RESOLUÇÃO

1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $[-1, 3]$.

Qual é o contradomínio da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x-2)+1$?

(A) $[-3, 1]$ **(B)** $[-2, 2]$

(C) $[0, 4]$ **(D)** $[1, 5]$

O contradomínio da função f é $[-1,3]$

A função g é definida por $g(x) = f(x-2)+1$

$$\underbrace{f(x-2)}_{\substack{\text{Translação}\\ \text{horizontal}\\ \text{associada}\\ \text{ao vetor}\\ \vec{u}\,(2,0)}} \quad \underbrace{+\ 1}_{\substack{\text{Translação}\\ \text{vertical}\\ \text{associada}\\ \text{ao vetor}\\ \vec{v}\,(0,1)}}$$

$$D'_g = D'_f + 1 = [-1+1\ ,\ 3+1] = [0\ ,\ 4]$$

OPÇÃO: C

2. Uma orquestra está a realizar audições para novos instrumentistas.

★ 2.1. No primeiro dia das audições, participaram apenas candidatos a flautistas e a violinistas.

Sabe-se que:

- $\frac{3}{5}$ dos candidatos eram violinistas;
- o número de candidatos estrangeiros era igual ao número de candidatos portugueses;
- $\frac{3}{10}$ dos candidatos estrangeiros eram flautistas.

Seleciona-se, ao acaso, um dos candidatos que participaram no primeiro dia das audições.

Determine a probabilidade de esse candidato ser português, sabendo-se que é violinista.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Considere-se os seguintes acontecimentos:

A: «Ser candidato a violinista»

B: «Ser candidato português»

Queremos saber: $P(B|A)$

Sabe-se que:

- $P(A)=\frac{3}{5}$
- $P(B)=\frac{1}{2}$
- $P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{3}{10}$

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{3}{10} \Leftrightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{3}{10}\times P(\overline{B}) \Leftrightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{3}{10}\times(1-P(B)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{3}{10}\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{3}{20}$$

Recorrendo à tabela de dupla entrada:

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}-\frac{3}{20}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{B}$	$\frac{3}{5}-\frac{1}{4}=\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Assim, $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{12}$

★ 2.2. Enquanto aguardam as audições, quatro violinistas, um violoncelista e três contrabaixistas vão sentar-se nas duas primeiras filas de uma plateia, tendo cada fila quatro lugares numerados de 1 a 4.

Qual das expressões seguintes representa o número de maneiras diferentes de dispor os oito músicos, ficando os três contrabaixistas numa fila?

(A) ${}^4C_3 \times 3! \times 5!$ **(B)** $2 \times {}^4A_3 \times 5!$

(C) $2 \times {}^4C_3 \times 5!$ **(D)** ${}^4A_3 \times 3 \times 5!$

Sabendo que os três contrabaixistas se dispõem numa única fila; havendo só duas filas, há duas formas de se escolher a fila.

${}^4A_3$ Corresponde às diferentes formas de distribuir os três contrabaixistas pelos 4 lugares da fila escolhida.

Quanto aos restantes músicos, estes permutam-se pelos lugares ainda existentes, ou seja, 5!. Assim, a expressão correspondente ao número de maneiras diferentes de dispor os oito músicos, ficando os três contrabaixistas numa fila é:

$$2\times {}^4A_3 \times 5!$$

OPÇÃO: B

2.3. Para se preparar para a audição de violino, a Constança praticou durante m dias.

Sabe-se que a Constança praticou:

- em cada dia, exceto no primeiro, sempre mais 10 minutos do que no dia anterior;
- 60 minutos no quarto dia;
- 2970 minutos no total dos m dias.

Determine o valor de m .

Como em cada dia, com exceção do primeiro, a Constança praticou mais 10 minutos do que no anterior, significa que a razão da progressão aritmética é 10 ($r=10$).

Sabe-se que:

- $u_4 = 60$
- $r = 10$
- $S_m = 2970$

Vamos determinar o termo geral da progressão aritmética:

$$u_n = u_4 + 10 \times (n-4) \Leftrightarrow u_n = 60 + 10n - 40 \Leftrightarrow u_n = 10n + 20$$

$$S_m = 2970 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_m}{2} \times m = 2970 \Leftrightarrow \frac{30 + 10m + 20}{2} \times m = 2970 \Leftrightarrow m \times \frac{50 + 10m}{2} = 2970 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m(25 + 5m) - 2970 = 0 \Leftrightarrow 5m^2 + 25m - 2970 = 0 \Leftrightarrow m = -27 \vee m = 22$$

Como $m \in IN$, então $m = 22$

3. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$.

