

Proposta de prova-modelo

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

[junho 2025]

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;

r - raio)

Área de um polígono regular:

$\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;

r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r - raio da base;

g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r - raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r - raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Complexos

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u', \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a, \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}, \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

*1. Seja (a_n) a sucessão definida por $a_n = \frac{3n - \cos(n)}{n}$.

Qual é o valor de $\lim a_n$?

- (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) Não existe

2. Na figura 1, está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, a pirâmide de base quadrada, $[ABCDV]$.

Sabe-se que:

- o vértice B é um ponto do eixo Oz ;
- $[CV]$ é a altura da pirâmide;
- o vértice C (não visível na figura) tem coordenadas $(-2, -1, -3)$;
- o vértice V tem abcissa nula;
- a base da pirâmide, $[ABCD]$ está contida no plano α de equação $x + 2y + 2z + 10 = 0$.

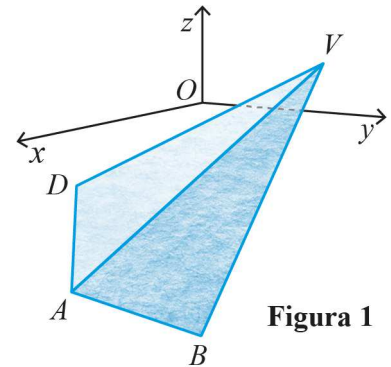


Figura 1

*2.1. Determine o volume da pirâmide.

*2.2. Qual é, em graus e com arredondamento às décimas, a amplitude do ângulo COP , sendo P um ponto pertencente ao semieixo positivo Oy ?

- (A) $105,5^\circ$ (B) $74,5^\circ$ (C) $-105,5^\circ$ (D) $-74,5^\circ$

3. Considere a construção de uma espiral formada por uma sucessão de quartos de circunferência, como parcialmente representado na figura 2.

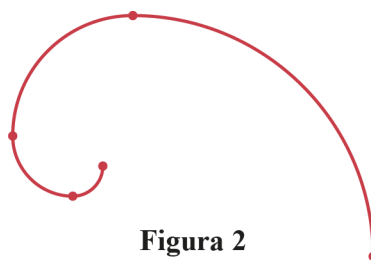


Figura 2

O primeiro quarto de circunferência tem raio igual a 1024 cm. A partir do segundo, o raio de cada quarto de circunferência é igual a metade do raio do quarto de circunferência anterior.

Sabendo que se constroem, sucessivamente, quartos de circunferência desta forma, determine quantos quartos de circunferência terão de ser sucessivamente construídos para que o comprimento da espiral obtida seja igual a 1023π cm.

4. Lança-se um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, três vezes consecutivas.

Qual é a probabilidade de o produto dos números saídos ser um número par?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

- *5. A Dora tem 6 livros diferentes de Ficção Científica, 4 livros diferentes de Romance e 2 livros diferentes de Poesia.

Pretende escolher 5 destes livros para levar numa viagem, sendo que os 5 livros escolhidos devem ser todos do mesmo género.

De quantas maneiras diferentes pode a Dora fazer a sua escolha?

(A) ${}^6C_5 + {}^6C_5$

(B) ${}^6C_5 \times {}^6C_5$

(C) $6 + 4 + 2$

(D) 6

- *6. Numa fábrica de componentes eletrónicos, uma determinada máquina produz *microchips*. Sabe-se que 5% dos *microchips* produzidos por esta máquina são defeituosos.

Para controlar a qualidade, todos os *microchips* são submetidos a um teste automatizado.

Acerca do teste aplicado, sabe-se que:

- só há dois resultados possíveis: "Aprovado" ou "Rejeitado";
- se um *microchip* for defeituoso, a probabilidade de o teste o rejeitar (deteção correta) é de 98%;
- se um *microchip* não for defeituoso, a probabilidade de o teste o rejeitar (erro, ou "falso alarme") é de 3%.

Foi escolhido, ao acaso, um *microchip* produzido por esta máquina.

Sabendo que o teste o rejeitou, qual é a probabilidade de o *microchip* não ser defeituoso? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

- *7. Na tabela seguinte, apresenta-se o número de horas de estudo semanal (x_i) e a classificação obtida no exame de Matemática A (y_i) por 15 alunos da uma turma.

x_i	3	5	2	7	4	6	3	4	6	2	1	6	5	2	4
y_i	10	14	8	17	11	15	9	12	19	8	4	16	16	7	14

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção selecionada.

