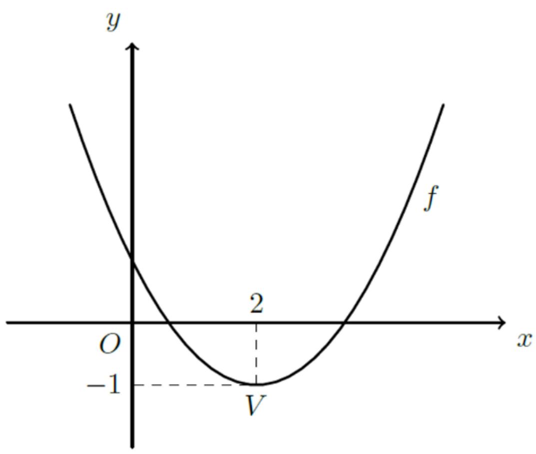
1. Na figura ao lado está representada, num referencial o.n. Oxy, parte da parábola que é o gráfico de uma função f.

Sabe-se que:

- a parábola interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,1)$;
- o ponto V, vértice da parábola, tem coordenadas $(2,-1)$.



A função f pode ser definida por uma expressão do tipo $f(x)=a(x-k)^2+h$, onde a, h e k são números reais.

Indique o valor de h e o valor de k, e determine o valor de a.

O vértice da parábola é $V(2,-1)$, então $f(x)=a(x-2)^2-1$

Como $(0,1)$ pertence à parábola significa que $f(0)=1$

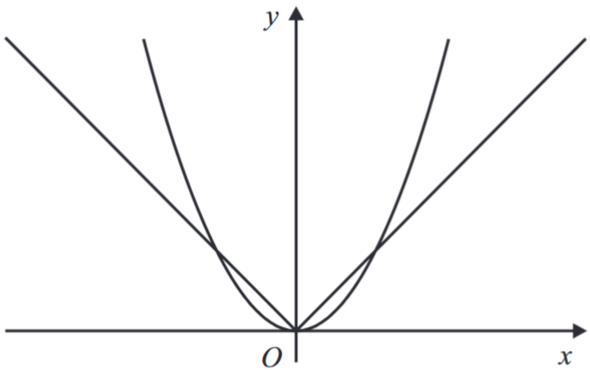
$$f(0)=1 \Leftrightarrow a(0-2)^2-1=1 \Leftrightarrow 4a=2 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)-1$$

$$\therefore\ h=-1\ ;\ k=2\ ;\ a=\frac{1}{2}$$

Teste Intermédio 10.º Ano – março 2012

2. Na figura, estão representadas graficamente as funções f e g, de domínio IR, definidas, respetivamente, por $f(x)=x^2$ e $g(x)=|x|$.



Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto solução da inequação $f(x)<g(x)$?

(A) $]-1,0[\cup]0,1[$

(B) $]-1,0[\cup]1,+\infty[$

(C) $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

(D) $]-\infty,-1[\cup]0,1[$

$f(x)<g(x)\Leftrightarrow x^2-|x|<0$

$$|x|=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 0 \\ -x & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$x\geq 0$

$x^2-x<0$

C.A.
$x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=1$

$x^2-x<0\Leftrightarrow x\in]0,1[$

$x<0$

$x^2+x<0$

C.A.
$x^2+x=0\Leftrightarrow x(x+1)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=-1$

