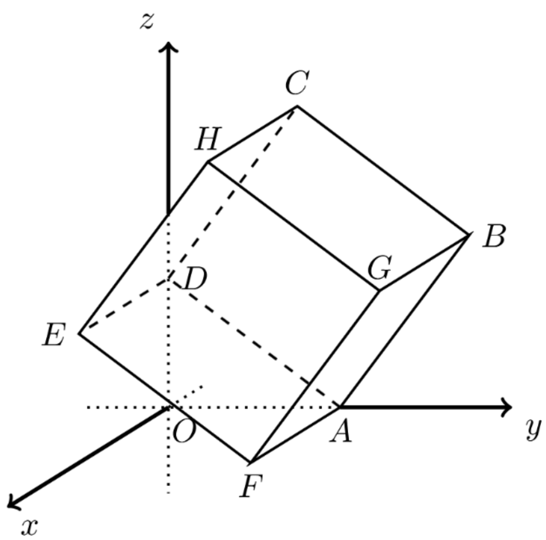
GEOMETRIA – PONTOS, RETAS E PLANOS | **Fonte**
EXERCÍCIOS DE EXAMES E TESTES INTERMÉDIOS | www.iave.pt

1. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, o cubo [*ABCDEFGH*].

Sabe-se que:

- o plano *ABC* é definido pela equação $x=0$;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Oy, e $\overline{OA}=4$;
- o ponto *F* pertence ao plano *Oxy*;
- a reta *FC* é definida pela equação vetorial $(x,y,z)=(-5,2,14)+k(-5,-1,7)\,,\ k\in IR$.



1.1. Qual das seguintes equações vetoriais define a reta que passa no ponto *A* e é paralela à reta *FC*?

(A) $(x,y,z)=(-5,1,7)+k(1,-5,0)\,,\ k\in IR$

(B) $(x,y,z)=(5,1,-7)+k(-1,5,0)\,,\ k\in IR$

(C) $(x,y,z)=(-10,2,14)+k(5,1,-7)\,,\ k\in IR$

(D) $(x,y,z)=(10,2,-14)+k(5,1,-7)\,,\ k\in IR$

A reta que passa no ponto *A* é paralela à reta *FC* logo os vetrores diretores das retas são colineares.

As opções **(A)** e **(B)** não são possíveis, porque não existe um valor real k de modo que $(1,-5,0)=k(-5,-1,7)$ ou $(-1,5,0)=k(-5,-1,7)$.

As opções **(C)** e **(D)** são possíveis para $k=-1$.

Sabemos que $A(0,4,0)$

Opção **(C)**: $(0,4,0)=(-10,2,14)+k(5,1,-7)\Leftrightarrow\begin{cases}0=-10+5k\\4=2+k\\0=14-7k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5k=10\\k=2\\7k=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\k=2\\k=2\end{cases}$

Como existe um valor *k* que verifica a condição, podemos concluir que *A* pertence a esta reta e tem a mesma direção de *FC*

OPÇÃO: C

1.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine a equação cartesiana reduzida da superfície esférica que contém todos os vértices do cubo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que $A(0,4,0)$, $F(x,y,0)$ porque pertence ao eixo Oxy e $C(0,y,z)$ porque ABC é definido pela equação $x=0$.

Para que a superfície esférica contenha todos os vértices do cubo, o centro tem que ser o ponto médio de $[FC]$ e o diâmetro é igual a $\overline{FC}$

Como $FC:\ (x,y,z)=(-5,2,14)=k(-5,-1,7)$, $k\in IR$, temos que qualque ponto da reta é do tipo $(-5-5k,\ 2-k,\ 14+7k)$, $k\in IR$

Coordenadas de F:

$$(x,y,0)=(-5-5k,\ 2-k,\ 14+7k)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5-5k\\y=2-k\\0=14+7k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5-5k\\y=2-k\\k=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5-5\times(-2)\\y=2-(-2)\\k=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\\k=-2\end{cases}$$

Logo, $F(5,4,0)$

Coordendas de C:

$$(0,y,z)=(-5-5k,\ 2-k,\ 14+7k)\Leftrightarrow\begin{cases}0=-5-5k\\y=2-k\\z=14+7k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\y=2-k\\z=14+7k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\y=2-(-1)\\z=14+7\times(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\y=3\\z=7\end{cases}$$

Logo, $C(0,3,7)$

Então o ponto médio de $[FC]$ é:

$$\left(\frac{5+0}{2},\frac{4+3}{2},\frac{0+7}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$$

O diâmetro de $[FC]$ é $d(F,C)=\sqrt{(5-0)^2+(4-3)^2+(0-7)^2}=\sqrt{25+1+49}=\sqrt{75}$

Logo o raio é igual a $r=\frac{\sqrt{75}}{2}$ e $r^2=\frac{75}{4}$

Portanto a equação cartesisana reduzida da superfície esférica é:

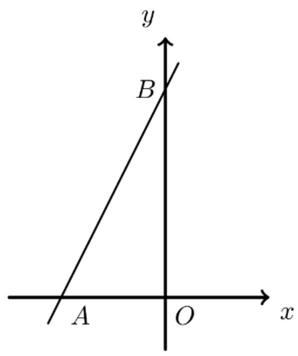
$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{75}{4}$$

Exame 2024, 2.ª fase

2. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxy, a reta AB.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox e o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy;
- a reta AB tem equação $y = 2x + 4$.



Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

Quais são as coordenadas do ponto M ?

