

RESOLUÇÃO

* 1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$?

(A) $e + 3$

(B) $3e$

(C) e^3

(D) $\frac{e}{3}$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^3 = \left[\underbrace{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\text{Limite notável}}\right]^3 = e^3$$

OPÇÃO: C

2. Seja g a função, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \sqrt{1-x}} & \text{se } x < 0 \\ 2 \operatorname{sen}^2 x - \sqrt{3}x + 2 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Resolva os itens 2.1. e 2.2. sem recorrer à calculadora.

* 2.1. Averigue se a função g é contínua em $x = 0$.

A função g é contínua em $x = 0$ se $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \sqrt{1-x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x(1 + \sqrt{1-x})}{(1 - \sqrt{1-x})(1 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x(1 + \sqrt{1-x})}{1^2 - (\sqrt{1-x})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - 1 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x(1 + \sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \sqrt{1-x}) = \\ &= 1 \times (1 + \sqrt{1-0}) = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2\text{sen}^2 x - \sqrt{3}x + 2) = 2 \times 0 - \sqrt{3} \times 0 + 2 = 2 = g(0)$$

Como, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$ a função g é contínua em $x = 0$

*** 2.2.** Estude, no intervalo $]0, \pi]$, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia e os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

$$g(x) = 2\text{sen}^2 x - \sqrt{3}x + 2, x \in]0, \pi]$$

$$g'(x) = (2\text{sen}^2 x - \sqrt{3}x + 2)' = 4\text{sen}x \cos x - \sqrt{3}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\text{sen}x \cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2(2\text{sen}x \cos x)}_{\text{sen}(2x) = 2\text{sen}x \cos x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\text{sen}(2x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(2x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0$$

$$x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{3}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$	n.d.	-	0	+	0	-	$-\sqrt{3}$
$g(x)$	n.d.	\searrow	mínimo	\nearrow	máximo	\searrow	mínimo

g é decrescente em $]0, \frac{\pi}{6}]$ e em $[\frac{\pi}{3}, \pi]$

g é crescente em $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

$x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \pi$ são mínimos relativos

$x = \frac{\pi}{3}$ é um máximo relativo

- * 3. O produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento de uma dada linha do triângulo de Pascal é 625. Qual é o quinto elemento da linha anterior?

(A) 10 626 (B) 12 650 (C) 42 504 (D) 53 130

O segundo e o penúltimo elemento de uma dada linha (n) do triângulo de Pascal são iguais e são iguais a n .

$$\text{Assim, } n \times n = 625 \Leftrightarrow n^2 = 625 \Leftrightarrow n = \sqrt{625} \Leftrightarrow n = 25$$

$n \geq 0$

Portanto a linha é a 25, e o 5.º elemento da linha é ${}^{24}C_4 = 10626$

OPÇÃO: B

4. Uma academia de dança oferece as modalidades de *ballet* clássico e de dança contemporânea, entre outras.

Relativamente aos alunos que frequentam a academia, sabe-se que:

- 60% estão inscritos em *ballet* clássico;
- 25% estão inscritos em dança contemporânea e não estão inscritos em *ballet* clássico;
- metade dos inscritos em dança contemporânea também estão inscritos em *ballet* clássico.

Selecionou-se, ao acaso, um aluno da academia que não está inscrito em dança contemporânea.

Determine a probabilidade de esse aluno estar inscrito em *ballet* clássico.

Apresente o resultado na forma de dízima.

Consideremos os acontecimentos:

B : "aluno inscrito no *ballet* clássico"

C : "aluno inscrito em dança contemporânea"

Sabemos que:

$$P(B) = 0,6 \ ; \ P(C \cap \bar{B}) = 0,25 \ \text{e} \ P(B|C) = 0,5$$

$$\text{Queremos saber: } P(B|\bar{C}) = \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}$$

$$P(B|C) = 0,5 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = 0,5 \Leftrightarrow P(B \cap C) = 0,5P(C)$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap B) + P(C \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(C) = 0,5P(C) + 0,25 \Leftrightarrow 0,5P(C) = 0,25 \Leftrightarrow P(C) = \frac{0,25}{0,5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(C) = 0,5 \end{aligned}$$

	B	\bar{B}	
C	$0,5P(C) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$	0,25	0,5
\bar{C}	0,35	0,15	0,5
	0,6	0,4	1

Assim, $P(B|\bar{C}) = \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0,35}{0,5} = 0,7$

Matemática Para Todos

- * 5. Na tabela seguinte, apresentam-se os dados relativos ao diâmetro biparietal, x , em centímetros, medido na trigésima quarta semana de gravidez, e ao correspondente perímetro cefálico, y , em centímetros, medido à nascença, de uma amostra de oito recém-nascidos numa maternidade.