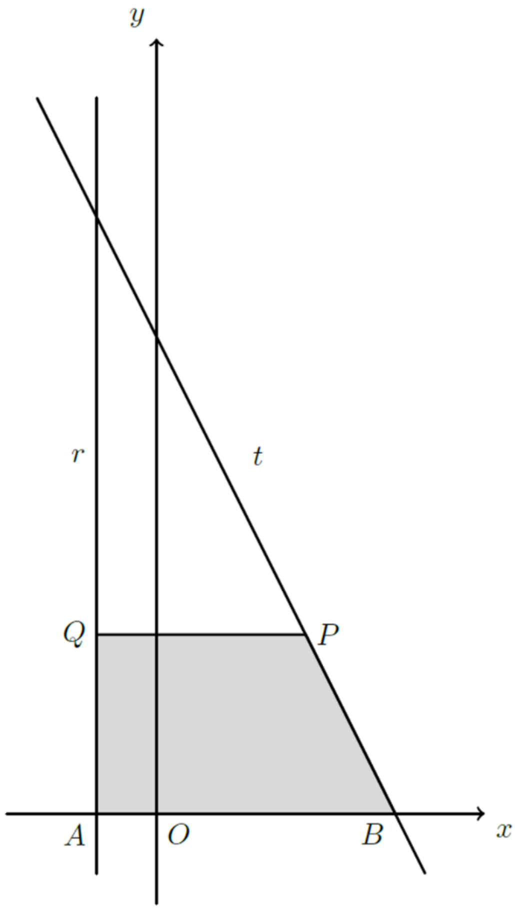
$x^2+x<0\Leftrightarrow x\in]-1,0[$

$\therefore\ x\in]-1,0[\cup]0,1[$

OPÇÃO: A

Teste Intermédio 10.º Ano – março 2012

3. Na figura ao lado, estão representadas, num referencial o.n. Oxy, as retas r e t.
Os pontos A e B são, respetivamente, os pontos de interseção das retas r e t com o eixo Ox.
O ponto C é o ponto de interseção das retas r e t.



Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $x=-1$;
- a reta t é definida pela equação $y=-2x+8$.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do sgmento de reta $[BC]$, nunca coincidindo com o ponto B, nem com o ponto C, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[AC]$, acompanhando o movimento do ponto P, de forma que a ordenada do ponto Q seja sempre igual à ordenada do ponto P.

Seja x a abcissa do ponto P.

Resolva os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

3.1. Mostre que a área do trapézio $[ABPQ]$, é dada em função de x, por

$$S(x)=-x^2-2x+24,\ \left(x\in\left]-1,4\right[\right)$$

Sabe-se que:

- $A(-1,0)$, A pertence à reta $x=-1$ e ao eixo das abcissas
- $B(x,0)$ porque pertence ao eixo das abcissas

  As coordenadas de B são $0=-2x+8 \Leftrightarrow x=4$, assim, $B(4,0)$
- $P(x,-2x+8)$, P pertence à reta $y=-2x+8$
- $Q(-1,-2x+8)$, Q pertence à reta $x=-1$ e tem a mesma ordenada do ponto P
- A abcissa do ponto P pode variar entre as abcissas dos pontos A e B, isto é, $x_P\in\left]-1,4\right[$

$$S(x)=A_{[ABPQ]}=\frac{\overline{AB}+\overline{QP}}{2}\times\overline{QA}$$

$$\overline{AB}=|x_B-x_A|=|4-(-1)|=5\ \ ;\ \ \overline{QP}=|x_P-x_Q|=|x-(-1)|=x+1\ \ ;\ \ \overline{QA}=y_Q=-2x+8$$

$$S(x)=A_{[ABPQ]}=\frac{\overline{AB}+\overline{QP}}{2}\times\overline{QA}=\frac{5+x+1}{2}\times(-2x+8)=\frac{x+6}{2}\times(-2x+8)=\frac{-2x^2-12x+8x+48}{2}=$$
$$=\frac{-2x^2-4x+48}{2}=-x^2-2x+24\ ,\ x\in\left]-1,4\right[\quad \text{c.q.m.}$$

3.2. Determine os valores de x para os quais a área do trapézio $[ABPQ]$ é superior a 21.

Apresente a sua resposta na forma de um intervalo de números reais.

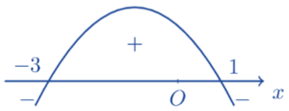
Nota: Tenha em conta que $S(x)=-x^2-2x+24,\ \left(x\in\left]-1,4\right[\right)$

$$S(x)>21\Leftrightarrow -x^2-2x+24>21\Leftrightarrow -x^2-2x+3>0$$

CA:

$$-x^2-2x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times(-1)\times 3}}{-2}\Leftrightarrow x=-3\vee x=1$$

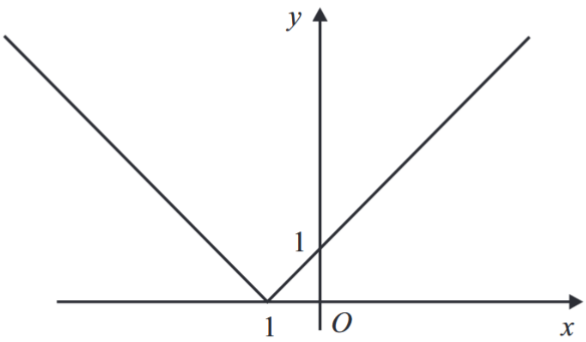
$$-x^2-2x+3>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in\left]-3,1\right[$$



$$\therefore\ x\in\left]-3,1\right[\cap\left]-1,4\right[=\left]-1,1\right[$$

Teste Intermédio 10.º Ano – março 2012

4. Na figura, estão representadas, num referencial o.n. Oxy, duas semirretas de origem no ponto de coordenadas $(-1,0)$, cuja união é o gráfico de uma função h, de domínio IR.