(A) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ (B) $(-1, 2)$ (C) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $(-2, 4)$

Como B pertence ao semieixo positivo Oy e à reta $y = 2x + 4$ então $B(0, 4)$.

Como A pertence a Ox e à reta $y = 2x + 4$, então $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$, assim, $A(-2, 0)$

$$\therefore\ M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (-1, 2)$$

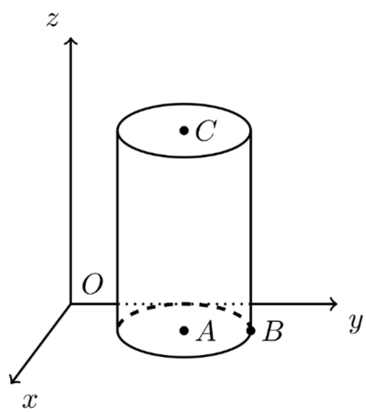
OPÇÃO: B

Exame 2019, 2.ª fase

3. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro de revolução de altura 3.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1, 2, 0)$ e é o centro da base inferior do cilindro, a qual está contida no plano Oxy;
- o ponto B tem coordenadas $(1, 3, 0)$ e pertence à circunferência que delimita a base inferior do cilindro;
- o ponto C é o centro da base superior do cilindro.



Determine a área da secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x = 1$

Sabemos que os pontos A, B e C têm abcissa igual a 1, logo todos pertencem ao plano de equação $x = 1$.

Temos, assim, que a secção produzida no cilindro pelo plano de equação $x = 1$, é um retângulo que contem os três pontos, isto é, um retângulo cujos lados são o diâmetro da base e a altura do cilindro.

$$\therefore\ A = \underbrace{2 \times |y_B - y_A|}_{\text{Diâmetro}} \times \underset{\text{Altura}}{3} = 2|3-2| \times 3 = 6$$

Exame 2017, época especial

4. Considere, num referencial o.n. Oxy, os pontos $A(-1,3)$ e $B(2,4)$.

Qual das seguintes equações define uma reta paralela à reta AB ?

(A) $y=-\frac{1}{3}x$ (B) $y=\frac{1}{3}x$ (C) $y=3x$ (D) $y=-3x$

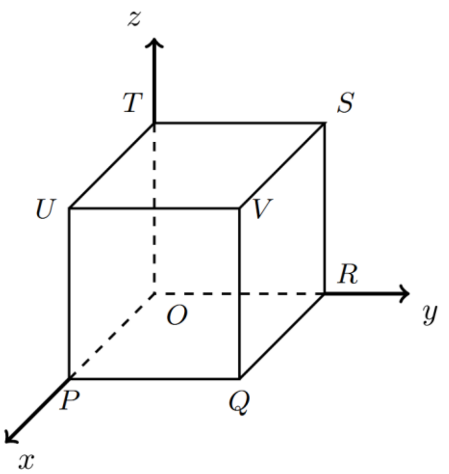
As retas paralelas têm o mesmo declive.

Assim, $m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{3-4}{-1-2}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$

OPÇÃO: B

Exame 2016, época especial

5. Na figura, está representado, num referencial o.n. Oxy, o cubo $[OPQRSTUV]$ de aresta 2.



Os pontos, P , R e T pertencem aos semieixos positivos.

Numa das opções seguintes estão as coordenadas de um ponto pertencente a uma das arestas do cubo.

Em qual?

(A) $(1,1,2)$ (B) $(1,2,0)$ (C) $(0,1,1)$ (D) $(1,1,1)$

Sabe-se que a aresta do cubo é 2, assim:

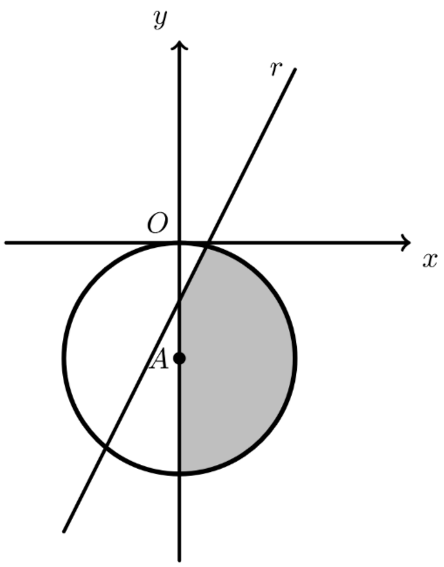
- o ponto de **(A)** é o centro da face $[STUV]$;
- o ponto de **(B)** é o ponto médio da aresta $[QR]$;
- o ponto de **(C)** é o centro da face $[OPQR]$;
- o ponto de **(D)** é o centro do cubo $[OPQRSTUV]$.

OPÇÃO: B

Teste Intermédio 10.º ano, março 2012

6. Considere, num referencial o.n. Oxy:

- a reta r, definida pela equação $y = 2x - 1$;
- o ponto A de coordenadas $(0, -2)$.



Escreva a equação reduzida da reta paralela à reta r que passa no ponto A.

