

RESOLUÇÃO

* 1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n+4}{3n+5}$?

(A) $\frac{2}{3}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) $\frac{5}{4}$

(D) $\frac{3}{2}$

$$\lim \frac{2n+4}{3n+5} = \lim \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$$

OPÇÃO: A

- * 2. Na tabela seguinte, apresentam-se os dados referentes à produção de pera e de maçã, em quilogramas por hectare (kg/ha), em cada ano, de 2019 a 2023, em Portugal continental.

Ano	2019	2020	2021	2022	2023
Pera (kg/ha)	17 530	11 565	20 208	12 197	10 929
Maçã (kg/ha)	26 067	20 087	26 644	21 330	21 072

Fonte: Instituto Nacional de Estatística (consultado em setembro de 2024).

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana dos valores da produção de maçã excede a mediana dos valores da produção de pera em **I** kg/ha.

De 2020 para 2021, a produção de maçã teve um aumento de, aproximadamente, **II** .

No que respeita à distribuição da produção de pera, houve **III** anos em que a produção foi inferior à soma da média com o desvio padrão.

De acordo com previsões do INE, a produção acumulada de maçã, de 2019 a 2024, seria 136 270 kg/ha, enquanto a produção acumulada de pera, no mesmo período, corresponderia a 60% da produção acumulada de maçã. De acordo com os dados da tabela e com esta previsão do INE, obtém-se para o valor da produção de pera em 2024, aproximadamente, **IV** kg/ha.

I	II	III	IV
a) 6436	a) 25%	a) dois	a) 6557
b) 8554	b) 33%	b) três	b) 9333
c) 9133	c) 75%	c) quatro	c) 12 643

A	B	C	D	E	F	G	H
=			=OneVar('t		=OneVar(
1	17530	26067	Título	Estatistic...	Título	Estatísti...	
2	11565	20087	\bar{x}	14485.8	\bar{x}	23040.	
3	20208	26644	Σx	72429.	Σx	115200.	
4	12197	21330	Σx^2	1.11762e9	Σx^2	2.69188...	
5	10929	21072	$s_x := \sigma_{n-...}$	4136.16	$s_x := \sigma_{n-...}$	3068.75	
6			$\sigma_x := \sigma_{n-...}$	3699.49	$\sigma_x := \sigma_{n-...}$	2744.77	
7			n	5.	n	5.	
8			MinX	10929.	MinX	20087.	
9			Q ₁ X	11247.	Q ₁ X	20579.5	
10			MedianX...	12197.	MedianX...	21330.	
11			Q ₃ X	18869.	Q ₃ X	26355.5	
12			MaxX	20208.	MaxX	26644.	
13			$SSX := \Sigma$	6.84317e7	$SSX := \Sigma$	3.76689	

$$21330 - 12197 = 9133$$

I – c)

$$\frac{26644 - 20087}{20087} \times 100 \approx 33\%$$

II – b)

A	pera	B	maca	C	D	E	F	G
=					=OneVar('pera,		=OneVar('maca,	
1	17530	26067	Título	Estatísticas de...	Título	Estatísticas de...		
2	11565	20087	\bar{x}	14485.8	\bar{x}	23040.		
3	20208	26644	Σx	72429.	Σx	115200.		
4	12197	21330	Σx^2	1.11762e9	Σx^2	2.69188e9		
5	10929	21072	$s_x := s_{n-1}$	4136.16	$s_x := s_{n-1}$	3068.75		
6			$\sigma_x := \sigma_{n-1}$	3699.49	$\sigma_x := \sigma_{n-1}$	2744.77		
7			n	5.	n	5.		
8			MinX	10929.	MinX	20087.		
9			Q_1X	11247.	Q_1X	20579.5		
10			MedianX...	12197.	MedianX...	21330.		
11			Q_3X	18869.	Q_3X	26355.5		
12			MaxX	20208.	MaxX	26644.		
13			$SSX := \Sigma$	6.84312e7	$SSX := \Sigma$	3.76689e7		

