

Proposta de resolução

1. $\lim a_n = \lim \frac{3n - \cos(n)}{n} = \lim \frac{3n}{n} - \lim \frac{\cos(n)}{n} = \lim 3 - \lim \left[\frac{1}{n} \cos(n) \right] = 3 - 0 = 3$
- $\lim \left[\frac{1}{n} \cos(n) \right] = 0$, pois $\lim \left(\frac{1}{n} \right) = 0$ e a sucessão definida por $\cos(n)$ é limitada
- $(\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1)$.

Opção correta: (C)

- 2.1. O volume da pirâmide, $V_{[ABCDV]}$, é dado por $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Área da base (A_b)

Como o ponto B é o ponto de interseção do plano $\alpha : x + 2y + 2z + 10 = 0$ com o eixo Oz ,

$$B(0, 0, z_B), z_B \in \mathbb{R}.$$

Assim, tem-se: $0 + 2 \times 0 + 2 \times z_B + 10 = 0 \Leftrightarrow 2z_B = -10 \Leftrightarrow z_B = -5$.

Logo, $B(0, 0, -5)$, pelo que $A_b = \overline{BC}^2 = \left(\sqrt{(-2-0)^2 + (-1-0)^2 + (-3-(-5))^2} \right)^2 = 4 + 1 + 4 = 9$

$$V(0, y, z) \text{ e } C(-2, -1, -3)$$

$\vec{u} = (1, 2, 2)$ é um vetor normal ao plano α . Logo, $\overline{CV}$ é colinear com $\vec{u}$, ou seja,

$$\overline{CV} = k(1, 2, 2) = (k, 2k, 2k), k \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, $\overline{CV} = V - C = (0, y, z) - (-2, -1, -3) = (2, y+1, z+3)$

Portanto, $k = 2$ e $\overline{CV} = (2, 4, 4)$ pelo que, como $\overline{CV} = (2, y+1, z+3)$, vem $y+1 = 4 \Leftrightarrow y = 3$

e $z+3 = 4 \Leftrightarrow z = 1$

Portanto, $V(0, 3, 1)$.

Altura da pirâmide: $h = \|\overline{CV}\| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura} = \frac{1}{3} \times 9 \times 6 = 18$$

2.2. $C\hat{O}P = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OP})$

$\overrightarrow{OC}(-2, -1, -3)$

Um vetor colinear ao vetor $\overrightarrow{OP}$ é $\overrightarrow{OC}(0, 1, 0)$.

Seja $\alpha = C\hat{O}P$.

$$\cos \alpha = \frac{(-2, -1, -3) \cdot (0, 1, 0)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} \times \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{-1}{\sqrt{4+1+9} \times \sqrt{1}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

Logo, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 105,5^\circ$

Opção correta: (A)

3. A sucessão dos comprimentos dos quartos de circunferência é uma progressão geométrica de razão

$\frac{1}{2}$, cujo primeiro termo é $\frac{2\pi \times 1024}{4} = 512\pi$.

Como $S_n = 1023\pi$, vem:

$$512\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1023\pi \Leftrightarrow 512\pi \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 1023\pi \Leftrightarrow 1024\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1023\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1023\pi}{1024\pi} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1023}{1024} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1024} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \Leftrightarrow n = 10$$

Para que o comprimento da espiral seja igual a 1023π cm, é necessário adicionar 10 quartos de circunferência nas condições definidas no enunciado.

4. Relativamente à experiência do enunciado, seja A o acontecimento «o produto dos números saídos é um número par».

O acontecimento contrário de A é $\bar{A}$: «o produto dos números saídos é um número ímpar».

Como o produto dos números saídos é ímpar se os três forem ímpares, relativamente ao acontecimento $\bar{A}$, tem-se:

Número de casos possíveis: 6^3 (em cada lançamento, sai um dos seis números naturais)

Número de casos favoráveis: 3^3 (em cada lançamento, sai um dos 3 números ímpares)

Assim, $P(\bar{A}) = \frac{3^3}{6^3} = \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Logo, a probabilidade pedida é $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

5. Se pretende levar 5 livros do mesmo género, a Dores terá de levar, necessariamente, 5 dos 6 livros de Ficção Científica, ou seja, não levará um dos seis livros deste género, pelo que poderá fazer a escolha de 6 maneiras diferentes.

Opção correta: **(D)**

6. Sejam os acontecimentos:

D: «O *microchip* é defeituoso.»

R: «O resultado do teste foi “Rejeitado”.»