Diâmetro biparietal em cm (x)	Perímetro cefálico em cm (y)
7,49	30,36
7,81	31,99
8,21	33,66
8,30	35,26
8,66	35,51
8,76	34,86
9,04	35,30
9,24	37,63

Complete o texto seguinte, seleccionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, seleccionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana dos diâmetros biparietais apresentados excede a respetiva média, arredondada às centésimas, em **I** cm.

A amplitude da amostra dos perímetros cefálicos apresentados é **II** cm.

O coeficiente de correlação linear entre as variáveis x e y , apresentadas na tabela, arredondado às centésimas, é **III**.

Admitindo a validade do modelo de regressão linear de y em função de x , e com base nas estimativas dos parâmetros, arredondadas às milésimas, para um recém-nascido, nesta maternidade, cujo diâmetro biparietal na trigésima quarta semana de gravidez tenha sido 8,50 cm, estima-se que o perímetro cefálico à nascença seja, aproximadamente, **IV** cm.

I	II	III	IV
a) 0,04	a) 2,58	a) 0,87	a) 34,54
b) 0,7	b) 3,64	b) 0,94	b) 36,11
c) 1,75	c) 7,27	c) 3,54	c) 41,62

A	B	C	D	E	F	G
=				=OneVar('		
1	7.49	30.36	Título	Estatísti...		
2	7.81	31.99	\bar{x}	8.43875		
3	8.21	33.66	Σx	67.51		
4	8.3	35.26	Σx^2	572.223		
5	8.66	35.51	$s_x := s_n \dots$	0.60032		
6	8.76	34.86	$\sigma_x := \sigma_n \dots$	0.561548		
7	9.04	35.3	n	8.		
8	9.24	37.63	MinX	7.49		
9			Q ₁ X	8.01		
10			MedianX...	8.48		
11			Q ₃ X	8.9		

A	B	C	D	E	F	G
=				=OneVar('		
1	7.49	30.36	Título	Estatísti...		
2	7.81	31.99	\bar{x}	8.43875		
3	8.21	33.66	Σx	67.51		
4	8.3	35.26	Σx^2	572.223		
5	8.66	35.51	$s_x := s_n \dots$	0.60032		
6	8.76	34.86	$\sigma_x := \sigma_n \dots$	0.561548		
7	9.04	35.3	n	8.		
8	9.24	37.63	MinX	7.49		
9			Q ₁ X	8.01		
10			MedianX...	8.48		
11			Q ₃ X	8.9		

$$\tilde{x} - \bar{x} = 8,48 - 8,439 \approx 0,04 \rightarrow \text{I - a)}$$

A	B	C	D	E	F	G
=				=OneVar('		
1	7.49	30.36	Título	Estatísti...		
2	7.81	31.99	\bar{x}	8.43875		
3	8.21	33.66	Σx	67.51		
4	8.3	35.26	Σx^2	572.223		
5	8.66	35.51	$s_x := s_n \dots$	0.60032		
6	8.76	34.86	$\sigma_x := \sigma_n \dots$	0.561548		
7	9.04	35.3	n	8.		
8	9.24	37.63	MinX	7.49		
9			Q ₁ X	8.01		
10			MedianX...	8.48		
11			Q ₃ X	8.9		