Qual das expressões seguintes pode definir a função h?

(A) $h(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{se } x<0\\ x+1 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

(B) $h(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{se } x<0\\ x-1 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$

(C) $h(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{se } x<-1\\ x-1 & \text{se } x\geq -1\end{cases}$

(D) $h(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{se } x<-1\\ x+1 & \text{se } x\geq -1\end{cases}$

A função módulo que caracteriza a função do gráfico é $|x+1|$

$$|x+1|=\begin{cases}-x-1 & \text{se } x+1<0\\ x+1 & \text{se } x+1\geq 0\end{cases}=\begin{cases}-x-1 & \text{se } x<-1\\ x+1 & \text{se } x\geq -1\end{cases}$$

OPÇÃO: D

Teste Intermédio 10.º Ano – março 2012

5. Na figura ao lado, está representada num referencial o.n. Oxy, a reta r, definida pela equação $y=2x-2$.

Tal como a figura sugere, A e B são os pontos de coordenadas $(1,0)$ e $(6,0)$, respetivamente, e C é o ponto da reta r de abcissa 6.

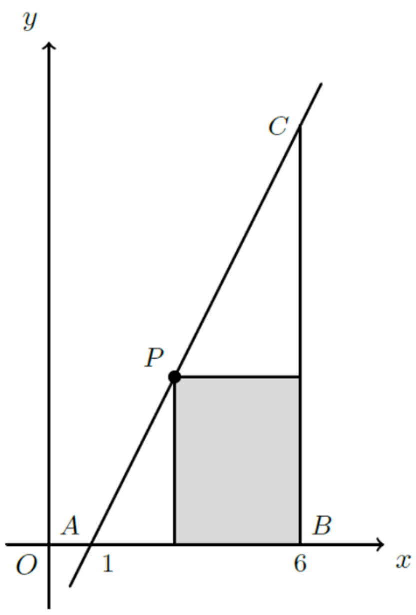
Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[AC]$, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto C.

A cada posição do ponto P corresponde um retângulo em que uma das diagonais é o segmento de reta $[BP]$ e em que um dos lados está contido no eixo Ox.

Seja x a abcissa do ponto P $\left(x\in\left]1,6\right[\right)$.

Resolva os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

Nota: A calculadora pode ser utilizado em cálculos numéricos.



5.1. Mostre que a área do retângulo é dada, em função de x, por

$$S(x)=-2x^2+14x-12$$

Coordenadas do ponto $P(x_P,y_P)=(x_P,2x_P-2)$

$A_{\text{retângulo}}=\text{comprimento lado horizontal}\times\text{comprimento lado vertical}$

Comprimento lado horizontal: $x_B-x_P=6-x_P$

Comprimento lado vertical: $y_P=2x_P-2$

$S(x)=A_{\text{retângulo}}=(6-x)(2x-2)=12x-12-2x^2+2x=-2x^2+14x-12\ ,\ x\in\left]1,6\right[$ c.q.m.

5.2. Determine os valores de x para os quais a área do retângulo é inferior a 8.

Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

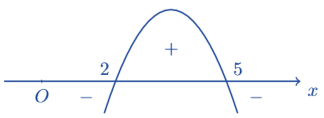
$-2x^2+14x-12<8\Leftrightarrow -2x^2+14x-20<0$

C.A.

$-2x^2+14x-20=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-14\pm\sqrt{(14)^2-4\times(-2)\times(-20)}}{-2}\Leftrightarrow x=2\vee x=5$

$-2x^2+14x-20<0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,2\right[\cup\left]5,+\infty\right[$



$\therefore\ x\in\left(\left]-\infty,2\right[\cup\left]5,+\infty\right[\right)\cap\left]1,6\right[=\left]1,2\right[\cup\left]5,6\right[$

Teste Intermédio 10.º Ano – maio 2011

6. Sejam a , b e c três números reais.

Seja f a função, de domínio IR, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Sabe-se que:

- $a > 0$;
- a função tem um único zero, que é o número real 5.