A	pera	B	maca	C	D	E	F	G
=					=OneVar('pera,		=OneVar('maca,	
1	17530	26067	Título	Estatísticas de...	Título	Estatísticas de...		
2	11565	20087	\bar{x}	14485.8	\bar{x}	23040.		
3	20208	26644	Σx	72429.	Σx	115200.		
4	12197	21330	Σx^2	1.11762e9	Σx^2	2.69188e9		
5	10929	21072	$s_x := s_{n-1}$	4136.16	$s_x := s_{n-1}$	3068.75		
6			$\sigma_x := \sigma_{n-1}$	3699.49	$\sigma_x := \sigma_{n-1}$	2744.77		
7			n	5.	n	5.		
8			MinX	10929.	MinX	20087.		
9			Q_1X	11247.	Q_1X	20579.5		
10			MedianX...	12197.	MedianX...	21330.		
11			Q_3X	18869.	Q_3X	26355.5		
12			MaxX	20208.	MaxX	26644.		
13			$SSX := \Sigma$	6.84312e7	$SSX := \Sigma$	3.76689e7		

Soma da média com o desvio padrão

$$\bar{x} + \sigma = 23040 + 2744,77 = 25784,77$$

Dois anos

III – a)

A produção acumulada de pera, de 2019 a 2014 é $136270 \times 0,6 = 81762$

Como a produção acumulada de pera, de 2019 a 2023 é, recorrendo à calculadora de 72429

Temos que a produção de pera em 2024 é $81762 - 72429 = 9333$

IV – b)

3. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-x}}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens 3.1. e 3.2. sem recorrer à calculadora.

* 3.1. Averigue se a função f é contínua em $x = 0$.

f é contínua em $x = 0$ se $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{-x}}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = \\ &= \lim_{\underbrace{y \rightarrow 0^+}_{\text{Limite notável}}} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \end{aligned}$$

Mudança de variável

$$y = -x$$

$$x \rightarrow 0^-$$

$$-x \rightarrow 0^+$$

$$y \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} = \frac{0 + \ln e}{0 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Portanto f é contínua em $x = 0$

* 3.2. Mostre que a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota ao gráfico da função f quando $x \rightarrow +\infty$.

1.º Processo

Vamos calcular a assíntota não vertical quando $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x^2 + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e(x + 1))}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e + \ln(x + 1)}{x(x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e}{x(x + 1)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 1)}{x(x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e}{x(x + 1)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 1)}{(x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e}{x(x + 1)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Limite notável}} = 1 + \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} \times 0 = 1 \end{aligned}$$

Mudança de variável

$$y = x + 1$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x + 1 \rightarrow +\infty$$

$$y \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex+e)}{x+1} - x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cancel{x^2} + \ln(ex+e) - \cancel{x^2} - x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \ln(e(x+1))}{x+1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e + \ln(x+1)}{x+1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e}{x+1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} + \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Limite notável}} = -1 + \frac{1}{+\infty} + 0 = -1
 \end{aligned}$$

Mudança de variável

$$y = x + 1$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x + 1 \rightarrow +\infty$$

$$y \rightarrow +\infty$$

Portanto $y = x - 1$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$

2.º Processo

A reta $y = x - 1$ é assíntota ao gráfico de f se, quando, $x \rightarrow +\infty$, então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex+e)}{x+1} - x + 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + \ln(ex+e) - \cancel{x^2} + 1}{x+1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(ex+e)}{x+1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e(x+1))}{x+1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\cancel{e} \left(\frac{y}{\cancel{e}} \right)\right)}{\frac{y}{e}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = e \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Limite notável}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = \\
 &= e \times 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

Mudança de variável

$$y = ex + e \Leftrightarrow y = e(x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{e} = x + 1$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ então } y \rightarrow +\infty$$