A	B	C	D	E	F	G
=				=OneVar('		
1	7.49	30.36	Título	Estatísti...		
2	7.81	31.99	\bar{x}	8.43875		
3	8.21	33.66	Σx	67.51		
4	8.3	35.26	Σx^2	572.223		
5	8.66	35.51	$s_x := s_n \dots$	0.60032		
6	8.76	34.86	$\sigma_x := \sigma_n \dots$	0.561548		
7	9.04	35.3	n	8.		
8	9.24	37.63	MinX	7.49		
9			Q ₁ X	8.01		
10			MedianX...	8.48		
11			Q ₃ X	8.9		

$$37,63 - 30,36 = 7,27 \rightarrow \text{II - c)}$$

A	B	C	D	E	F	G
=				=TwoVar('		
9			Σy	274.57		
10			Σy^2	9459.64		
11			$s_y := s_n \dots$	2.26948		
12			$\sigma_y := \sigma_n \dots$	2.12291		
13			Σxy	2325.95		
14			r	0.935388		
15			MinX	7.49		
16			Q ₁ X	8.01		
17			MedianX...	8.48		
18			Q ₃ X	8.9		
19			MaxX	9.24		

$$r \approx 0,94 \text{ III - b)}$$

A	B	C	D	E	F	G
=				=LinRegM		
1	7.49	30.36	Título	Regress...		
2	7.81	31.99	RegEqn	m*x+b		
3	8.21	33.66	m	3.53619		
4	8.3	35.26	b	4.48019		
5	8.66	35.51	r ²	0.874951		
6	8.76	34.86	r	0.935388		
7	9.04	35,3	Resid	{-0.6062...		
8	9.24	37.63				
9						
10						
11						

Reta de regressão:

$$y = 3,536x + 4,48$$

$$\text{Assim, } y = 5,536 \times 8,5 + 4,48 \Leftrightarrow y \approx 34,54$$

IV - a)

- * 6. O código de um cartão multibanco é uma sequência de quatro algarismos, como, por exemplo, 1526 e 0232.

Admita que o código de qualquer cartão multibanco é atribuído ao acaso, com algarismos de 0 a 9.

Determine a probabilidade de o código atribuído a um cartão multibanco ter todos os algarismos diferentes, um dos algarismos ser o zero e a soma dos quatro algarismos ser um número ímpar.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Número de casos possíveis

$\boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} \boxed{10}$, isto é, 10^4

Número de casos favoráveis

1.º Processo

Como o 0 é um dos algarismos, passamos a ter 9 algarismos possíveis.

Como a soma dos 4 algarismos tem que ser ímpar e um deles é zero, então a soma dos três algarismos restantes tem que ser ímpar.

Temos assim duas possibilidades para que a soma de três números ser par.

1.ª possibilidade:

Somar 2 pares e 1 ímpar

Escolher os pares:

Como o zero já foi escolhido, então sobram 4 pares e temos que escolher 2, isto é, 4C_2

Escolher o ímpar:

Temos que escolher um de 5, isto é, 5C_1

Como os algarismos podem trocar de posição entre si, temos $4!$, formas de os trocar.

Assim, $1 \times {}^4C_2 \times {}^5C_1 \times 4!$

2.ª possibilidade:

Somar 3 ímpares

Escolher os ímpares:

Temos que escolher 3 de 5, isto é, 5C_3

Como os algarismos podem trocar de posição entre si, temos $4!$, formas de os trocar.

Assim, $1 \times {}^5C_3 \times 4!$

Logo o número de casos favoráveis é $1 \times {}^4C_2 \times {}^5C_1 \times 4! + 1 \times {}^5C_3 \times 4!$

Portanto a probabilidade pedida é $\frac{1 \times {}^4C_2 \times {}^5C_1 \times 4! + 1 \times {}^5C_3 \times 4!}{10^4} = \frac{12}{125}$

2.º Processo

O código é constituído por 2 algarismos pares e 1 ímpar ou por 3 algarismos ímpares

2 algarismos pares e 1 ímpar

${}^4C_2 \times {}^3A_2$, dos quatros algarismos pares que sobram, para além do 0, escolhemos 2 e como a ordem interessa temos 3 posições para colocar os dois algarismos pares.

O algarismo ímpar pode ser colocado na posição que sobra e temos 5 algarismos ímpares.

Assim, temos ${}^4C_2 \times {}^3A_2 \times 5$

3 algarismos ímpares

5A_3 , porque a ordem interessa.