Qual é o contradomínio de f ?

(A) $]-\infty, 0]$ (B) $[0, +\infty[$ (C) $]-\infty, 5]$ (D) $[5, +\infty[$

Sabemos que a concavidade da parábola está voltada para cima porque $a > 0$

Como 5 é o único zero, então $D'_f = [0, +\infty[$

OPÇÃO: B

Teste Intermédio 10.º Ano – maio 2010

7. Considere a função g, de domínio IR, definida por $g(x) = |x| + 3$

Qual das equações seguintes tem duas soluções distintas?

(A) $g(x) = 1$ (B) $g(x) = 2$ (C) $g(x) = 3$ (D) $g(x) = 4$

(A) $|x| + 3 = 1 \Leftrightarrow |x| = -2$ impossível em IR

(B) $|x| + 3 = 2 \Leftrightarrow |x| = -1$ impossível em IR

(C) $|x| + 3 = 3 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ só tem um zero

(D) $|x| + 3 = 4 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

OPÇÃO: D

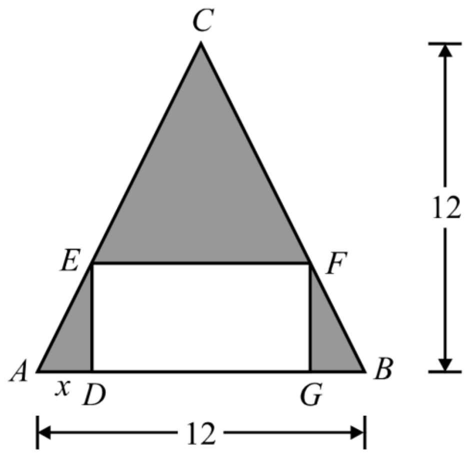
Teste Intermédio 10.º Ano – maio 2010

8. A figura representa o projeto de um canteiro com a forma de um triângulo isósceles $\left(\overline{AC}=\overline{BC}\right)$.

Nesse triângulo a base [*AB*] e a altura relativa à base medem ambas 12 metros.

O canteiro vai ter uma zona retangular, destinada à plantação de flores, e uma zona relvada, representada a sombreado na figura.

O lado [*DG*] do retângulo está contido em [*AB*] e os vértices *E* e *F* pertencem, respetivamente, a [*AC*] e a [*BC*].



Seja x a distância, em metros, do ponto A ao ponto D $\left(x\in\left]0,6\right[\right)$.

Resolva os três itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos

8.1. Mostre que a área, em metros quadrados, da zona relvada é dada, em função de x por

$$S\left(x\right)=4x^2-24x+72$$

A zona relvada é igual à diferença entre a área do triângulo [*ABC*] e o retângulo [*DEFG*].

Seja *H* a projeção ortogonal do ponto *C* no segmento de reta [*AC*].

Desta forma o triângulo [*ABC*] fica dividido em dois iguais [*ACH*] e [*BCH*].

Assim, o triângulo [*ACH*] fica decomposto em dois triângulos semelhantes [*ACH*] e [*ADE*].

Como a altura do triângulo [*ABC*] é igual à base do mesmo [*AB*], então $\overline{CH}=2\overline{AH}$, logo $\overline{ED}=2\overline{AD}$ ([*ACH*] ~ [*ADE*]).

Portanto $\overline{ED}=2x$

Como, $\overline{DG}=12-2x$, temos que $A_{[DEFG]}=\left(12-2x\right)\times 2x=24x-4x^2$

$$\therefore\ A_{\text{zona relvada}}=S\left(x\right)=A_{[ABC]}-A_{[DEFG]}=\frac{12\times 12}{2}-\left(24x-4x^2\right)=72-24x+4x^2=4x^2-24x+72$$

8.2. Determine o valor de x para o qual a área da zona relvada é mínima e calcule essa área.

$S(x)$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, logo o vértice da parábola é o mínimo absoluto da função.

$$4x^2-24x+72=4\left(x^2-6x\right)+72=4\left(x^2-6x+3^2-3^2\right)+72=4\left(x-3\right)^2-36+72=$$
$$=4\left(x-3\right)^2+36$$

Logo o vértice da parábola é $(3,36)$

Portanto o valor de x para o qual a zona relvada é mínima é 3 e a área é 36

8.3. Determine o conjunto de valores de x para os quais a área do zona relvada é superior a 40 m^2 .

Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

$$4x^2-24x+72>40 \Leftrightarrow 4x^2-24x+32>0 \Leftrightarrow x^2-6x+8>0$$

C.A.