$\therefore y = x - 1$ é assíntota ao gráfico de f

4. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine os números reais que são solução da equação

$$\frac{1}{2}e^x \ln(4-x)^2 - 5 \ln(4-x) = (5-e^x) \ln(7-2x)$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 4-x > 0 \wedge 7-2x > 0\} = \left] -\infty, \frac{7}{2} \right[$$

$$4-x > 0 \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow x < 4$$

$$7-2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -7 \Leftrightarrow 2x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{2}e^x \ln(4-x)^2 - 5 \ln(4-x) = (5-e^x) \ln(7-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x \ln\left((4-x)^2\right)^{\frac{1}{2}} - 5 \ln(4-x) = (5-e^x) \ln(7-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 5) \ln(4-x) = (5-e^x) \ln(7-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(5-e^x) \ln(4-x) - (5-e^x) \ln(7-2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5-e^x)(\ln(4-x) + \ln(7-2x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5-e^x) \ln[(4-x)(7-2x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5-e^x = 0 \vee \ln[(4-x)(7-2x)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 5 \vee \ln(2x^2 - 15x + 28) = \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 5 \vee 2x^2 - 15x + 28 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 5 \vee x = 3 \vee x = \frac{9}{2}$$

$$\therefore x = \left\{ \ln 5, 3, \frac{9}{2} \right\} \cap \left] -\infty, \frac{7}{2} \right[= \{ \ln 5, 3 \}$$

- * 5. Seja E , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que:

- $P(A \cap \bar{B}) = 0,5$;
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,3$.

Qual é o valor de $P(B)$?

- (A) 0,2 (B) 0,3 (C) 0,7 (D) 0,8

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,5 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0,5$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,3 \Leftrightarrow 1 - P(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}) = 0,3 \Leftrightarrow -P(A \cup B) = 0,3 - 1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,7$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,7 = 0,5 + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 0,2$$

OPÇÃO: A

6. Uma turma do 12.º ano é constituída por 25 alunos com 17 ou 18 anos de idade.

A Isabel e o José são alunos da turma e têm 17 anos.

Sabe-se que:

- 64% dos alunos são rapazes;
- $\frac{3}{4}$ dos rapazes têm 17 anos;
- $\frac{1}{3}$ das raparigas têm 18 anos.

Pretende-se constituir um grupo de seis alunos seleccionados, ao acaso, de entre todos os alunos da turma.

Determine a probabilidade de o grupo ser constituído pela Isabel, pelo José, por outro aluno (rapaz ou rapariga) com 17 anos e por três alunos (rapazes ou raparigas) com 18 anos.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

A turma tem 25 alunos e desses 64% são rapazes, isto é, $25 \times 0,64 = 16$

Logo a turma é composta por 16 rapazes e 9 raparigas.

Sabe-se que $\frac{3}{4}$ dos rapazes têm 17 anos, ou seja, $\frac{3}{4} \times 16 = 12$, assim, 4 têm 18 anos, e também se

sabe que $\frac{1}{3}$ das raparigas tem 18 anos, ou seja, $\frac{1}{3} \times 9 = 3$, logo, 6 têm 17 anos.

Temos, assim, 18 alunos com 17 anos e 8 alunos com 18 anos.

Como se pretende escolher 6 alunos de 25, temos que o número de casos possíveis é ${}^{25}C_6$

A Isabel e o José já estão escolhidos, logo, temos que apenas escolher um entre os 16 que sobram e temos que escolher três, rapariga ou rapaz, entre os 7 que têm 18 anos, isto é, 7C_3

Portanto a probabilidade pedida é $P = \frac{\text{C.F.}}{\text{C.P.}} = \frac{16 \times {}^7C_3}{{}^{25}C_6} \approx 0,003$

* 7. Na Figura 1, estão representados, no plano complexo, o triângulo $[OZW]$ e o ponto M .

Sabe-se que:

- $\overline{OZ} = \overline{OW}$;
- os pontos Z e W são os afixos dos números complexos z e w , respetivamente;
- um argumento de z , em radianos, é $\frac{2\pi}{15}$;
- o ponto M pertence à bissetriz do primeiro quadrante e é o ponto médio do segmento de reta $[WZ]$.