Como o código tem 4 algarismos, temos 4 posições para cada um deles, isto é,

$$4 \times ({}^4C_2 \times {}^3A_2 \times 5 + {}^5A_3)$$

Portanto a probabilidade pedida é $\frac{4 \times ({}^4C_2 \times {}^3A_2 \times 5 + {}^5A_3)}{10^4} = \frac{12}{125}$

7. Na Figura 1, estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro C , definida pela equação $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$, o triângulo $[ABC]$ e o ângulo BAC , de amplitude α , em radianos, com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

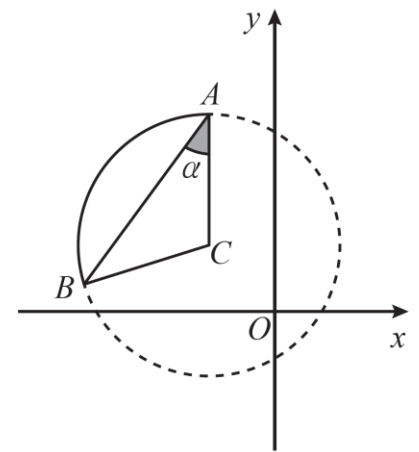


Figura 1

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor exato do comprimento do arco AB .

O triângulo $[ABC]$ é isósceles e $\overline{AC} = \overline{BC} = 2$ (Raio da circunferência)

Seja M o ponto médio de $[AB]$ então, $\cos \alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AM} = 2 \cos \alpha$

Como $\overline{AB} = 2\overline{AM} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4 \cos \alpha$

Temos que, $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6$

Assim, $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow 6 = 4 \cos \alpha \times 2 \times \cos \alpha \Leftrightarrow 6 = 8 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$
 $\cos \alpha > 0$

Logo, $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Assim, $\widehat{ACB} = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

Portanto, como o comprimento de um arco de circunferência é igual a αr , temos que:

$$\overline{AB} = \frac{2\pi}{3} \times 2 = \frac{4\pi}{3}$$

10. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B têm coordenadas $(4, 2, 0)$ e $(2, 3, -3)$, respetivamente;
- o ponto C pertence ao plano mediador do segmento de reta $[AB]$;
- a reta DF é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (-7, 4, 2) + k(1, 1, -5)$, $k \in \mathbb{R}$.

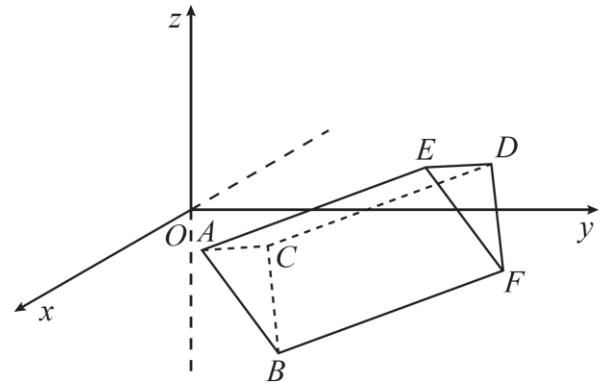


Figura 3

* 10.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta DF e que passa no ponto A ?

- (A) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + k(5, 0, -1)$, $k \in \mathbb{R}$
 (B) $(x, y, z) = (4, -3, -1) + k(0, 5, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
 (C) $(x, y, z) = (-6, 2, -2) + k(5, 0, -1)$, $k \in \mathbb{R}$
 (D) $(x, y, z) = (4, 8, -2) + k(0, 5, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

Vamos começar por verificar qual é o vetor diretor perpendicular à reta DF .

$$(1, 1, -5) \cdot (5, 0, -1) = 5 + 0 + 5 = 10, \text{ logo } (5, 0, -1) \text{ não é perpendicular a } DF$$

$$(1, 1, -5) \cdot (0, 5, 1) = 0 + 5 - 5 = 0, \text{ logo } (0, 5, 1) \text{ é perpendicular a } DF$$

Entre as opções (B) e (D) vamos averiguar a que passa pelo ponto A .

$$(B) \quad (4, 2, 0) = (4, -3, -1) + k(0, 5, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 2 = -3 + 5k \\ 0 = -1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 5 = 5k \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ k = 1 \\ k = 1 \end{cases}$$

OPÇÃO: B

* 10.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto C .

