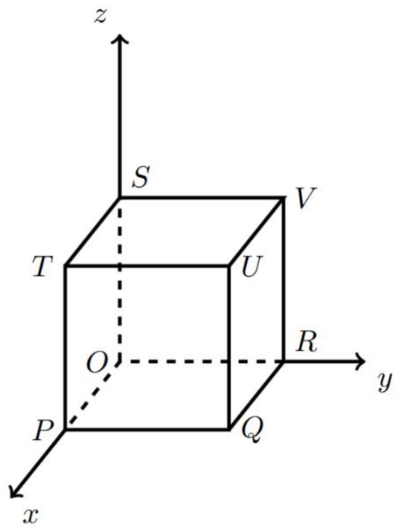
O vetor diretor da reta $r$, $(0,1,0)$, é paralelo ao eixo das ordenadas.

Logo a interseção da reta $r$ com a esfera é um ponto.

**OPÇÃO: C**

Teste Intermédio 10.º ano, maio 2008

16. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[OPQRSTUV]$




A aresta $[OP]$ está contida no semieixo $Ox$, a aresta $[OR]$ está contida no semieixo positivo $Oy$ e a aresta $[OS]$ está contida no semieixo positivo $Oz$

O ponto $U$ tem coordenadas $(2,2,2)$

Defina, por meio de uma condição, a aresta $[UQ]$

As coordenadas do ponto $Q$ são $(2,2,0)$

Assim, $\overrightarrow{QU} = U - Q = (2,2,2)-(2,2,0)=(0,0,2)$

Portanto uma condição que define a aresta $[UQ]$ é

$$(x,y,z)=(2,2,0)+k(0,0,2),\ k \in [0,1]$$

Teste Intermédio 10.º ano, maio 2008

17. Considere, num referencial o.n. *Oxyz*, a reta *r* definida por $(x,y,z)=(1,2,3)+k(0,0,1),\ k\in IR$

Qual das condições seguintes define uma reta paralela à reta *r* ?

(A) $(x,y,z)=(1,2,3)+k(0,1,0),\ k\in IR$ (B) $(x,y,z)=(0,0,1)+k(1,2,3),\ k\in IR$

(C) $x=2\wedge y=1$ (D) $x=2\wedge z=1$

O vetor diretor da reta $r$ , $\vec{v}(0,0,1)$ é paralelo ao eixo $Oz$ , isto é, uma reta perpendicular ao plano *Oxy*.

Assim uma reta paralela tem que ser colinear com o vetor da reta.

A reta que está nas condições referidas é $x=2\wedge y=1$

OPÇÃO: C

Teste Intermédio 11.º ano, maio 2008

18. Num referencial o.n. *Oxyz*, considere um ponto *A* pertencente ao semieixo positivo *Ox* e um ponto *B* pertencente ao semieixo positivo *Oy*.

Quais das seguintes podem ser as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ ?

(A) $(-2,0,1)$ (B) $(2,0,-1)$ (C) $(-2,1,0)$ (D) $(2,-1,0)$

Como *A* pertence ao semieixo positivo *Ox*, então as coordenadas de *A* são $(x_A,0,0),\ x_A\in IR^+$

Como *B* pertence ao semieixo positivo *Oy*, então as coordenadas de *B* são $(0,y_B,0),\ y_B\in IR^+$

Então,

$$\overrightarrow{AB}=(0,y_B,0)-(x_A,0,0)=(-x_A,y_B,0)$$

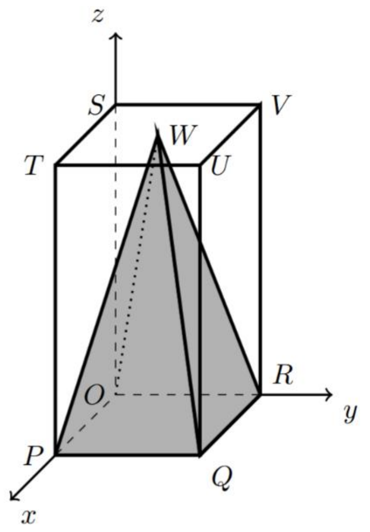
$$x_A>0\Leftrightarrow -x_A<0$$
$$y_B>0$$

Portanto as coordenadas que estão nestas condições são as $(-2,1,0)$

OPÇÃO: C

Exame 2001, época especial

19. Na figura estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma e uma pirâmide quadrangulares regulares, com a mesma altura.