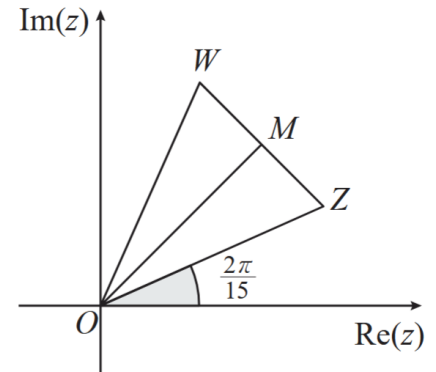


Figura 1

Qual dos seguintes valores é um argumento, em radianos, do número complexo w ?

- (A) $\frac{7\pi}{60}$ (B) $\frac{11\pi}{60}$ (C) $\frac{7\pi}{30}$ (D) $\frac{11\pi}{30}$

O argumento de M é $\frac{\pi}{4}$, M pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares

Como $\overline{OZ} = \overline{OW}$ o triângulo $[OWZ]$ é isósceles e como M é ponto médio de $[WZ]$ temos que

$$\widehat{ZOM} = \widehat{MOW}$$

$$\widehat{ZOM} = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{15} = \frac{7\pi}{60}$$

$$\therefore \text{Arg}(W) = \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{60} = \frac{11\pi}{30}$$

OPÇÃO: D

8. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, o número

$$z = \frac{5ai^{15}}{1-2i} + \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}, \text{ com } a \in \mathbb{R}$$

Sabe-se que $\text{Im}(z) - \text{Re}(z) = 1$.

Determine z na forma trigonométrica.

$$i^{15} = i^{4 \times 3 + 3} = i^3 = -i$$

$$\frac{-5ai}{1-2i} = -\frac{5ai(1+2i)}{1+4} = -\frac{5ai-10a}{5} = 2a-ai$$

$$\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1-i$$

$$z = 2a-ai+1-i = 2a+1+(-1-a)i$$

$$\begin{aligned} \text{Como } \text{Im}(z) - \text{Re}(z) = 1, \text{ então, } (-1-a) - (2a+1) = 1 &\Leftrightarrow -1-a-2a-1 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3a = 3 \Leftrightarrow a = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } z = 2(-1)+1+(-1-(-1))i = -1$$

$$|z| = 1$$

Como z é um real negativo, então, $\text{Arg}(z) = \pi$

$$\therefore z = e^{i\pi}$$

9. Na Figura 2, estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência centrada na origem e de raio 1, o triângulo $[ABC]$ e a reta de equação $x = 1$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- o ponto B pertence à reta de equação $x = 1$;
- o ponto O pertence à reta AB ;
- α é a inclinação, em radianos, da reta AB ($\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$);
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy ;
- a reta AC é paralela ao eixo Ox .

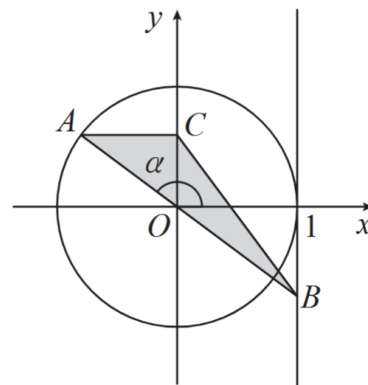


Figura 2

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de α , por

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times h}{2}, \quad h = \overline{OC} + |y_B|$$

$$A(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha), \quad \text{com } \cos \alpha < 0 \wedge \operatorname{sen} \alpha > 0$$

$$B(1, \tan \alpha), \quad \text{com } \tan \alpha < 0$$

$$C(0, \operatorname{sen} \alpha), \quad \text{com } \operatorname{sen} \alpha > 0$$

$$\overline{AC} = -\cos \alpha$$

$$\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\\ \cos \alpha < 0 \Leftrightarrow -\cos \alpha > 0$$

$$\overline{OC} = \operatorname{sen} \alpha \quad \text{e} \quad |y_B| = -\tan \alpha, \quad \text{assim, } h = \operatorname{sen} \alpha - \tan \alpha$$

$$\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\\ \operatorname{sen} \alpha > 0$$

$$\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\\ \tan \alpha < 0 \Leftrightarrow -\tan \alpha > 0$$