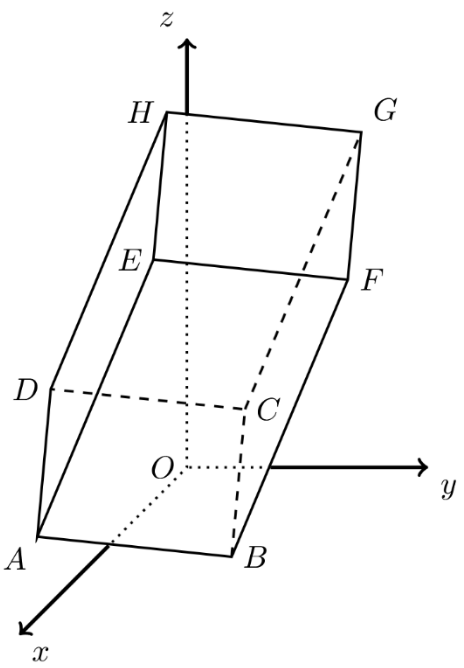
Como a reta é paralela a r então tem o mesmo declive, $m_r = 2$

Como deve conter A, então $-2 = 2\times 0 + b \Leftrightarrow b = -2$

$\therefore \ y = 2x - 2$

Teste Intermédio 10.º ano, março 2012

7. Na figura, está representado, num referencial o.n. Oxy, o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.



As coordenadas dos ponto A, B e G são $(11, -1, 2)$, $(8, 5, 0)$ e $(6, 9, 15)$, respetivamente.

Escreva uma condição que defina a reta que passa no ponto G e que é paralela ao eixo Oy.

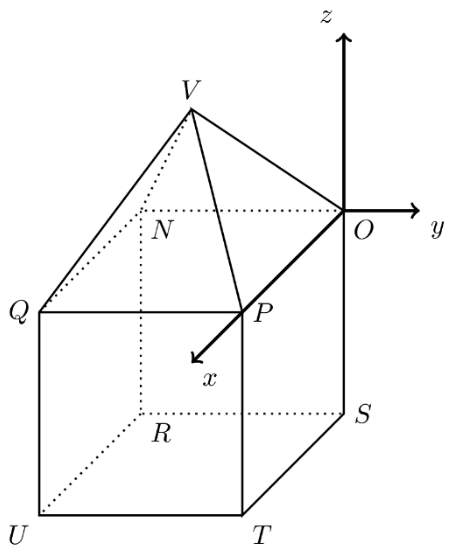
Como é paralela ao eixo Oy a reta é defina pelas coordenadas

$x = x_G \wedge z = z_g$, $G(6, 9, 15)$

$x = 6 \wedge z = 15$

Teste Intermédio 10.º ano, maio 2011

8. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro [$VNOPQURST$], que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.



Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano Ox;
- o ponto P pertence ao eixo Ox;
- o ponto U tem coordenadas $(4,-4,-4)$.

Escreva uma condição cartesiana que defina o plano perpendicular à reta QN e que passa no ponto V.

Como se pode observar na figura a reta QN é paralela ao eixo Ox, como se pretende que o plano seja perpendicular à reta QN, então o plano também será perpendicular ao eixo Ox, isto é, o plano será definido pela equação $x = k$, $k \in IR$.

Como o ponto V pertence ao plano pretendido, e $V(2,-2,z_V)$, então $x=2$ é a equação do plano.

Teste Intermédio 10.º ano, janeiro 2011

9. Considere, num referencial o.n. Oxy, a reta r que interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2 e que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 8.

Qual é a equação reduzida da reta r ?

(A) $y=-4x+8$ (B) $y=4x+8$ (C) $y=-2x+4$ (D) $y=2x+4$

Como a reta r interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 8, então $y = mx + 8$.

Como a reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2, então $0 = m2 + 8 \Leftrightarrow m = -4$

$\therefore y = -4x + 8$

Teste Intermédio 10.º ano, maio 2010

10. Na figura, estão representados, num referencial o.n. *Oxyz*, um prisma quadrangular regular e uma pirâmide.

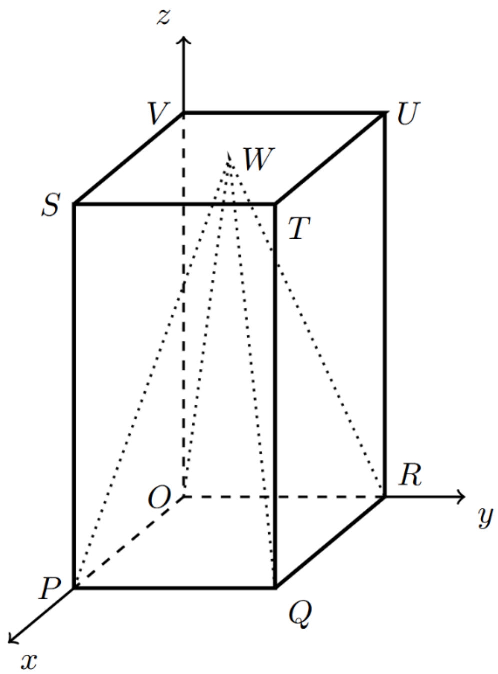
A base da pirâmide, $[OPQR]$, está contida no plano *Oxy* e coincide com a base inferior do prisma.

O ponto W, vértice da pirâmide, coincide com o centro da base superior, $[STUV]$, do prisma.

O ponto P tem coordenadas $(5,0,0)$.

Sabe-se que o volume da pirâmide é igual a 75.

Determine as coordenadas do ponto W, vértice da pirâmide.