O plano mediador de $[AB]$ é:

$$\text{Ponto médio de } [AB]: \left(\frac{4+2}{2}, \frac{2+3}{2}, \frac{0-3}{2} \right) = \left(3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

$$\text{Vetor normal ao plano mediador: } \overrightarrow{AB} = B - A = (2, 3, -3) - (4, 2, 0) = (-2, 1, -3)$$

Assim, o plano mediador é do tipo: $-2x + y - 3z + d = 0$

Como o ponto médio pertence ao plano mediador, temos que,

$$-2 \times 3 + \frac{5}{2} - 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

Logo, a equação do plano mediador é, $-2x + y - 3z - 1 = 0$

Assim, como a interseção da reta BC com o plano mediador de $[AB]$, temos que:

A reta BC é paralela a DF , ou seja, $(1, 1, -5)$ é um vetor diretor de BC

Assim, $BC : (x, y, z) = (2, 3, -3) + k(1, 1, -5), k \in \mathbb{R}$

Então, qualquer ponto da reta BC é do tipo $(x, y, z) = (2 + k, 3 + k, -3 - 5k)$

Substituindo no plano mediador, temos:

$$-2(2 + k) + 3 + k - 3(-3 - 5k) - 1 = 0 \Leftrightarrow -4 - 2k + 3 + k + 9 + 15k - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14k = -7 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Portanto as coordenadas do ponto C são, $\left(2 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{2}, -3 - 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

* 11. Numa certa região, foi localizado um enxame de gafanhotos.

Admita que o número, G , em milhões, de gafanhotos do enxame, x semanas após as zero horas do dia em que este foi localizado, é dado, aproximadamente, por

$$G(x) = 0,9e^{-0,6x}(x + 0,5)^3, \text{ com } x \geq 0$$

De acordo com o modelo, existe um único instante a partir do qual, passadas quatro semanas, o número de gafanhotos ficou reduzido a metade do número de gafanhotos existentes nesse instante.

Determine, recorrendo à calculadora, quantos dias decorreram desde as zero horas do dia em que o enxame foi localizado até esse instante.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

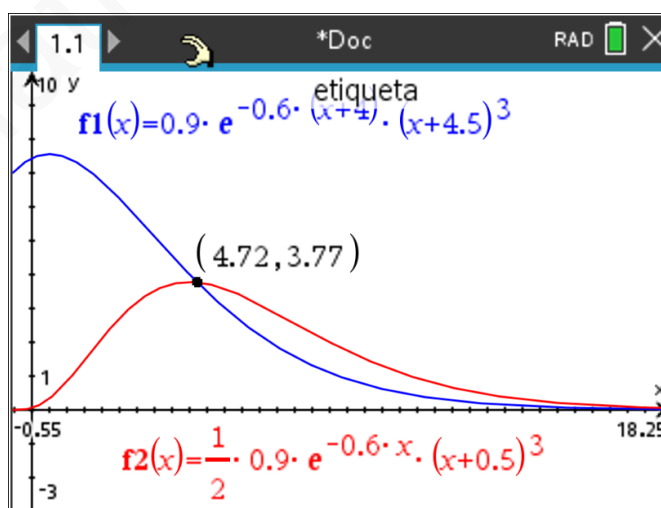
Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação;
- apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), arredondada(s) às centésimas.

O número de gafanhotos passadas 4 semanas é representado pela equação $G(x+4)$ e como o número de gafanhotos fica reduzido a metade, temos que a equação que permite resolver o problema é:

$$\begin{aligned} g(x+4) = \frac{1}{2}g(x) &\Leftrightarrow 0,9e^{-0,6(x+4)}(x+4+0,5)^3 = \frac{1}{2}(0,9e^{-0,6x}(x+0,5)^3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,9e^{-0,6(x+4)}(x+4,5)^3 = \frac{1}{2}(0,9e^{-0,6x}(x+0,5)^3) \end{aligned}$$

A representação gráfica do problema é:



Logo o instante x é 4,72, ou seja, $4,72 \times 7 = 33,04 \approx 33$

Portanto, desde as zero horas em que o enxame foi localizado decorreram 33 dias

12. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = 3e^x - 2e^{-x}$$

Resolva os itens 12.1. e 12.2. sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

12.1. Considere, em referencial o.n. Oxy , a representação gráfica da função f e o trapézio $[OCAB]$, tais que:

- o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a reta de equação $y = 5$;
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e ao eixo Oy ;
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à abcissa do ponto A .