Sabe-se que:

- as bases do prisma são trapézios retângulos;
- o ponto A tem coordenadas $(4,-4,-3)$, e o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa;
- uma equação da reta BC é $(x,y,z)=(3,5,1)+k(2,3,6),\ k\in\mathbb{R}$.

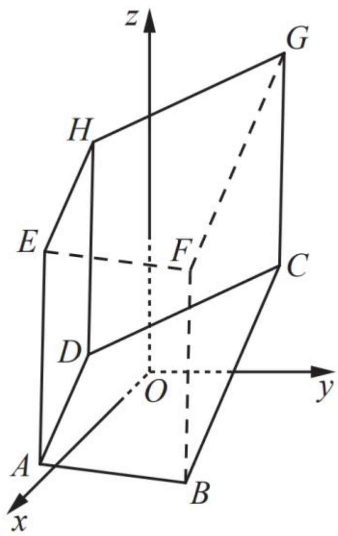


Figura 1

✱ 3.1. Qual das equações seguintes é uma equação do plano ABF?

(A) $2x+3y+6z+22=0$ **(B)** $2x+3y+6z-20=0$

(C) $3x-2y-20=0$ **(D)** $3x-2y+22=0$

A reta BC é perpendicular ao plano ABF, então $\vec{v}(2,3,6)$ é um vetor diretor do plano.

O plano ABF é do tipo $2x+3y+6z+d=0$, como A pertence ao plano

$$2\times 2+3\times(-4)+6\times(-3)+d=0 \Leftrightarrow d=22$$

$$ABF:\ 2x+3y+6z+22=0$$

OPÇÃO: A

✱ 3.2. Determine, sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, a amplitude do ângulo convexo AOB.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

$BC:\ (x,y,z)=(3,5,1)+k(2,3,6),\ k\in IR$

Então qualquer ponto da reta é da forma $(3+2k,\ 5+3k,\ 1+6k)$

Como B tem ordenada igual ao dobro da abcissa, temos

$$5+3k=2(3+2k)\Leftrightarrow 5+3k=6+4k\Leftrightarrow k=-1$$

Assim, $B(3+2\times(-1),\ 5+3\times(-1),\ 1+6\times(-1))=(1,2,-5)$

Logo $\overrightarrow{OA}(4,-4-3)$ e $\overrightarrow{OB}(1,2,-5)$

$$\cos\left(\overrightarrow{OA}\,\hat{}\,\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|}=\frac{(4,-4,-3)\cdot(1,2,-5)}{\sqrt{4^2+(-4)^2+(-3)^2}\times\sqrt{1^2+2^2+(-5)^2}}=\frac{4-8-15}{\sqrt{41}\times\sqrt{30}}=\frac{11}{\sqrt{1230}}$$

Portanto, $A\hat{O}B=\cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{1230}}\right)\approx 72^{\text{o}}$

3.3. Selecionam-se, ao acaso, dois vértices de cada uma das bases do prisma.

Determine a probabilidade de os quatro vértices selecionados não pertencerem a uma mesma face lateral do prisma.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Número de casos possíveis: ${}^4C_2 \times {}^4C_2 = 36$

Número de casos favoráveis: ${}^4C_2 \times {}^4C_2 - 4 = 32$

Então, aplicando a regra de Laplace $P = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

4. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o conjunto dos números reais que verificam a condição $\ln^2 x - \ln x - 2 < 0$.

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

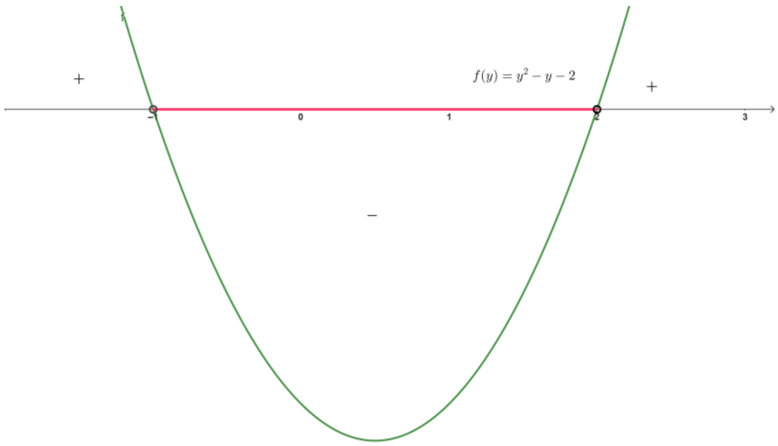
Domínio: $D = \{x \in IR : x > 0\} = IR^+$