A base do prisma, que coincide com a base da pirâmide, está contida no plano $Oxy$.

O vértice $P$ pertence ao eixo $Ox$

O vértice $R$ pertence ao eixo $Oy$

O vértice $S$ pertence ao eixo $Oz$

O vértice $U$ tem coordenadas $(2,2,4)$

Escreva uma condição que define a reta $TU$

O ponto $T$ tem coordenadas $(2,0,4)$

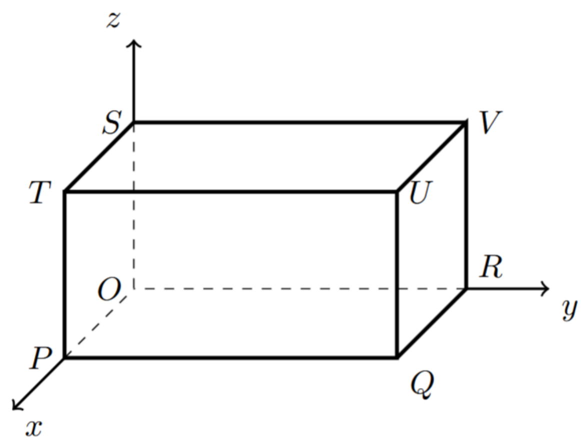
Assim, $\overrightarrow{TU} = U - V = (2,2,4)-(2,0,4)=(0,2,0)$

Portanto uma condição que define a reta $TU$ é

$$(x,y,z)=(2,2,4)+k(0,2,0),\ k \in IR$$

Exame 2001, época especial

**20.** Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo.




O vértice $O$ é a origem do referencial.
O vértice $P$ pertence ao eixo $Ox$
O vértice $R$ pertence ao eixo $Oy$
O vértice $S$ pertence ao eixo $Oz$
O vértice $U$ tem coordenadas $(2,4,2)$

Seja $r$ a reta de equação $(x,y,z)=(2,0,2)+k(0,0,1)$, $k \in IR$

Qual é o ponto de interseção da reta $r$ com o plano $OUV$?

**(A)** O ponto $P$ **(B)** O ponto $T$ **(C)** O ponto $U$ **(D)** O ponto $V$

O vértice que tem coordenadas $(2,0,2)$ é o ponto $T$, ponto que pertence à reta $r$.

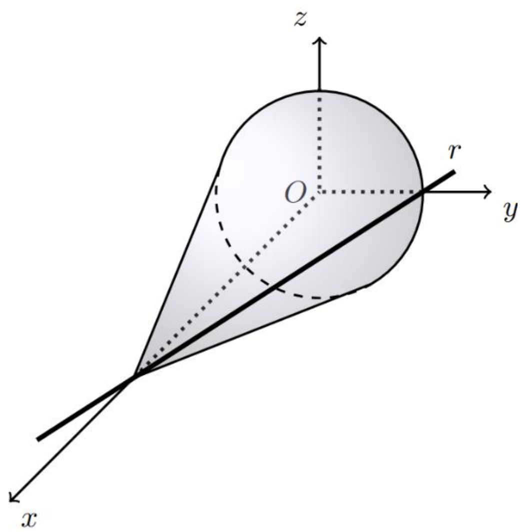
A direção do vetor diretor da reta $r$ é $(0,0,1)$, reta paralela ao eixo $Oz$.