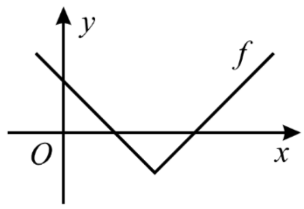
$$x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\times 8}}{2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=4$$

$$x^2-6x+8>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,2\right[\cup\left]4,+\infty\right[$$

$$\therefore\ x\in\left(\left]-\infty,2\right[\cup\left]4,+\infty\right[\right)\cap\left]0,6\right[=\left]0,2\right[\cup\left]4,6\right[$$

Teste Intermédio 10.º Ano – maio 2010

9. Na figura está o gráfico de uma função de domínio IR, definida por $f(x)=|x-a|+b$, em que a e b designam dois números reais.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a>0\wedge b>0$ (B) $a>0\wedge b<0$ (C) $a<0\wedge b>0$ (D) $a<0\wedge b<0$

A função f é o translação horizontal da função $|x|$ associada ao vetor $\vec{v}(a,0)$ com $a>0$ seguida de uma translação vertical associada ao vetor $\vec{u}(0,b)$ com $b<0$

OPÇÃO: B

Teste Intermédio 10.º Ano – maio 2009

10. Considere a função g, de domínio IR, definida por $g(x)=|x|+7$.

Qual das equações seguintes tem duas soluções distintas?

(A) $g(x)=3$ (B) $g(x)=5$ (C) $g(x)=7$ (D) $g(x)=9$

(A) $|x|+7=3 \Leftrightarrow |x|=-4$ impossível em IR

(B) $|x|+7=5 \Leftrightarrow |x|=-2$ impossível em IR

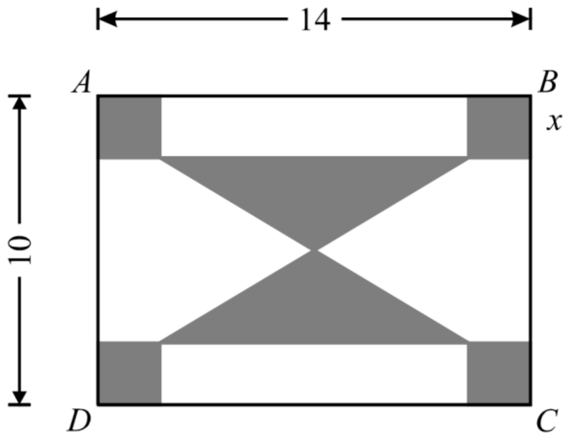
(C) $|x|+7=7 \Leftrightarrow |x|=0 \Leftrightarrow x=0$ só tem um zero

(D) $|x|+7=9 \Leftrightarrow |x|=2 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$

OPÇÃO: D

Teste Intermédio 10.º Ano – maio 2009

11. Na figura está representado um retângulo [*ABCD*].



Este retângulo é o esboço de uma placa decorativa de 14 cm de comprimento por 10 cm de largura e que será constituída por uma parte em metal (representada a cinzento) e por uma parte em madeira (representada a branco).

A parte em metal é formada por dois triângulos iguais e por quatro quadrados também iguais.

Cada triângulo tem no centro do retângulo [*ABCD*].

Seja x o lado de cada quadrado, medido em cm $\left(x \in \left]0,5\right[\right)$.

Sem recorrer à calculadora, resolva os três itens seguintes.

11.1. Mostre que a área, em cm², da parte em metal da placa decorativa é dada, em função de x, por

$$A(x) = 6x^2 - 24x + 70$$

Quadrados: área de cada quadrado x^2 , então área dos 4 quadrados é $4x^2$

Triângulos: área de cada triângulo $\frac{(14-2x)(5-x)}{2} = \frac{70-24x+2x^2}{2}$, então a área dos dois triângulos é $\cancel{2} \times \frac{2x^2-24x+70}{\cancel{2}} = 2x^2-24x+70$

$A(x) = 4x^2 + 2x^2 - 24x + 60 = 6x^2 - 24x + 70$ c.q.m.