$\ln^2 x - \ln x - 2 < 0$

Seja $\underbrace{y = \ln x}_{\text{Mudança de variável}}$, então:

$y^2 - y - 2 < 0$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{C.A.}\\ y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2\end{array}}$$



Assim,

$$y^2 - y - 2 < 0 \Leftrightarrow y > -1 \wedge y < 2 \underset{y=\ln x}{\Leftrightarrow} \ln x > -1 \wedge \ln x < 2 \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{-1} \wedge \ln x < \ln e^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > e^{-1} \wedge x < e^2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e} \wedge x < e^2$$

$$x \in \left]\frac{1}{e},\ e^2\right[\cap D = \left]\frac{1}{e},\ e^2\right[\cap IR^+ = \left]\frac{1}{e},\ e^2\right[$$

5. Considere, para um certo valor de k real, a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{e^{x-1}-1}-e^{x-k} & \text{se } x<1\\[2ex] x^2-3x-2\ln x & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** sem recorrer à calculadora.

*** 5.1.** Estude, no intervalo $]1,+\infty[$, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Para estudar a monotonia da função g em $]1,+\infty[$, vamos estudar o sinal da 1.ª derivada.

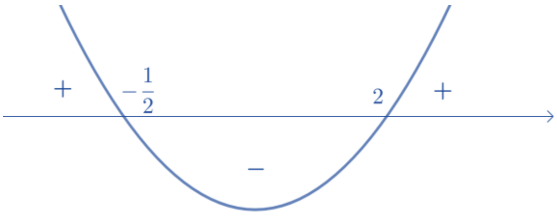
Derivada:

$$g'(x)=\left(x^2-3x-2\ln x\right)'=2x-3-2\times\frac{1}{x}=\frac{2x^2-3x-2}{x}$$

Zeros:

$$\frac{x^2-3x-2}{x}=0\Leftrightarrow x^2-3x-2=0\wedge x\neq 0\Leftrightarrow\left(x=-\frac{1}{2}\vee x=2\right)\wedge x\in D_g\Leftrightarrow x=2$$

Quadro de sinais:



x	1		2	$+\infty$
x^2-3x-2	n.d.	−	0	+
x	n.d.	+	+	+
g'	n.d.	−	0	+
g	n.d.	↘	Min $g(2)$	↗

O mínimo da função é $g(2)=2^2-3\times 2-2\ln 2=4-6-\ln 2^2=-2-\ln 4$

A função é decrescente em $]-1,2]$, crescente em $[2,+\infty[$ e tem um mínimo igual a $-2-\ln 4$

5.2. Sabe-se que a função g é contínua em $x=1$.

Determine o valor de k.

A função é contínua em $x=1$ se $\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+} g(x)=g(1)$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1-x}{e^{x-1}-1}-e^{x-k}\right)^{\left(\frac{0}{0}\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{e^{x-1}-1}-\lim_{x\to 1^-} e^{x-k}=$$

$$=-\lim_{x\to 1^-}\frac{y}{e^{y}-1}-\lim_{x\to 1^-} e^{x-k}=-\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\underbrace{\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{Limite notável}}}-\lim_{x\to 1^-} e^{x-k}=$$

$$=-\frac{1}{1}-e^{1-k}=-1-e^{1-k}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Mudança de variável:}\\ y=x-1\\ x\to 1^- \Rightarrow y\to 0^-\end{array}}$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2-3x-2\ln x\right)=1^2-3-2\ln 1=1-3=-2=g(1)$$

Logo, $-1-e^{1-k}=-2 \Leftrightarrow -e^{1-k}=-1 \Leftrightarrow e^{1-k}=1 \Leftrightarrow e^{1-k}=e^{0} \Leftrightarrow 1-k=0 \Leftrightarrow k=1$

6. O gráfico da Figura 2 apresenta a distribuição das classificações finais, em valores, na disciplina de Português, dos 20 alunos de uma turma.