Dados:

$$P(D) = 5\% = 0,05$$

$$P(R|D) = 98\% = 0,98$$

$$P(R|\bar{D}) = 3\% = 0,03$$

Pretende-se calcular $P(\bar{D}|R) = \frac{P(\bar{D} \cap R)}{P(R)}$.

Dos dados obtidos, vem:

- $P(R|D) = \frac{P(R \cap D)}{P(D)}$; $\frac{P(R \cap D)}{0,05} = 0,98 \Leftrightarrow P(R \cap D) = 0,98 \times 0,05 \Leftrightarrow P(R \cap D) = 0,049$
- $P(R|\bar{D}) = \frac{P(R \cap \bar{D})}{P(\bar{D})}$; $\frac{P(R \cap \bar{D})}{0,95} = 0,03 \Leftrightarrow P(R \cap \bar{D}) = 0,95 \times 0,03 \Leftrightarrow P(R \cap \bar{D}) = 0,0285$

Organizando os dados numa tabela, tem-se:

	R	$\bar{R}$	
D	0,049		0,05
$\bar{D}$	0,0285		0,95
	0,0775		1

Portanto, $P(\bar{D}|R) = \frac{P(\bar{D} \cap R)}{P(R)} = \frac{0,0285}{0,0775} \approx 36,8\%$.

A probabilidade pedida é, aproximadamente, igual a 36,8%.

7.

1-Variable $\bar{x}$ = 4 Σx = 60 Σx^2 = 286 σx = 1.75119007 sx = 1.81265393 n = 15	1-Variable sx = 4.2928512 n = 15 $\min X$ = 4 $Q1$ = 8 Med = 12 $Q3$ = 16	LinearReg(ax+b) a = 2.26086956 b = 2.95652173 r = 0.95465086 r^2 = 0.91135827 MSe = 1.75919732 $y = ax + b$
--	---	---

I – b)

II – b)

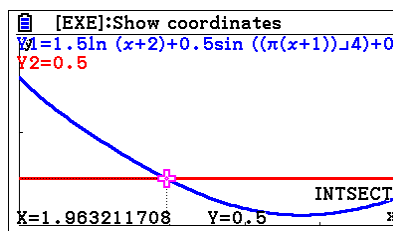
III – c)

IV – a)

8. A resposta ao problema é, por exemplo, a solução da equação $A(t+1) - A(t) = 0,5$.

Na calculadora gráfica:

- $y_1 = 1,5 \ln(t+2) + 0,5 \sin\left(\frac{\pi(t+1)}{4}\right) + 0,2(t+1) - \left[1,5 \ln(t+1) + 0,5 \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 0,2t\right]$
- $y_2 = 0,5$
- $x \in [0, 5]$
- $y \in [0, 1]$ (por exemplo)



Utilizando o comando adequado da calculadora, determinou-se a abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos (imagem acima) e conclui-se que $t \approx 2,0$ anos.

Portanto, a árvore cresceu 50 centímetros, aproximadamente, durante o terceiro ano após ter sido plantada.

9. O conjunto-solução da inequação está contido no conjunto definido, em $\mathbb{R}$, pela condição:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \vee x > 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

Portanto, $x \in]3, +\infty[$.

Resolvendo a inequação, vem:

$$\begin{aligned} \log_3(x^2 - 4x + 3) &\leq 1 + \log_3(x - 1) \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 4x + 3) \leq \log_3 3 + \log_3(x - 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 4x + 3) \leq \log_3[3(x - 1)] \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 3x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Como } x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 6,$$

$$S = [1, 6] \cap]3, +\infty[=]3, 6]$$

10.1. Dado que $D_f = \mathbb{R}$, a função é contínua em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$, uma vez que, em cada caso, se trata da composta, diferença e quociente de funções contínuas.

Para $x = 2$, tem-se:

- $f(2) = 4$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{e^{x-2} - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{e^{x-2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{e^{x-2} - 1} \times \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{e^{x-2} - 1} \times 4 \stackrel{y=x-2}{=} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y - 1} \times 4$

(Considerando $y = x - 2$, se $x \rightarrow 2^-$, $y \rightarrow 0^-$)

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y - 1} \times 4 = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} \times 4 = \frac{1}{1} \times 4 = 4$$

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

(Considerando $y = \ln(x-1) \Leftrightarrow x-1 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 1$, se $x \rightarrow 2^+$, $y \rightarrow 0^+$)

$$\stackrel{y=\ln\left(\frac{x+2}{4}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{4y}{e^y + 1 - 2} = 4 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{e^y - 1} = 4 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} = \frac{4}{1} = 4$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$, então a função é contínua em $x = 0$.