Assim, o ponto de interseção da reta $r$ com o plano $OUV$ é o ponto $P$

OPÇÃO: A

Exame 2001, 2.ª fase

**21.** Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$, um cone cuja base está contida no plano $Oyz$ e cujo vértice pertence ao semieixo positivo $Ox$.




A base tem raio 3 e centro em $O$, origem do referencial.

A reta $r$, de equação $(x,y,z)=(0,3,0)+k(3,-1,0)$, $k\in IR$ contem a geratriz do cone.

Mostre que a altura do cone é 9 .

Sabe-se que, a base está contida no plano $Oyz$, o centro da base é a origem e o vértice pertence ao semieixo positivo $Ox$, logo a altura do cone é a abcissa do cone $x_V$ que é abcissa do ponto da reta com ordenada e cota nulas.

Assim, de $(x,y,z)=(0,3,0)+k(3,-1,0)$, $k\in IR$, temos que todos os pontos da reta são do tipo $(x,y,z)=(3k,3-k,0)$

Como a ordenada é nula $y=0\Leftrightarrow 3-k=0\Leftrightarrow k=3$

Como $x=3k$, substituindo temos, $x=3\times 3=9$

Logo a altura do cone é 9

Exame 2000, época especial

**22.** Num referencial o.n. $Oxyz$, qual das seguintes retas interseta os três planos coordenados?

(A) $(x,y,z)=(1,1,1)+k(1,0,0)$, $k\in IR$ (B) $(x,y,z)=(1,1,1)+k(0,2,0)$, $k\in IR$

(C) $(x,y,z)=(1,1,1)+k(1,2,0)$, $k\in IR$ (D) $(x,y,z)=(1,1,1)+k(1,2,3)$, $k\in IR$

Observando as coordenadas do vetor diretor, temos:

(A) $(1,0,0)$ tem direção igual à de $Ox$, pelo que a reta não interseta o plano $Oxy$ e $Oxz$

(B) $(0,2,0)$ tem direção igual à de $Oy$, pelo que a reta não interseta o plano $Oxy$ e $Oyz$

(C) $(1,2,0)$ tem direção igual à do plano $Oxy$, como a reta contém o ponto de coordenadas $(1,1,1)$ a reta não interseta o plano $Oxy$

(D) $(1,2,3)$ não é paralelo a nenhum dos eixos ou planos, logo a reta interseta os três planos.

OPÇÃO: D

Exame 2000, 1.ª fase – 1.ª chamada

**23.** Considere num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(2,3,10)$ e $B(10,13,25)$.

Um tiro é disparado de $A$, de tal forma que projétil passa pelo ponto $B$.

**23.1.** Pretende-se atingir um alvo situado no ponto $C(98,123,190)$.

Mostre que, se o projétil seguir uma trajetória retilínea, o alvo é atingido.

Temos que verificar se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (10,13,25) - (2,3,10) = (8,10,15)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (98,123,190) - (2,3,10) = (96,120,180)$

Os vetores são colineares se:

$$\frac{96}{8} = \frac{120}{10} = \frac{180}{15} \Leftrightarrow 12 = 12 = 12$$

Assim, $\overrightarrow{AC} = 12\overrightarrow{AB}$, isto é, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares

**23.2.** A trajetória retilínea só é garantida se o alvo se encontrar a menos de 300 unidades do local onde o projétil é disparado.

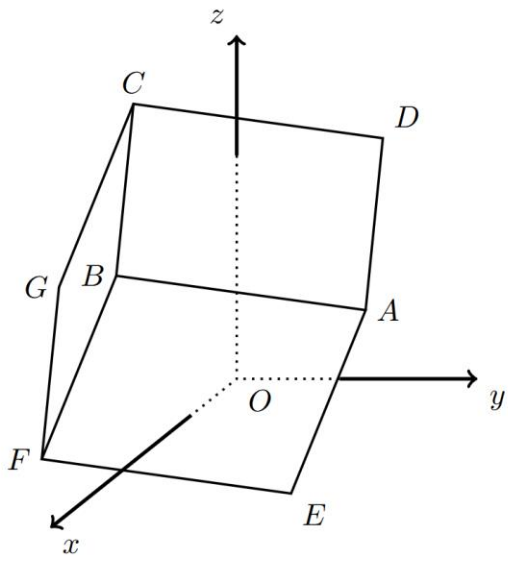
Prove que, no caso presente, a trajetória retilínea está garantida.