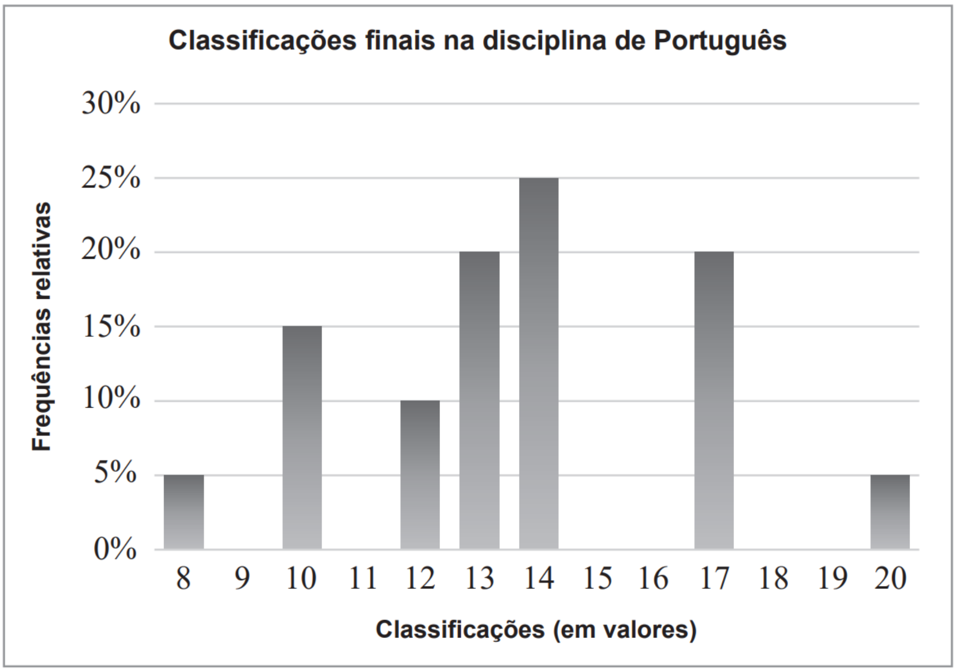


Figura 2

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados representados no gráfico da Figura 2.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Na turma, há ___**I**___ alunos com classificação final inferior a 13 valores na disciplina de Português.

A mediana da distribuição das classificações finais na disciplina de Português é ___**II**___ valores.

A classificação média final na disciplina de Português é ___**III**___ valores, e o desvio padrão desta distribuição, arredondado às décimas, é ___**IV**___ valores.

I	II	III	IV
a) 4	**a)** 12,5	**a)** 13,4	**a)** 2,9
b) 6	**b)** 13	**b)** 13,6	**b)** 3,8
c) 10	**c)** 13,5	**c)** 13,8	**c)** 4,1

I

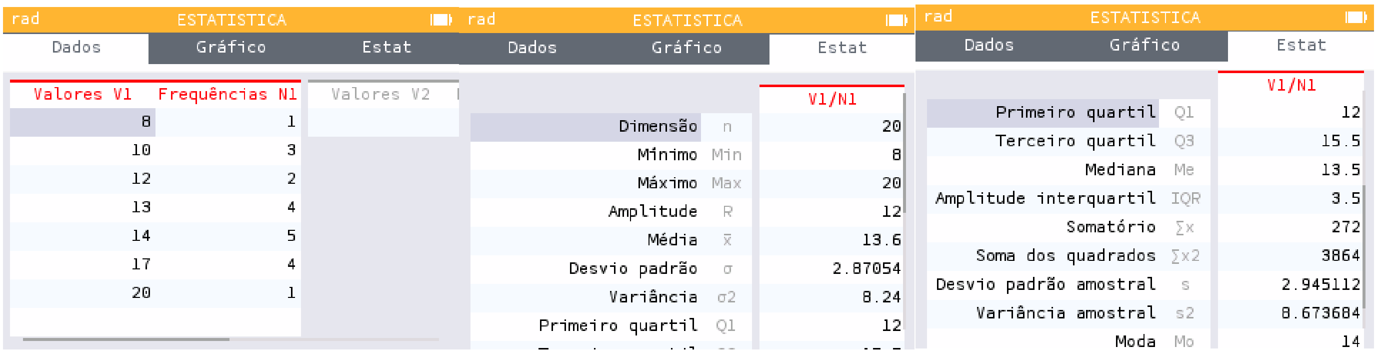
A percentagem de alunos com classificação inferior a 13 é $5+15+10=30\%$. Então, $0,3\times 30=6$

Opção: b)

II, III e IV

Classificações	Frequência Relativa	Frequência Absoluta
8	5%	$0,05\times 20=1$
10	15%	$0,15\times 20=3$
12	10%	$0,10\times 20=2$
13	20%	$0,20\times 20=4$
14	25%	$0,25\times 20=5$
17	20%	4
20	5%	1