Sabe-se que:

- a base do prisma é um quadrado $[OPQR]$;
- $P(5,0,0)$
- $V_{[OPQRW]}=75$

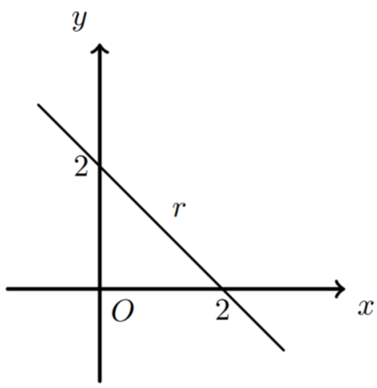
Assim, $V_{[OPQRW]}=75 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times A_{[OPQR]}\times z_W=75 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times 5^2\times z_W=75 \Leftrightarrow z_W=\frac{225}{25} \Leftrightarrow z_W=9$

$\therefore\ W\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},9\right)$

Teste Intermédio 10.º ano, maio 2010

11. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxy, a reta r, que interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2 e o eixo de Oy no ponto de ordenada 2.

Qual é a equação reduzida da reta r ?



(A) $y=2x+2$ **(B)** $y=-2x+2$ **(C)** $y=-x+2$ **(D)** $y=x+2$

Temos os pontos $(2,0)$ e $(0,2)$.

$$m_r=\frac{0-2}{2-0}\Leftrightarrow m_r=-1$$

$\therefore \ y=-x+2$

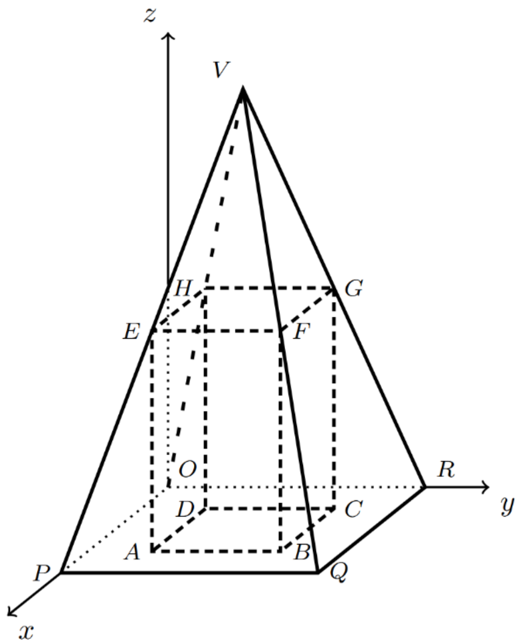
OPÇÃO: C

Teste Intermédio 10.º ano, janeiro 2010

12. Na figura, estão representados, num referencial o.n. Oxy, a pirâmide quadrangular regular $[VOPQR]$ e o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- os vértices P e R da pirâmide pertencem aos eixos coordenados Ox e Oy, respetivamente;
- uma das bases da prisma está contida na base da pirâmide e cada vértice da outra base pertence a uma aresta da pirâmide.



Preencha cada um dos espaços seguintes, de modo a obter afirmações verdadeiras quanto à posição relativa das retas e /ou planos.

Copie as afirmações obtidas para a sua folha de respostas.

As retas DQ e VF são ....

As retas EH e .... *são complanares.*

A reta PQ e o plano HGB são ....

A reta FQ e o plano ADH são ....

Os planos BQV e .... *são perpendiculares.*

As retas DQ e VF são **concorrentes**.

As retas EH e ***AB*** *são complanares.*

A reta PQ e o plano HGB são **paralelos**.

A reta FQ e o plano ADH são **concorrentes** .

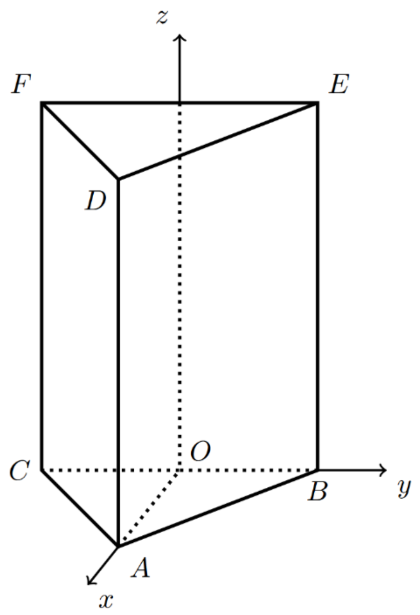
Os planos BQV e ***PQR*** *são perpendiculares.*

Teste Intermédio 10.º ano, janeiro 2010

13. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular não regular $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:

- as bases são triângulos isósceles $\left(\overline{AB}=\overline{AC}\ \text{ e }\ \overline{DE}=\overline{DF}\right)$;
- a base $[ABC]$ está contida no plano Oxy;
- as arestas laterais do prisma são perpendiculares às bases;
- o ponto A tem coordenadas $(4,0,0)$;
- o ponto E tem coordenadas $(0,3,8)$;
- o ponto F é o simétrico do ponto E, relativamente ao plano Oxz.



Determine a área lateral do prisma.

As faces laterais do prisma são retângulos.