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times h}{2} = \frac{-\cos \alpha \times (\operatorname{sen} \alpha - \tan \alpha)}{2} = \frac{-\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + \cancel{\cos \alpha} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cancel{\cos \alpha}}}{2} = \\ &= \frac{-\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{2} \stackrel{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{=} \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{4} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)}{4} \quad \text{c.q.m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\overline{VM}\| = 2\sqrt{6} &\Leftrightarrow \sqrt{(-2k)^2 + k^2 + (-k)^2} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 4k^2 + k^2 + k^2 = 24 \Leftrightarrow 6k^2 = 24 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \pm 2 \end{aligned}$$

Para $k = -2$

$$(2 + 2 \times (-2), -1 - (-2), 3 + (-2)) = (-2, 1, 1)$$

Para $k = 2$

$$(2 + 2 \times 2, -1 - 2, 3 + 2) = (6, -3, 5)$$

Como a abcissa é positiva, $V(6, -3, 5)$

*** 10.3.** Pretende-se pintar as cinco faces da pirâmide $[ABCDV]$, dispondo-se, para o efeito, de seis cores distintas.

Todas as condições seguintes deverão ser respeitadas:

- cada face é pintada com uma só cor;
- são utilizadas, no mínimo, quatro das seis cores disponíveis;
- duas faces que tenham uma aresta em comum são pintadas com cores diferentes.

A expressão seguinte representa o número total de formas possíveis de pintar as cinco faces da pirâmide respeitando as condições enunciadas.

$${}^6C_4 \times 2 \times 4! + {}^6A_5$$

Explique, no contexto descrito, cada parcela desta expressão.

Segundo os Critérios de Classificação do IAVE:

- Explicação da parcela ${}^6C_4 \times 2 \times 4!$

Existem 6C_4 maneiras de escolher quatro das seis cores disponíveis para pintar as faces da pirâmide com quatro cores; para cada uma dessas maneiras, existem duas maneiras de escolher as duas faces opostas que têm de ser pintadas com a mesma cor e, para cada uma destas escolhas, existem $4!$ maneiras de pintar as faces da pirâmide usando as quatro cores escolhidas.

- Explicação da parcela 6A_5

Existem 6A_5 maneiras de pintar as faces da pirâmide com cinco das seis cores, permutando as cores pelas faces.

11. Seja g uma função diferenciável, de domínio \mathbb{R} , cuja derivada, g' , é definida por

$$g'(x) = \cos(3x) + \frac{3}{2}x + 1$$

Resolva os itens 11.1. e 11.2. sem recorrer à calculadora.

*** 11.1.** Estude a função g , no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função g tem concavidade voltada para cima;
- as abscissas dos pontos de inflexão do gráfico da função g .

Para estudar o sentido das concavidades do função g e a existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, vamos determinar a segunda derivada da função e os seus zeros.

$$g''(x) = \left(\cos(3x) + \frac{3}{2}x + 1 \right)' = -3\text{sen}(3x) + \frac{3}{2}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -3\text{sen}(3x) + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen}(3x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \vee x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$

$$x = \frac{\pi}{18} \vee x = \frac{5\pi}{18}$$

	0		$\frac{\pi}{18}$		$\frac{5\pi}{18}$		$\frac{\pi}{2}$
g'	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
g	n.d.	\cup	P.I.	\cap	P.I.	\cup	n.d.