Portanto, a função f é contínua.

10.2. $e \approx 2,72$ e $\frac{e}{2} \approx 1,36$

$$f\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^2 - 4}{e^{\frac{e}{2}-2} - 1} \approx 4,55 \quad e \quad f(e) = \frac{4 \ln(e-1)}{e-2} \approx 3,01$$

Como a função f é contínua em $\left[\frac{e}{2}, e\right]$, uma vez que é contínua em $\mathbb{R}$, e $f(e) < 4 < f\left(\frac{e}{2}\right)$,

então, pelo teorema de Bolzano, a equação $f(x) = 4$ tem pelo menos uma solução no intervalo

$$\left[\frac{e}{2}, e\right].$$

10.3. Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, então não admite qualquer assíntota vertical.

Como $D_f = \mathbb{R}$, vamos calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{e^{x-2} - 1} = \frac{+\infty}{0-1} = -\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} = 0 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln(x-1)}{x-2} =$$

$$y = \ln(x-1) \Leftrightarrow e^y = x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = e^y + 1$$

$$\text{Se } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$$

$$= 4 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y + 1 - 2} = 4 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y - 1} =$$

$$= 4 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} = \frac{4}{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{4}{+\infty - 0} = 0$$

Logo, o gráfico de f tem como única assíntota a reta de equação $y = 0$, quando $x \rightarrow +\infty$

11. $f'(x) = x + 2 \cos x$

$$f''(x) = (x + 2 \cos x)' = 1 - 2 \sin x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin x = 0 \wedge x \in]-\pi, \pi[\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \wedge x \in]-\pi, \pi[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f''	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
f	n.d.	$\cup$	P. I.	$\cap$	P. I.	$\cup$	n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de f :

- tem a concavidade voltada para cima em $]-\pi, \frac{\pi}{6}[$ e em $]\frac{5\pi}{6}, \pi[$;
- tem concavidade voltada para baixo no intervalo $]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}[$;
- tem dois pontos de inflexão, de abcissas $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$.

$$12. \quad z = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^{42}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{-(1 + \sqrt{3}i)}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}.$$

$$|-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Seja } \text{Arg}(-1 - \sqrt{3}i) = \theta$$

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ é um argumento de } z. \\ \theta \in 3.^\circ\text{Q} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} z &= \frac{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Assim:

$$w = z - \bar{z} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ (por exemplo).}$$

$$13.1. \quad A_{[ABCDE]} = 5 \times A_{[AOB]}$$

$$\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{5}$$

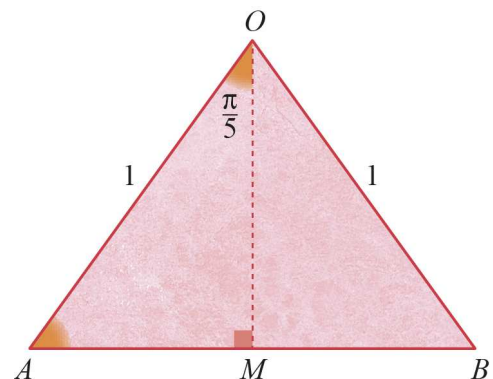
Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

$$\widehat{AOM} = \frac{\pi}{5}$$

Assim:

- $\overline{OM} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$
- $\overline{AM} = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, pelo que $\overline{AB} = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$
- $A_{[AOB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OM}}{2} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2}$

$$\text{Portanto, } A_{[ABCDE]} = 5 \times \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2} = \frac{5}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$



13.2. $\text{Arg}(z_1) = -\frac{7\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{30} = \frac{\pi}{6}$, pelo que $F\left(1, \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ e } wz_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

$$|wz_1| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Seja $\text{Arg}(wz_1) = \theta$.

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 1.^\circ Q \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$wz_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$wz_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow w e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow w = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Opção correta: **(B)**

14. $f(x) = x \ln x - ax$

Como x_0 é zero de f ,

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 - ax_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 (\ln x_0 - a) = 0 \stackrel{x_0 \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} \ln x_0 - a = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = a \Leftrightarrow x_0 = e^a$$

$$f'(x) = (x \ln x - ax)' = x' \ln x + x (\ln x)' - a = \ln x + x \times \frac{1}{x} - a = \ln x + 1 - a$$

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 , é $m_t = f'(x_0) = \ln x_0 + 1 - a$.

Como $x_0 = e^a$, vem $m_t = f'(x_0) = \ln e^a + 1 - a = a + 1 - a = 1$.

Logo, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa é igual a 1.