$\overline{BE}=z_E=8$

$E(0,3,8)$ e $D(4,0,8)$

$\overline{DE}=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2+(8-8)^2}=\sqrt{25}=5$

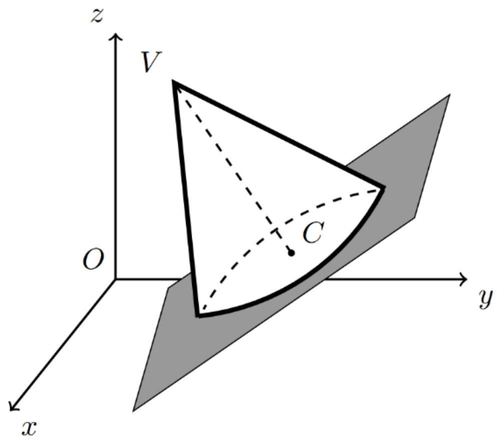
Como E e F são simétricos relativamente ao plano Oxz, então $\overline{EF}=2\times y_E=2\times 3=6$

Como as bases do prisma são tgriângulos isósceles temos que $[ABED]$ e $[ACFD]$ são iguais

$\therefore\ A_{\substack{\text{lateral}\\\text{prisma}}}=2\times A_{[ABED]}+A_{[BCEF]}=2\times(5\times 8)+6\times 8=80+48=128$

Teste Intermédio 10.º ano, maio 2009

14. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.



Sabe-se que:

- o vértice V do cone tem coordenadas $(1,2,6)$;
- o ponto C é o centro da base do cone.

Seja W o ponto simétrico do ponto V, em relação ao plano Oxy.

Indique as coordenadas do ponto W e escreva uma condição que defina o segmento de reta $[VW]$.

O simétrico do V em relação ao eixo Oxy, tem a mesma abcissa, ordenada e cota simétrica.

Assim, $W(x_V, y_V, -z_V) = (1,2,-6)$

A reta VW é paralela ao eixo Oz, portanto a reta é definida por $VW:\ x=1 \wedge y=2$

Assim, o segmento de reta $[VW]$ tem que ter as cotas compreendidas entre -6 e 6.

$\therefore\ [VW]: x=1 \wedge y=2 \wedge -6 \leq z \leq 6$

Teste Intermédio 10.º ano, janeiro 2009

15. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

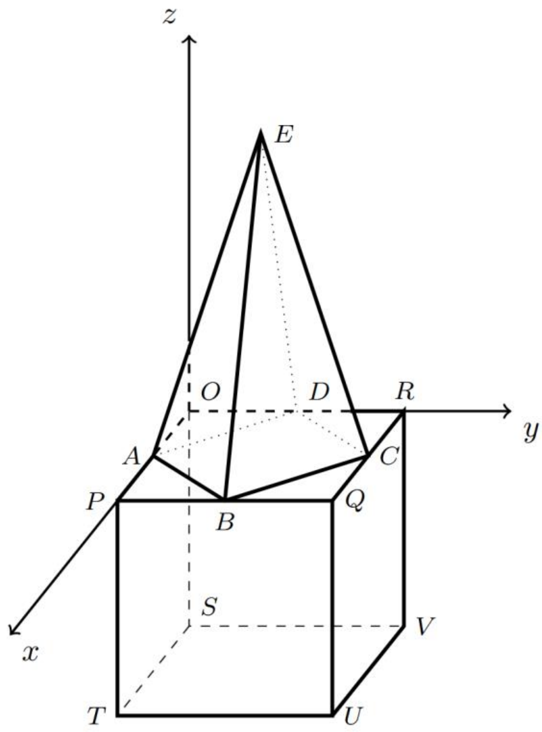
A origem do referencial é um dos vértices do cubo, o vértice P pertence ao eixo Ox e o vértice R pertence ao eixo Oy.

Os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado $[OPQR]$.

O ponto Q tem coordenadas $(2,2,0)$.

O volume do sólido é igual a 10.

Determine a cota do ponto E.



Como $Q(2,2,0)$ então $V_{\text{Cubo}} = 2^3 = 8$

Como os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado $[OPQR]$, então $A(1,0,0)$ e $B(2,1,0)$ e $\overline{AB} = \sqrt{(1-2)^2 + (0-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$

$$V_{\text{Sólido}} = V_{\text{Pirâmide}} + V_{\text{Cubo}} \Leftrightarrow V_{\text{Pirâmide}} = V_{\text{Sólido}} - V_{\text{Cubo}} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 \times z_E = 10 - 8 \Leftrightarrow \frac{2}{3} z_E = 2 \Leftrightarrow z_E = 3$$

Teste Intermédio 10.º ano, janeiro 2009

16. Considere, num referencial o.n. Oxy, a reta r que interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2 e que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 6.

Qual é a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = -3x + 6$ (B) $y = 3x + 6$ (C) $y = -2x + 3$ (D) $y = 2x + 3$

Temos os pontos $(2,0)$ e $(0,6)$

$$m_r = \frac{0-6}{2-0} = -3$$

$\therefore \quad r : y = -3x + 6$

OPÇÃO: A

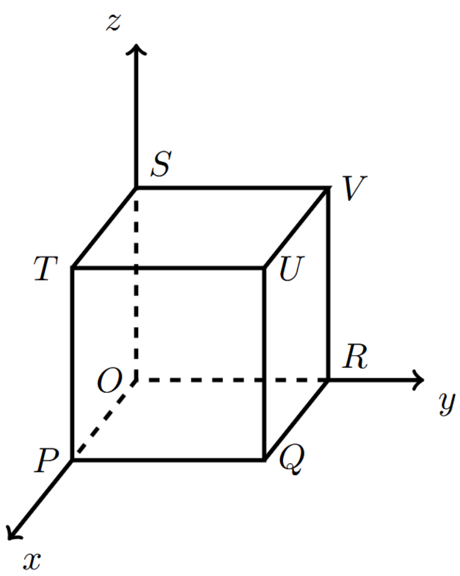
Teste Intermédio 10.º ano, maio 2008

17. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[OPQRSTUV]$.