Recorrendo à calculadora gráfica:



II Mediana = 13,5 $\rightarrow$ c)

III Média = 13,6 $\rightarrow$ b)

IV Desvio padrão $\approx$ 2,9 $\rightarrow$ a)

7. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^4}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

$D_f = IR \setminus \{0\}$

f é o quociente de duas funções contínuas em IR, logo a função é continua no seu domínio.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{x^4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^4(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos^2 x}{x^4(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4(1+\cos x)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Limite notável}} \times \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Limite notável}} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2(1+\cos x)} = 1 \times 1 \times \frac{1}{0^+ \times (1+\cos 0)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

Assim, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, pelo que a única assíntota vertical ao gráfico de f é a reta $x = 0$

✱ 8. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- para qualquer número real a, $a \neq 2$, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$, com $f(2) > 0$, e $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$;
- $f(1) \times f(3) < 0$.

Considere as proposições seguintes.

I. O teorema de Bolzano-Cauchy permite afirmar que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1, 3[$.

II. A reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico da função $\frac{1}{f}$.

Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

I

A função não é contínua para $x = 2$, porque $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$. Portanto não é possível recorrer ao Teorema de Bolzano-Cauchy, uma vez que a função não é contínua em $[1,3]$. Assim, apesar de $f(1) \times f(3) < 0$, não é possível garantir que a função tem pelo menos um zero no intervalo $]1,3[$.

II

Para que a reta de equação $x=2$ seja uma assíntota vertical da função $\frac{1}{f}$ é necessário que:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$$

Como $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 2^-} f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$ e $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to 2^+} f(x)} = \frac{1}{f(2)}$, $f(2)>0$, um número real positivo, logo $\frac{1}{f(2)}$, não é infinito.

Como nenhum dos limites é infinito, a afirmação é falsa.

9. Na Figura 3, estão representadas, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de centro em O e raio 2 e uma região sombreada composta pelo trapézio $[OBCD]$, retângulo em C e em D , e pelo sector circular correspondente ao ângulo orientado AOB , de amplitude α , em radianos, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, e raio $\overline{OA}$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência e ao semieixo positivo Ox ;
- os pontos B e C pertencem à circunferência, sendo C o simétrico de B , em relação ao eixo Oy .

Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de α , pela expressão

$$2\alpha + 3\,\text{sen}\,(2\alpha)$$

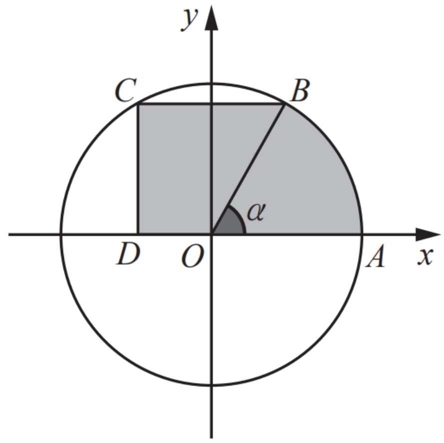


Figura 3

A área da região sombreada é igual à soma da área do setor circular com a área do trapézio $[BCDO]$.

$r=2 \qquad A_{\substack{\text{sector}\\\text{circular}}} = \frac{\alpha\times 2^2}{2} = 2\alpha$

$$\underbrace{B(2\cos\alpha\ ,\ 2\,\text{sen}\,\alpha)\ ;\ C(-2\cos\alpha\ ,\ 2\,\text{sen}\,\alpha)}_{\text{Os pontos } B \text{ e } C \text{ são simétricos em relação a } Oy} \ ;\ \underbrace{D(-2\cos\alpha\ ,\ 0)}_{\substack{D \text{ tem a mesma abcissa de } C,\\ \text{o trapézio é retângulo em } C}}$$

$$A_{[OBCD]} = \frac{\overline{CB}+\overline{OD}}{2}\times\overline{CD} = \frac{|-2\cos\alpha - 2\cos\alpha| + |-2\cos\alpha|}{2}\times 2\,\text{sen}\,\alpha = \frac{4\cos\alpha + 2\cos\alpha}{2}\times 2\,\text{sen}\,\alpha =$$
$$= \frac{6\cos\alpha}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\,\text{sen}\,\alpha = 6\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha$$

Portanto a área da região sombreada é:

$$A_{\substack{\text{setor}\\\text{circular}}} + A_{[OBCD]} = 2\alpha + 6\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha = 2\alpha + 3\times\underbrace{2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}_{\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha} = 2\alpha + 3\,\text{sen}\,(2\alpha) \quad \text{c.q.m.}$$

10. Na Figura 4, está representada uma caixa que vai ser puxada ao longo de um plano horizontal, com recurso a uma haste rígida.