Determine a área do trapézio $[OCAB]$.

Apresente o resultado na forma $\ln(a)$, com $a > 0$.

Começemos por determinar as coordenadas dos pontos A , B e C

Ponto A :

$$3e^x - 2e^{-x} = 5 \Leftrightarrow 3e^x - \frac{2}{e^x} - 5 = 0 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 5e^x - 2 = 0 \wedge e^x > 0 \Leftrightarrow$$

$$3(e^x)^2 - 5e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \vee y = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow e^x = 2 \vee \underbrace{e^x = -\frac{1}{3}}_{\text{Impossível}} \Leftrightarrow x = \ln 2$$

Assim, $A(\ln 2, 5)$

Ponto B :

$$f(0) = 3e^0 - 2e^0 = 1$$

Assim, $B(0, 1)$

Ponto $C(\ln 2, 0)$

$$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OB} + \overline{AC}}{2} \times \overline{OC}$$

$$\overline{OB} = |y_B - y_O| = |1 - 0| = 1$$

$$\overline{AC} = |y_C - y_A| = |0 - 5| = 5$$

$$\overline{OC} = |x_C - x_O| = |\ln 2 - 0| = \ln 2$$

$$\text{Portanto, } A_{[OABC]} = \frac{1+5}{2} \times \ln 2 = 3 \ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$$

12.2. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico da função f intersecta a reta de equação $y = 3x + 4$ em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]0, 1[$.

Como f intersecta a equação $y = 3x + 4$ em pelo menos um ponto, significa que,
 $f(x) = 3x + 4 \Leftrightarrow 3e^x - 2e^{-x} = 3x + 4 \Leftrightarrow 3e^x - 2e^{-x} - 3x - 4 = 0$

seja $g(x) = 3e^x - 2e^{-x} - 3x - 4$, uma função de domínio \mathbb{R}

$g(x)$ é contínua em $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ pois é a adição de 4 funções contínuas em \mathbb{R} .

$$g(0) = 3e^0 - 2e^0 - 3 \times 0 - 4 = 3 - 2 - 4 = -3$$

$$g(1) = 3e^1 - 2e^{-1} - 3 \times 1 - 4 = 3e - 2e^{-1} - 7 \approx 0,42$$

Assim, $g(0) < 0$ e $g(1) > 0$

Logo, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy temos que:

g é contínua em $[0, 1]$ e $g(0) \times g(1) < 0$, isto é, $\exists c \in]0, 1[: g(c) = 0$

Portanto a função f intersecta a reta $y = 3x + 4$ em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]0, 1[$

* 13. Considere uma função, f , de domínio \mathbb{R} , diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sabe-se que:

- a função f é crescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$;
- a reta de equação $x = 1$ é assíntota ao gráfico da função f .

Considere as proposições seguintes.

- I. A função f é contínua em $x = 1$.
- II. A reta de equação $y = -x + 2$ é tangente ao gráfico da função f num ponto de abcissa diferente de 1.

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

- I. A função é contínua em $x = 1$, é falso, porque:

Sabemos que a equação $x = 1$ é assíntota ao gráfico da função, logo, pelo menos um dos limites laterais de 1, tende para infinito, isto é, nunca poderá ser igual a $f(1)$, portanto f não é contínua em $x = 1$.

- II. A reta de equação $y = -x + 2$ é tangente ao gráfico da função f num ponto de abcissa diferente de 1, é falso, porque:

A função é diferencial e crescente em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, logo, a sua derivada é sempre maior ou igual a zero, pelo que o declive de qualquer reta tangente ao gráfico da função é sempre positivo ou nulo, uma vez que o declive de qualquer reta tangente ao gráfico é igual à derivada da função na abcissa desse ponto. Conclui-se assim que a reta de equação $y = -x + 2$ não pode ser tangente ao gráfico da função porque o seu declive é negativo.