A aresta $[OP]$ está contida no semieixo positivo Ox, a aresta $[OR]$ está contida no semieixo positivo Oy e a aresta $[OS]$ está contida no semieixo positivo Oz.

O ponto U tem coordenadas $(2,2,2)$.

Defina, por meio de uma condição, a aresta $[UQ]$.



A reta UQ é a interseção dos planos UQR, perpendicular a Oy, logo definido por $y=2$, e UPQ, perpendicular a Ox, logo definido por $x=2$. Assim, a reta UQ é definida por $x=2 \wedge y=2$.

Como é pretendido o segmento de reta $[UQ]$, então a cota vai estar compreendida entre 0 e 2.

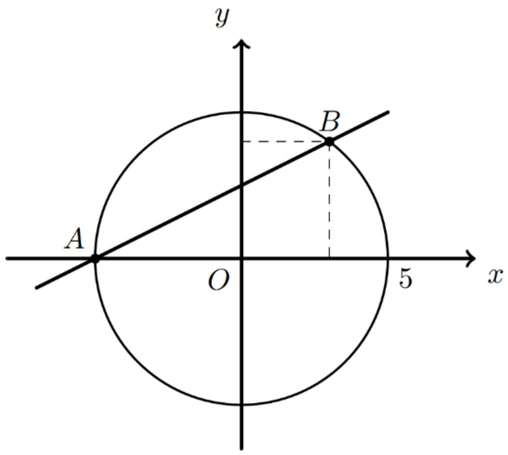
$\therefore \quad [UQ]: x=2 \wedge y=2 \wedge 0 \le z \le 2$

Teste Intermédio 10.º ano, maio 2008

18. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, uma reta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5.

Os pontos A e B pertencem à circunferência.
O ponto A também pertence ao eixo das abcissas.

Admitindo que o declive da reta é igual a $\frac{1}{2}$, resolva a duas alíneas seguintes.



18.1. Mostre que uma equação da reta AB é $x-2y+5=0$.

Sabe-se que:

- o declive da reta é $\frac{1}{2}$, então a reta é do tipo $y=\frac{1}{2}x+b$
- A pertence ao semieixo negativo de Ox e à circunferência de raio 5, então $A(-5,0)$

$$0=\frac{1}{2}\times(-5)+b \Leftrightarrow b=\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2y=x+5 \Leftrightarrow x-2y+5=0 \qquad \text{c.q.m.}$$

18.2. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(3,4)$.

B pertence à reta AB de equação $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ e à circunferência de equação $x^2+y^2=25$

$$\begin{cases} x-2y+5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-5 \\ (2y-5)^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-5 \\ 4y^2-20y+25+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-5 \\ 5y^2-20y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

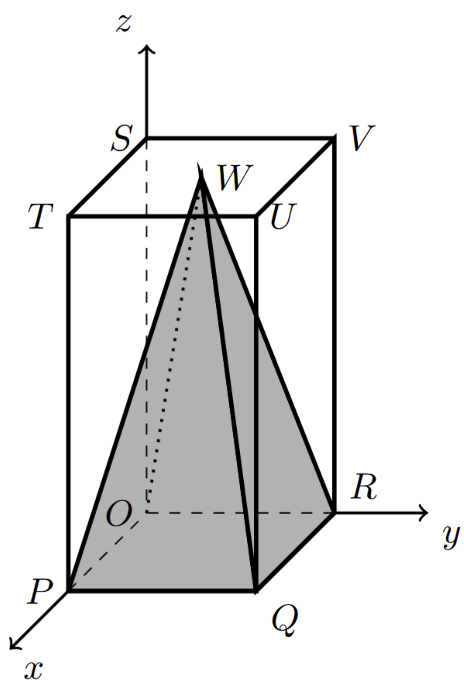
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-5 \\ y(5y-20)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-5 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2y-5 \\ 5y-20=0 \end{cases} \underset{y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=2y-5 \\ 5y-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-5 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\times4-5 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\therefore\ B(3,4) \qquad \text{c.q.m.}$$

Teste Intermédio 10.º ano, janeiro 2008

19. Na figura estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma e uma pirâmide quadrangulares regulares, com a mesma altura.



A base do prisma, que coincide com a base da pirâmide, está contida no plano Oxy .

O vértice P pertence ao eixo Ox.
O vértice R pertence ao eixo Oy.
O vértice S pertence ao eixo Oz.
O vértice U tem coordenadas $(2,2,4)$.

Escreva uma condição que defina a reta TU.

$U(2,2,4)$ e $T(2,0,4)$

Logo, $TU: x=2 \wedge z=4$

Exame 2001, época especial

20. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, uma reta r, perpendicular ao plano Oyz.
Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A reta r é perpendicular ao plano Oxy.
(B) A reta r está contida no plano Oxy.
(C) A reta r é perpendicular ao eixo Ox.
(D) A reta r é paralela ao eixo Ox.

(A) É falsa porque a reta r é paralela ao plano Oxy

(B) Não é necessariamente verdadeira porque a reta r pode ser um conjunto de pontos com cota não nula.

(C) É falsa porque a reta r é paralela ao eixo Ox.