A média do número de horas de estudo semanal destes 15 alunos é **I** horas.

A mediana das classificações obtidas é **II** valores.

A amplitude interquartil das classificações é **III** valores.

O coeficiente de correlação linear entre o número de horas de estudo e a classificação, arredondado às milésimas, é aproximadamente **IV** .

I	II	III	IV
a) 3,8	a) 11	a) 6	a) 0,955
b) 4	b) 12	b) 7	b) 0,911
c) 4,2	c) 13	c) 8	c) 1,759

- *8. O crescimento de uma árvore é aproximadamente modelado pela função

$$A(t) = 1,5 \ln(t+1) + 0,5 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 0,2t, \quad 0 \leq t \leq 5$$

sendo $A(t)$ a altura média da árvore, em metros, t anos após a sua plantação.

Determine, utilizando a calculadora gráfica, o instante a partir do qual, durante um ano, a altura média da árvore aumentou 50 centímetros.

Apresente o resultado em anos com arredondamento às décimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinala o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

9. Resolva, em $\mathbb{R}$, sem recorrer à calculadora, a inequação:

$$\log_3(x^2 - 4x + 3) \leq 1 + \log_3(x - 1)$$

Apresente o conjunto-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

10. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{e^{x-2} - 1} & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \\ \frac{4 \ln(x-1)}{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

***10.1.** Mostre que a função f é contínua.

10.2. Justifique que a equação $f(x) = 4$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left] \frac{e}{2}, e \right[$.

***10.3.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as respetivas equações.

- *11.** Seja f uma função diferenciável, de domínio $]-\pi, \pi[$, cuja derivada, f' , é dada por:

$$f'(x) = x + 2 \cos x$$

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f .

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^{i^{42}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$.

Escreva o complexo $w = z - \bar{z}$ na forma trigonométrica.

13. Na figura 3, está representado no plano complexo o pentágono regular $[ABCDE]$, cujos vértices pertencem à circunferência de raio 1, centrada na origem do referencial.

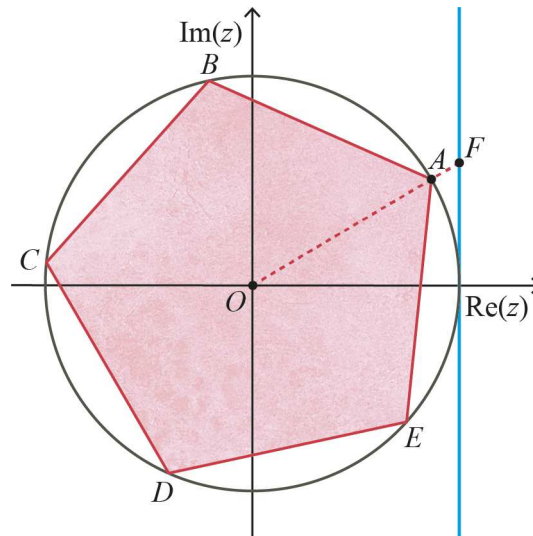


Figura 3

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C, D e E são os afixos das raízes quintas de um número complexo z , z_1 , z_2 , z_3 , z_4 e z_5 , respetivamente;
- o ponto F é o ponto de interseção da reta $[OA]$ com a reta tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto E é o afixo do número complexo $e^{-i\frac{7\pi}{30}}$.

13.1. Mostre que a área do pentágono $[ABCDE]$ é igual a $\frac{5}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

*13.2. O ponto F é o afixo do número complexo wz_1 .

Em qual das seguintes opções se apresenta w , escrito na forma algébrica?

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$ (D) $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$

***14.** Para um certo valor de $a \in \mathbb{R}$, considere a função f , definida em $\mathbb{R}^+$ por:

$$f(x) = x \ln x - ax$$

Seja x_0 o único zero da função f .

Mostre que o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 é único e determine-o.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.1.	2.2.	5.	6.	7.	8.	10.1.	10.3.	11.	13.2.	14.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	12	14	14	14	14	12	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	3.	4.	9.	10.2.	12.	13.1.	Subtotal						
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
TOTAL													200