Portanto:

- g tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{\pi}{18}\right[$ e em $\left[\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2}\right[$
- g tem a concavidade coltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\right]$
- as abscissas dos pontos de inflexão da função de g são: $\frac{\pi}{18}$ e $\frac{5\pi}{18}$

11.2. Seja r a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa 0 , e seja s uma reta perpendicular à reta r .

Sabe-se que:

- a reta s intersecta os eixos Ox e Oy nos pontos A e B , respetivamente;
- o ponto A tem abscissa positiva;
- o triângulo $[OAB]$ tem área igual a 12 .

Determine a abscissa do ponto A .

Como a reta r é tangente ao da função g no ponto de abscissa 0 , então o declive da reta é $g'(0)$.

$$\text{Assim, } m_r = g'(0) = \cos 0 + \frac{3}{2} \times 0 + 1 = 2$$

$$\text{Como } s \text{ é perpendicular a } r \text{ então, } m_s = -\frac{1}{m_r} \Leftrightarrow m_s = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } s: y = -\frac{1}{2}x + b$$

Sabe-se que $A(x_A, 0)$ e $B(0, y_B)$ em que y_B é a ordenada na origem da reta s

$$\text{Assim, } -\frac{1}{2}x_A + y_B = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_A = -y_B \Leftrightarrow \frac{x_A}{2} = y_B$$

$$A_{[OAB]} = 12 \Leftrightarrow \frac{x_A \times y_B}{2} = 12 \Leftrightarrow \frac{x_A \times \frac{x_A}{2}}{2} = 12 \Leftrightarrow \frac{x_A^2}{2} = 24 \Leftrightarrow x_A^2 = 48 \Leftrightarrow x_A = \sqrt{48} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_A = 4\sqrt{3}$$

- * 12. Admita que, de acordo com um estudo de mercado realizado pela Biclatur, empresa de fabrico de bicicletas, o número de unidades das bicicletas Ciclatour que se prevê vender, em função do preço, p , em centenas de euros, de cada unidade, é dado, aproximadamente, por

$$N(p) = 4000 \times e^{-0,34p} - 1,12p + 50, \text{ com } 2 \leq p \leq 10$$

De acordo com este modelo, sabe-se que existe um único preço para o qual o valor total que se prevê obter com a venda das bicicletas Ciclatour é igual a 4000 centenas de euros.

Determine esse preço, recorrendo à calculadora.

Apresente o resultado em euros, arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação;
- apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), arredondada(s) às centésimas.

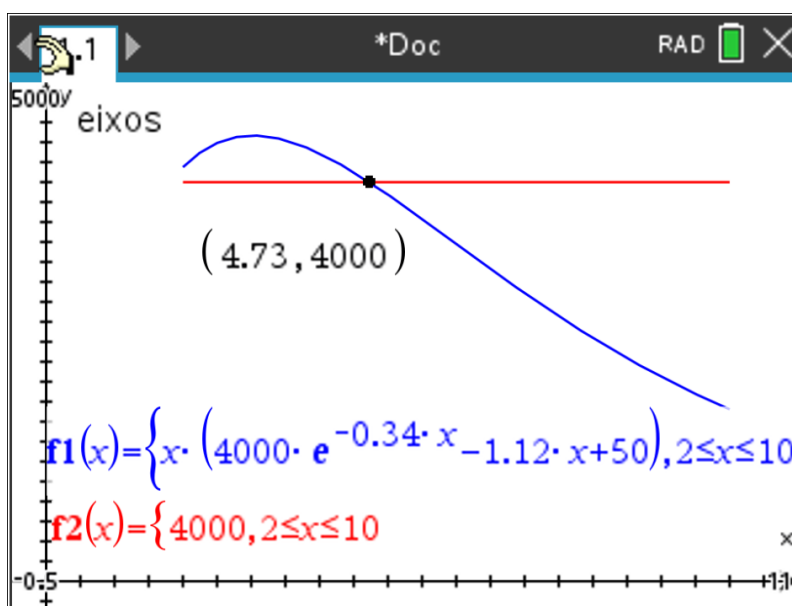
- $N(p)$ representa o número de unidades vendidas
- p representa o preço de cada unidade

Assim, $p \times N(p)$, representa o valor total obtido, em centenas de euros, com a venda de p bicicletas