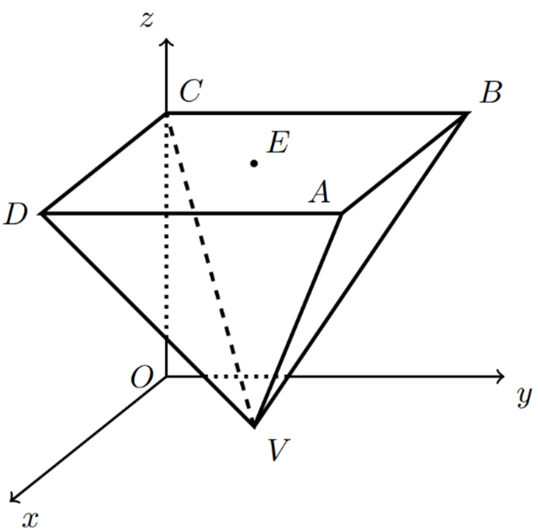
(D) Como a reta é perpendicular ao plano Oyz também é perpendicular a todas as retas contidas no plano Oyz, em particular aos eixos Oy e Oz, e assim paralela ao eixo Ox.

OPÇÃO: D

Exame 2000, prova de reserva

21. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

- a base da pirâmide é paralela ao plano Oxy;
- o ponto A tem coordenadas $(8,8,7)$;
- o ponto B pertence ao plano Oyz;
- o ponto C pertence ao eixo Oz;
- o ponto D pertence ao plano Oxz;
- o ponto E é o centro da base da pirâmide;
- o vértice V da pirâmide pertence ao plano Oxy.



Determine o perímetro de uma face lateral da pirâmide.

Vamos determinar o perímetro, por exemplo, da face $[ABV]$

$A(8,8,7)$, então, $B(0,8,7)$ e $V(4,4,0)$

$$\overline{AB}=\sqrt{(8-0)^2+(8-8)^2+(7-7)^2}=\sqrt{8^2}=8$$

Como a pirâmide é regular então as arestas laterais têm o mesmo comprimento, isto é, $\overline{AV}=\overline{BV}$

$$\overline{AV}=\sqrt{(8-4)^2+(8-4)^2+(7-0)^2}=\sqrt{16+16+49}=9$$

$$\therefore\ P_{[ABV]}=\overline{AB}+2\overline{AV}=8+2\times 9=26$$

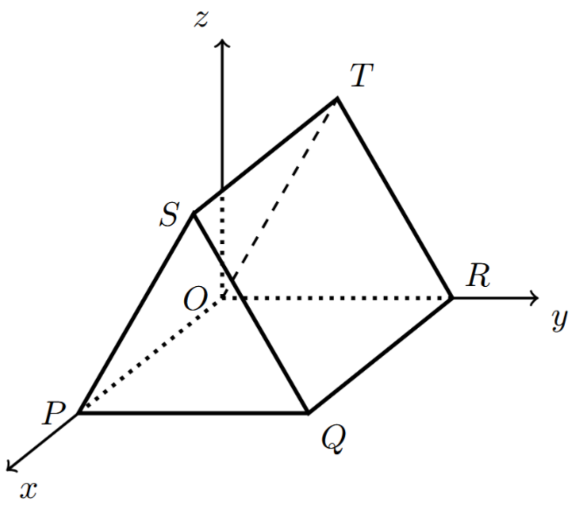
Exame 2000, época especial

22. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular regular.

Sabe-se que:

- o vértice O coincide com a origem do referencial;
- o vértice P pertence ao semieixo positivo Ox;
- o vértice R pertence ao semieixo positivo Oy;
- o segmento de reta $[QR]$ tem comprimento 6.

Sabendo que a área lateral do prisma é 72, determine as coordenadas do ponto S.



Como a área lateral do prisma é 72, e sabendo que a área lateral é igual à soma dos três retângulos, em particular o retângulo $[QRST]$, temos que

$$A_{[QRST]} = \frac{72}{3} = 24$$

$$A_{[QRST]} = \overline{QR} \times \overline{QS} \Leftrightarrow 6 \times \overline{QS} = 24 \Leftrightarrow \overline{QS} = 4$$

Como o prisma é regular, as bases são triângulos equiláteros.

Assim, seja M ponto médio de $[PQ]$, então $\overline{PM} = 2$

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, $\overline{PM}^2 + \overline{SM}^2 = \overline{PS}^2 \Leftrightarrow 2^2 + \overline{SM}^2 = 4^2 \Leftrightarrow \overline{SM}^2 = 12 \Leftrightarrow$

$$\underset{\overline{SM}>0}{\Leftrightarrow} \overline{SM} = \sqrt{12}$$

Assim, como S tem a mesma abcissa do ponto P, a mesma ordenada de M e a cota igual a $\overline{SM}$, temos que as coordenadas de S são $\left(6, 2, \sqrt{12}\right)$

Exame 2000, 1.ª fase – 2.ª chamada

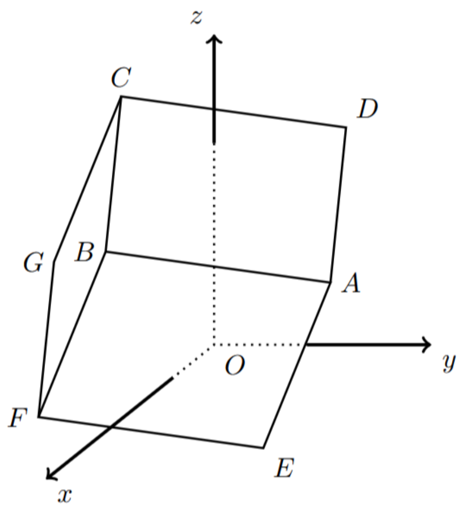
23. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição $\begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ define:

(A) o conjunto vazio (B) um ponto (C) uma reta (D) um plano

OPÇÃO: C

Exame 1999, época especial

24. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo.