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{96^2 + 120^2 + 180^2} \approx 237$

Assim, como $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| < 300$, o alvo está a menos de 300 unidades do local onde o projétil é disparado, pelo que está garantida a trajetória retilínea.

Exame 1999, prova militares

24. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo.




Sabe-se que:

- $[ABCD]$ é uma face do cubo;
- $[EFGH]$ é a face oposta a $[ABCD]$ (o ponto $H$ não está representado na figura);
- $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ e $[DH]$ são quatro arestas do cubo;
- o ponto $A$ tem coordenadas $(3,5,3)$;
- o ponto $D$ tem coordenadas $(-3,3,6)$;
- o ponto $E$ tem coordenadas $(1,2,-3)$.

Determine as coordenadas do ponto $H$ e comente a seguinte afirmação: o ponto $H$ pertence a um dos eixos coordenados.

As arestas $[AD]$ e $[EH]$ são paralelas e os seus comprimentos iguais, logo $H = E + \overrightarrow{ED} \Leftrightarrow H = E + \overrightarrow{AD}$

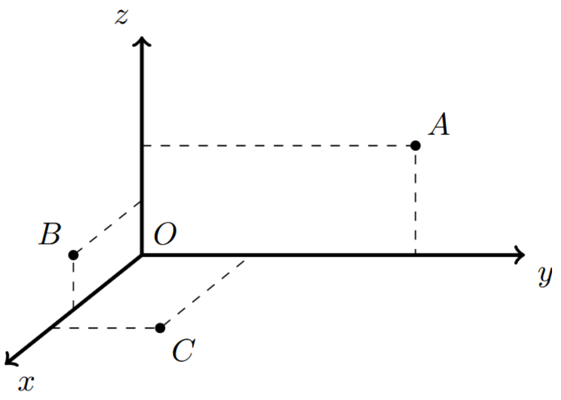
$\overrightarrow{AD} = D - A = (-3,3,6) - (3,5,3) = (-6,-2,3)$

$H = E + \overrightarrow{AD} = (1,2,-3) + (-6,-2,3) = (-5,0,0)$

Como duas das três coordenadas de $H$ são nulas o ponto pertence a um dos eixos.

Exame 1999, época especial

**25.** Na figura estão representados três pontos num referencial o.n. $Oxyz$.




Sabe-se que:

- o ponto $A$ tem coordenadas $(0,5,2)$;
- o ponto $B$ pertence ao plano $Oxz$;
- o ponto $C$ pertence ao plano $Oxy$;
- a reta $BC$ tem equação vetorial $(x,y,z)=(5,4,-1)+k(1,2,-1)$, $k\in IR$.

Mostre que o ponto $B$ tem coordenadas $(3,0,1)$ e que o ponto $C$ tem coordenadas $(4,2,0)$.

Os pontos $B$ e $C$ pertencem à reta $BC$, logo são da forma $(x,y,z)=(5+k,4+2k,-1-k)$, $k\in IR$

Assim:

$B$ pertence ao plano $Oxz$, logo $y_B=0\Leftrightarrow 4+2k=0\Leftrightarrow k=-2$
$\therefore B(5-2,0,-1-(-2))=(3,0,1)$ c.q.m.

C pertence ao plano $Oxy$, logo $z_C=0\Leftrightarrow -1-k=0\Leftrightarrow k=-1$
$\therefore C(5-1,4+2(-1),0)=(4,2,0)$ c.q.m.