14. Considere uma sucessão de composições geométricas, construídas a partir de um semicírculo de raio 1 .
Na Figura 4, estão representadas as três primeiras composições dessa sucessão.



Figura 4

Tal como é ilustrado na Figura 4:

- a 1.^a composição foi obtida retirando-se ao semicírculo inicial um semicírculo nele contido, de raio $\frac{1}{2}$;
- a 2.^a composição foi obtida retirando-se à 1.^a composição um semicírculo nela contido, de raio $\frac{1}{4}$;
- a 3.^a composição foi obtida retirando-se à 2.^a composição um semicírculo nela contido, de raio $\frac{1}{8}$;
- e assim sucessivamente, retirando-se, em cada composição, um semicírculo contido na composição anterior, com metade do raio do semicírculo retirado nessa composição, de modo que o diâmetro de cada semicírculo retirado seja colinear com o diâmetro do semicírculo inicial.

Determine o perímetro da 20.^a composição geométrica desta sucessão.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

É possível dividir o perímetro da composição geométrica na soma de três sucessões:

- Primeira, comprimento do arco exterior da semicircunferência (a_n);
- Segunda, segmento de reta que está na base da semicircunferência (b_n);
- Terceira, comprimento dos arcos interiores da semicircunferência (c_n).

Neste caso temos de somar os 20 primeiros termos da sucessão.

$$\text{Perímetro da 20.ª composição geométrica} = a_{20} + b_{20} + S_{20}$$

Soma dos
20 primeiros
termos de c_n

Primeira:

Em todas as figuras, o comprimento do arco exterior da semicircunferência é sempre o

mesmo, isto é, $a_n = \frac{2\pi \times 1}{2} = \pi$, sucessão constante, logo $a_{20} = \pi$

Segunda:

b_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ dado que cada segmento de reta é metade do comprimento do segmento anterior.

$$b_1 = 1, \text{ logo, } b_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ portanto, } b_{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

Terceira:

$$c_1 = \frac{2\pi \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} ; c_2 = \frac{2\pi \times \frac{1}{4}}{2} = \frac{\pi}{4} ; c_3 = \frac{2\pi \times \frac{1}{8}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{c_3}{c_2} = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}, \text{ logo o comprimento de cada um dos arcos é uma progressão}$$

geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$$c_n = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_{20} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\frac{1}{2}} = \pi \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)$$

$$\text{Perímetro da 20.ª composição geométrica} = a_{20} + b_{20} + S_{20} =$$

$$= \pi + \pi \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \approx 6,28$$

Soma dos
20 primeiros
termos de c_n

* 15. Sejam a , b e c números reais não nulos, e seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

Seja r uma reta que intersecta o gráfico da função f no ponto de abscissa zero.

Mostre que, se a reta r intersectar o gráfico da função f noutros dois pontos distintos, então esses pontos têm abscissas simétricas.

Como a reta r intersecta o gráfico f , no ponto de abscissa zero, então, $(0, f(0))$ pertence à reta r , ou seja, $f(0)$ é a ordenada na origem da reta r .

$$f(0) = a \times 0^3 + b \times 0 + c \Leftrightarrow f(0) = c, \text{ logo a equação da reta } r \text{ é } y = mx + c$$

$$\begin{aligned} f(x) = mx + c \Leftrightarrow ax^3 + bx + \cancel{c} &= mx + \cancel{c} \Leftrightarrow ax^3 + bx - mx = 0 \Leftrightarrow x(ax^2 + b - m) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 + b - m = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee ax^2 = m - b \Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{a \neq 0} \vee x^2 = \frac{m - b}{a} \end{aligned}$$

Portanto os dois pontos distintos do ponto de abscissa $x = 0$, são, $x^2 = \frac{m - b}{a}$ e, $\frac{m - b}{a} > 0$, uma vez que se $\frac{m - b}{a} \leq 0$, a reta r e o gráfico f só se intersectariam no ponto de abscissa 0.

$$\text{Assim, } x^2 = \frac{m - b}{a} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{m - b}{a}} \vee x = -\sqrt{\frac{m - b}{a}}, \text{ que são abscissas simétricas.}$$