Sabe-se que:

- $[ABCD]$ é uma face do cubo;
- $[EFGH]$ é a face oposta à face $[ABCD]$ (o ponto H não está representado na figura);
- $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ e $[DH]$ são quatro arestas do cubo;
- o ponto A tem coordenadas $(3,5,3)$;
- o ponto D tem coordenadas $(-3,3,6)$;
- o ponto E tem coordenadas $(1,2,-3)$.

Determine o volume do cubo.

Para determinar o volume do cubo, basta calcular o comprimento de uma das arestas.

$$\overline{AD}=\sqrt{(3+3)^2+(5-3)^2+(3-6)^2}=\sqrt{49}=7$$

$$\therefore \quad V_{\text{Cubo}}=7^3=343 \text{ u.v.}$$

Exame 1999, época especial

25. Qual das condições seguintes define, num referencial o.n. $Oxyz$, uma reta paralela ao eixo Oy?

(A) $x=1\wedge y=2\wedge z=3$

(B) $x=2\wedge z=1$

(C) $x=y=z$

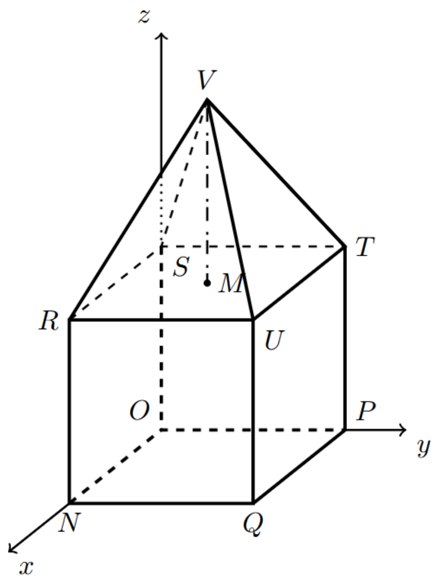
(D) $y=1$

Num referencial $Oxyz$, uma reta paralela a um dos eixos é definida por duas coordenadas, excetuando a coordenada do eixo que é paralelo.

OPÇÃO: B

Exame 1998, prova para militares

26. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um sólido formado por um cubo e uma pirâmide quadrangular regular.



- a base do pirâmide coincide com a face superior do cubo;
- o vértice O coincide com a origem do referencial;
- o vértice N pertence ao semieixo positivo Ox;
- o vértice P pertence ao semieixo positivo Oy;
- o vértice S pertence ao semieixo positivo Oz;
- a altura da pirâmide, $\overline{VM}$, é igual ao comprimento da aresta do cubo;
- o vértice V tem coordenadas $(3,3,12)$

Justifique que $\overline{UQ}=6$ e que $\overline{UV}=3\sqrt{6}$.

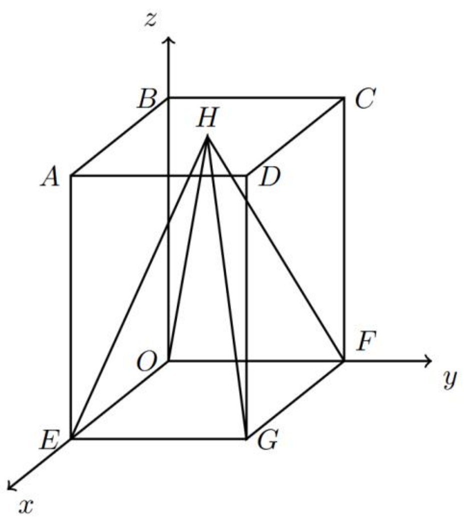
Como $\overline{VM}=\overline{UQ}$, $V(3,3,12)$ e $\overline{VM}+\overline{UQ}=12 \Leftrightarrow \overline{UQ}+\overline{UQ}=12 \Leftrightarrow 2\overline{UQ}=12 \Leftrightarrow \overline{UQ}=6$ c.q.m.

$U(6,6,6)$ e $V(3,3,12)$

$\overline{UV}=\sqrt{(6-3)^2+(6-3)^2+(6-12)^2}=\sqrt{9+9+36}=\sqrt{54}=\sqrt{9\times 6}=3\sqrt{6}$

Exame 1998, 1.ª fase – 1.ª chamada

27. Na figura estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular e uma pirâmide cuja base $[OEFG]$ coincide com a do prisma e está assente no plano Oxy.
O vértice da pirâmide coincide com o centro da base superior do prisma.



O ponto G tem coordenadas $(4,4,0)$.

Sabendo que, na unidade considerada, o volume do prisma é igual a 96, mostre que o ponto H tem coordenadas $(2,2,6)$

Como o prima é quadrangular regular, a base é um quadrado.
Sabemos que $G(4,4,0)$, então a aresta da base é 4, e portanto $A_{[OEFG]}=4\times 4=16$

$$V_{[ABCDOEFG]}=96 \Leftrightarrow A_{[OEFG]}\times \text{Altura}=96 \Leftrightarrow 16\times \text{Altura}=96 \Leftrightarrow \text{Altura}=\frac{96}{16} \Leftrightarrow \text{Altura}=6$$

Como H coincide como centro da base superior do prisma, temos que:

$$H\left(\frac{x_G}{2},\frac{y_G}{2},\text{Altura}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{4}{2},6\right)=(2,2,6) \quad \text{c.q.m.}$$

Exame 1997, prova para militares