Exame 1999, 2.ª fase

26. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos $\alpha$ e $\beta$, definidos pelas seguintes equações:

$$\alpha : x = 1 \quad \text{e} \quad \beta : y = 2$$

Seja $r$ a reta de interseção de $\alpha$ e $\beta$.

Indique qual das expressões seguintes é uma equação vetorial da reta $r$.

(A) $(x,y,z)=(1,2,0)+k(0,0,2),\ k\in IR$ (B) $(x,y,z)=(1,1,0)+k(1,2,0),\ k\in IR$

(C) $(x,y,z)=(1,1,0)+k(0,0,2),\ k\in IR$ (D) $(x,y,z)=(1,2,0)+k(1,2,0),\ k\in IR$

A equação do plano $\alpha$, $x=1$, define um plano perpendicular a $Ox$ e a equação do plano $\beta$, $y=2$, define um plano perpendicular a $Oy$.

Então a interseção dos dois planos é uma reta perpendicular a $Oz$. Opções (A) e (C).

Como os pontos da reta têm como fixos os pontos de abcissa 1 e ordenada 2.

Logo qualquer ponto da reta tem coordenadas do tipo $(1,2,z)$.

OPÇÃO: A

Exame 1999, 1.ª fase – 1.ª chamada

27. Considere a esfera definida pela condição $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 \leq 14$.

Sabendo que $[AB]$ é um diâmetro dessa esfera e que $A$ tem coordenadas $(1,1,1)$ indique as coordenadas de $B$.

(A) $(2,4,8)$ (B) $(3,5,7)$ (C) $(4,6,5)$ (D) $(5,3,6)$

Seja o ponto $C$ o centro da esfera, então $C(2,3,4)$

Como $[AB]$ é um diâmetro e $C$ é o centro da esfera, temos que $B = C+\overrightarrow{CB} \underset{\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}}{=} C+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,3,4)-(1,1,1)=(1,2,3)$

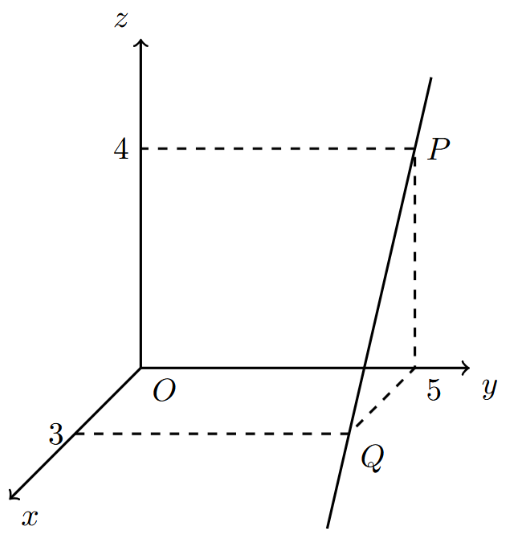
$\therefore B=(2,3,4)+(1,2,3)=(3,5,7)$

OPÇÃO: B

Exame 1998, 2.ª fase

**28.** Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, uma reta $PQ$.

- o ponto $P$ pertence ao plano $Oyz$;
- o ponto $Q$ pertence ao plano $Oxy$.




Indique qual das condições seguintes define a reta $PQ$.

**(A)** $3x+5y+4z=0$

**(B)** $(x,y,z)=(3,0,-4)+k(3,5,0)\,,\ k\in IR$

**(C)** $x=3 \wedge y=5 \wedge z=4$

**(D)** $(x,y,z)=(3,5,0)+k(3,0,-4)\,,\ k\in IR$

$P(0,5,4)$ e $Q(3,5,0)$

A direção da reta é dada pelo vetor $\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(3,5,0)-(0,5,4)=(3,0,-4)$

A opção **(D)** contém o ponto $Q$ e tem o vetor diretor $\overrightarrow{PQ}$.