Logo, $p \times N(p) = 4000$, é a equação que permite obter o valor total com a venda de bicicletas igual a 4000 centenas de euros.

$$f_1(x) = x(4000 \times e^{-0,34x} - 1,12x + 50), \quad 2 \leq x \leq 10$$

$$f_2(x) = 4000$$



Assim, $p \approx 4,73$

Conclui-se assim que o preço de cada bicicleta é de 473€

13. Na Figura 4, apresentam-se as quatro primeiras composições geométricas da construção do Tapete de Sierpiński.

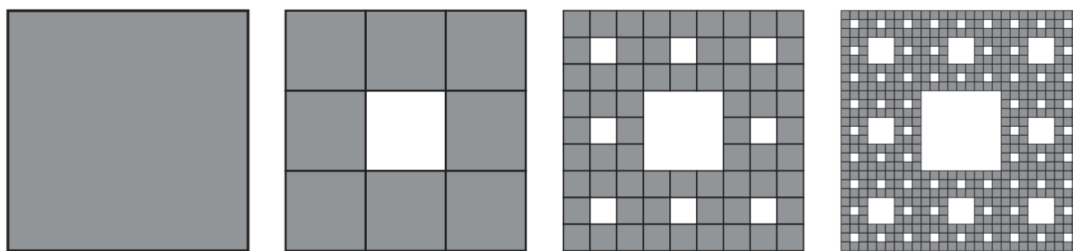


Figura 4

Tal como a figura sugere, nesta construção:

- a 1.^a composição é um quadrado;
- a 2.^a composição, com 8 quadrados, obtém-se decompondo a 1.^a em 9 quadrados iguais e removendo o quadrado central;
- cada uma das composições seguintes obtém-se decompondo cada um dos quadrados obtidos na composição anterior em 9 quadrados iguais e removendo os quadrados centrais.

Admita que, fixada uma unidade de medida, o quadrado inicial tem área igual a 9 e que se continuava a construção, de acordo com o procedimento descrito, até se obter a 50.^a composição.

Determine a área da 50.^a composição, ou seja, a área total dos quadrados que formam essa composição.

Apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

A composição de cada quadrado é obtido da anterior

- dividindo em 9 quadrados;
- removendo o quadrado central, ou seja, é retirado $\frac{1}{9}$ da área total da composição anterior;

Assim, a área de cada composição é $9 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ da área da composição anterior, isto é, a razão da progressão geométrica é $\frac{8}{9}$

Assumindo que a área do primeiro termo é 9, temos que a progressão geométrica é:

$$a_n = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$$

Portanto a área da 50.^a composição é: $a_{50} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{50-1} \approx 0,028$

* 14. Seja a um número real positivo, e seja h uma função contínua de domínio $[0, a]$ e contradomínio $[0, a]$.

Prove que existe, pelo menos, um ponto do gráfico da função h que pertence à bissetriz do primeiro quadrante.

A equação da bissetriz dos quadrantes ímpares é $y = x$, assim, um ponto da função h que pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares é do tipo $h(x) = x$, em $[0, a]$

$$h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0$$

$$\text{Seja } f(x) = h(x) - x$$

$f(x)$ é contínua em $[0, a]$, porque é a diferença de duas funções (h e x) em $[0, a]$

Se $f(0) = 0$ o ponto de abscissa 0 satisfaz a condição

Se $f(0) \neq 0$, então $f(0) = h(0) - 0 = h(0) > 0$, pois, $D'_h \in [0, a]$

Se $f(a) = a$ o ponto de abscissa a satisfaz a condição

Se $f(a) \neq a$, então $f(a) = h(a) - a < a$, pois, $D'_h \in [0, a]$

Logo, $f(a) < 0 < f(0)$

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, tem-se que $\exists c \in]0, a[: f(c) = 0$, isto é, existe pelo menos um ponto de abscissa em $]0, a[$, do gráfico de h que pertence à bissetriz do primeiro quadrante.