11.2. Determine o valor de x para o qual a parte em metal é mínima e calcule essa área.

$$A(x) = 6x^2 - 24x + 70 = 6\left(x^2 - 4x\right) + 70 = 6\left(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2\right) + 70 = 6(x-2)^2 - 24 + 70 =$$
$$= 6(x-2)^2 + 46$$

Portanto o vértice da parábola é $(2, 46)$

Logo, o valor de x para o qual a área é mínima é 2 e o valor da área é 46

11.3. Determine o valor de x para o qual a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira.

Para que a área da de metal seja igual à área da parte de madeira temos que a área da parte de metal é igual a metade da área total da placa.

Assim, $A_{[ABCD]} = 14 \times 10 = 140 \text{ cm}^2$

Então, $6x^2 - 24x + 70 = \frac{140}{2} \Leftrightarrow 6x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \Leftrightarrow$

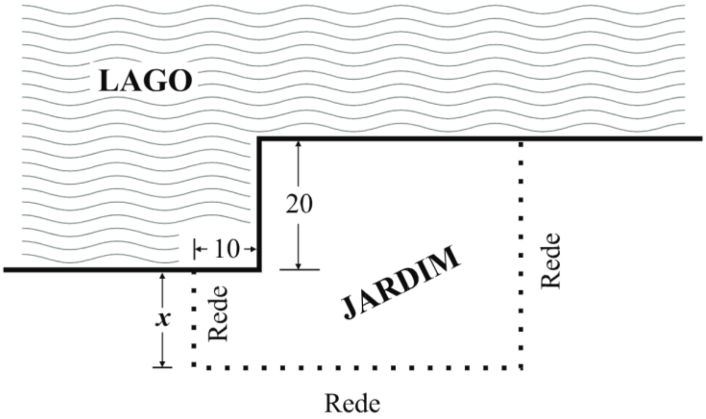
$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 4$

Teste Intermédio 10.º Ano – maio 2009

12. Pretende-se construir um jardim junto a um lago, conforme a figura ilustra.

Três lados do jardim confinam com o lago e os outros três ficam definidos por uma rede.

Pretende-se que lados consecutivos do jardim sejam perpendiculares.



As dimensões indicadas na figura estão expressas em metros.

Tal como a figura mostra, x é a medida, em metros, de um dos lados do jardim.

Vão ser utilizados, na sua totalidade, 100 metros de rede.

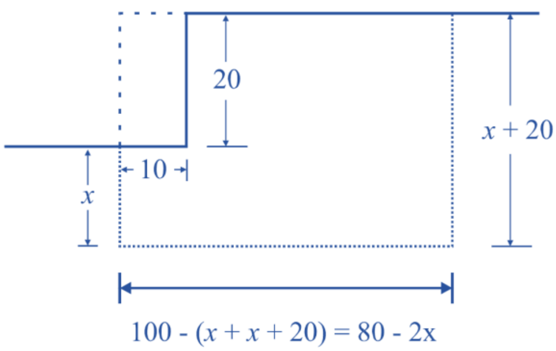
12.1. Mostre que a área, em m², do jardim, é dade, em função de x, por

$$a(x) = -2x^2 + 40x + 1400$$

Sabe-se que:

- um dos lados tem x metros de comprimento;
- o lado oposto tem $x+20$ metros de comprimento;
- o terceiro lado tem $100-(x+x+20)=80-2x$ metros de comprimento, pois a rede tem 100 metros.

Fazendo um esquema, temos:



Assim, a área do jardim é dada em função de x por:

$$a(x)=(80-2x)(x+20)-(10\times 20)=80x-1600-2x^2-40x-200=-2x^2+40x+1400 \text{ c.q.m.}$$

12.2. Sem recorrer à calculadora, determine o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e determine essa área.

A função a define uma parábola com a concavidade voltada para baixo, logo o vértice é o máximo da função a.

$$a(x)=-2x^2+40x+1400=-2\left(x^2-20x\right)+1400=-2\left(x^2-20x+10^2-10^2\right)+1400=$$
$$=-2(x-10)^2+200+1400=-2(x-10)^2+1600$$

Portanto o valor de x para o qual a área é máxima é 10 e área máxima é igual a 1600.

Teste Intermédio 10.º Ano – maio 2008