OPÇÃO: D

Exame 1999, 1.ª fase – 2.ª chamada

**29.** Considere num referencial o.n. $Oxyz$:

- a esfera $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2\leq 36$
- a reta $r$ de equação $(x,y,z)=(1,2,3)+k(-2,0,1)\,,\ k\in IR$

A interseção da reta $r$ com a esfera é um segmento de reta.

Qual é o comprimento desse segmento de reta?

**(A)** 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 14

O centro da esfera tem coordenadas $(1,2,3)$ que é um ponto da reta $r$

Assim, a interseção de uma reta que passa pelo centro de uma esfera é o seu diâmetro.

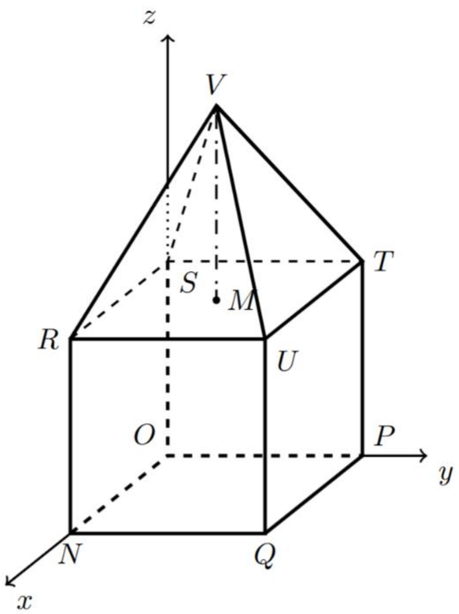
Logo, $d=2r=2\sqrt{36}=2\times 6=12$

OPÇÃO: C

Exame 1998, 1.ª fase – 1.ª chamada

**30.** Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um sólido formado por um cubo e uma pirâmide quadrangular regular.

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo;
- o vértice $O$ coincide com a origem do referencial;
- o vértice $N$ pertence ao semieixo positivo $Ox$;
- o vértice $P$ pertence ao semieixo positivo $Oy$;
- o vértice $S$ pertence ao semieixo positivo $Oz$;
- a altura da pirâmide, $\overline{VM}$, é igual ao comprimento da aresta do cubo;
- o vértice $V$ tem coordenadas $(3,3,12)$.




Determine a interseção da reta que contém a aresta $[UV]$ com o plano de equação $x=4$

O plano $x=4$ é perpendicular ao eixo $Ox$, logo as coordenadas da interseção do plano com a reta são do tipo $(4,y,z)$.

Vamos determinar a equação vetorial da reta $UV$

$U(6,6,6)$ e $V(3,3,12)$

$\overrightarrow{UV}=V-U=(3,3,12)-(6,6,6)=(-3,-3,6)$

Assim, $UV:\ (x,y,z)=(6,6,6)+k(-3,-3,6),\ k\in IR$

Então qualquer ponto da reta é do tipo $(x,y,z)=(6-3k,6-3k,6+6k),\ k\in IR$

Como na interseção $x=4$, então, $6-3k=4 \Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$

$\therefore$ a interseção é $\left(4,6-3\times\frac{2}{3},6+6\times\frac{2}{3}\right)=(4,4,10)$

Exame 1998, 1.ª fase – 1.ª chamada

**31.** Num referencial o.n. $Oxyz$, considere a reta $r$ de equação vetorial

$$(x,y,z)=(1,2,0)+k(3,0,-1),\ k\in IR$$

A reta $r$

(A) é paralela ao plano $Oxy$

(B) é paralela ao plano $Oxz$

(C) é paralela ao plano $Oyz$

(D) não é paralela a nenhum dos planos coordenados

Qualquer ponto da reta tem coordenadas $(x,y,z)=(1+3k,2,-k),\ k\in IR$, logo, como todos os pontos têm ordenada igual a 2, a reta está contida no plano $y=2$ que é paralelo ao plano $Oxz$.

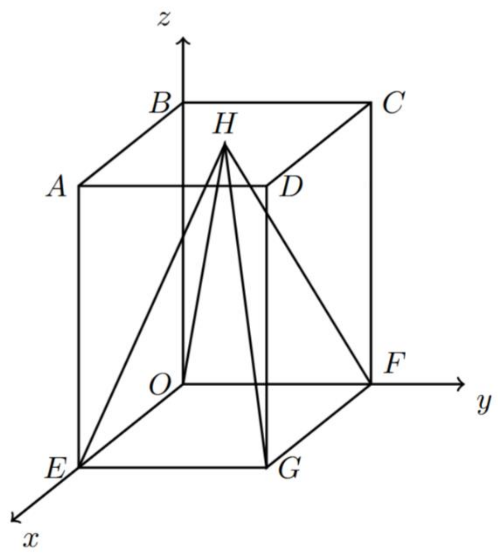
OPÇÃO: B

Exame 1997, prova militares

**32.** Na figura estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular e uma pirâmide cuja base $[OFGE]$ coincide com a do prisma e está assente no plano $Oxy$.
O vértice da pirâmide coincide com o centro da base superior do prisma de altura $6$ .

O ponto $G$ tem coordenadas $(4,4,0)$.

Indique, justificando, uma equação vetorial da reta que é a interseção do plano $OEH$ com o plano $ABC$ .




A interseção do plano $OEGH$ com o plano $ABC$ é uma reta paralela ao eixo $Ox$.

Assim, o vetor diretor da reta é $\overrightarrow{OE} = E - O = (4,0,0) - (0,0,0) = (4,0,0)$

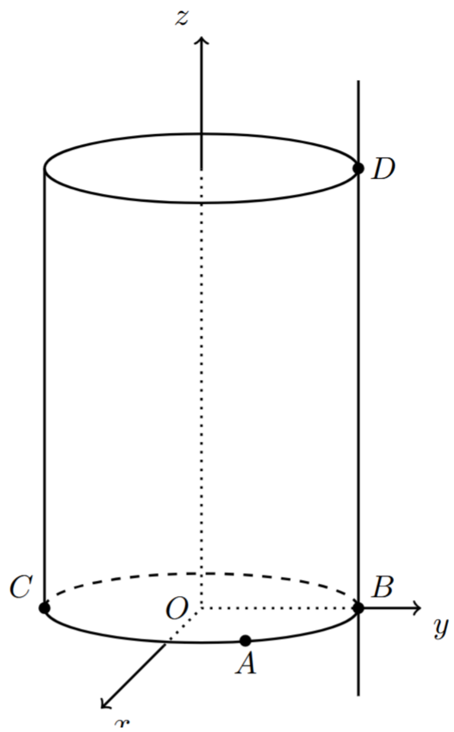
A reta contém o ponto $H(2,2,6)$

Logo, uma equação vetorial da reta é

$$(x,y,z) = (2,2,6) + k(4,0,0),\ k \in IR$$

Exame 1997, prova militares

**33.** Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro de revolução como o apresentado na figura.
A base inferior do cilindro tem centro na origem $O$ do referencial e está contida no plano $Oxy$.




$[BC]$ é um diâmetro da base inferior, contido no eixo $Oy$ e o ponto $C$ tem coordenadas $(0,-5,0)$.

O ponto $A$ pertence à circunferência que limita a base inferior do cilindro e tem coordenadas $(4,3,0)$.

A reta $r$ passa no ponto $B$ e é paralela ao eixo $Oz$.

O ponto $D$ pertence à reta $r$ e à circunferência que limita a base superior do cilindro.

Escreva uma equação vetorial da reta $r$.

A reta $r$ tem é paralela ao eixo $Oz$, isto é a direção do vetor $\vec{v}(0,0,1)$, por exemplo.

Como $C$ e $B$ estão no eixo $Oy$ e $C$ é simétrico de $B$ então $B(0,5,0)$

Portanto uma equação vetorial de $r$ é

$$(x,y,z)=(0,5,0)+k(0,0,1), k\in IR$$

Exame 1997, 1.ª fase