Nesta figura, o segmento de reta $[AB]$ representa a haste rígida, o ponto A representa o ponto em que a haste está fixada à caixa, e o ponto B representa o ponto em que vai ser exercida a força que permite deslocar a caixa.

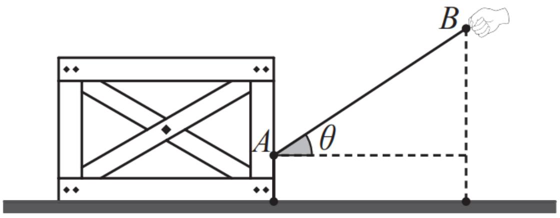


Figura 4

Seja θ a amplitude, em radianos, do ângulo que a força faz com a horizontal $\left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Admita que, para cada valor de θ, a intensidade mínima da força a aplicar no ponto B, para que se inicie o movimento da caixa, é dada, em newton, por

$$F(\theta) = \frac{4095}{5 \operatorname{sen} \theta + 12 \cos \theta}$$

Existem dois valores distintos de θ aos quais corresponde a mesma intensidade mínima da força, em newton, a aplicar no ponto B, para que se inicie o movimento da caixa.

Sabe-se que um desses valores é o dobro do outro.

Seja θ_1 o menor desses valores $\left(\theta_1 \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de θ_1.

Apresente o resultado em radianos, arredondado às centésimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

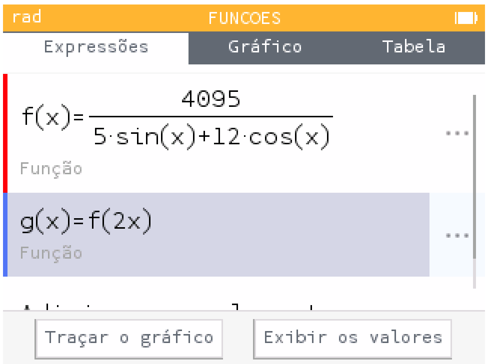
Na sua resposta:

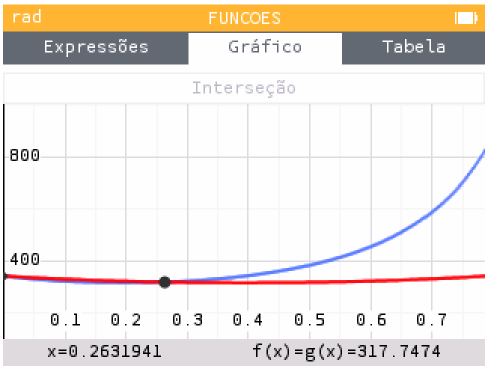
– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

A equação que permite a resolução do problema é $F(\theta) = F(2\theta)$

Recorrendo à calculadora





Com uma janela de visualização $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, temos que o valor de θ arredondado às centésimas é 0,26 radianos.

11. Na Figura 5, está representado, no plano complexo, o triângulo $[ABC]$, cujos vértices pertencem à circunferência de raio 2 centrada na origem do referencial, sendo o ponto A pertencente ao semieixo imaginário negativo.

Os pontos A, B e C são os afixos das raízes cúbicas de um certo número complexo, w.

Em qual das seguintes opções se apresenta w, escrito na forma trigonométrica?

(A) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$ **(B)** $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

(C) $8e^{i\frac{\pi}{2}}$ **(D)** $8e^{i\frac{3\pi}{2}}$

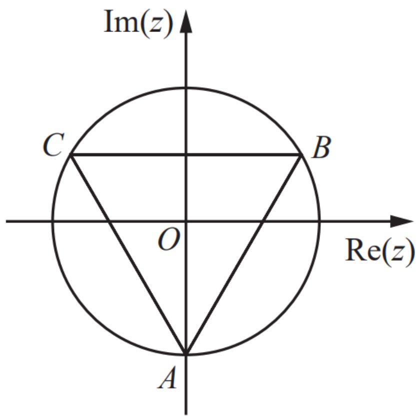


Figura 5

Como A pertence ao semieixo imaginário negativo e o raio da circunferência é 2, $z_A = -2i$

$$z_A{}^3 = w$$

$$z_A{}^3 = (-2i)^3 = -8i^3 = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

OPÇÃO: C

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = \dfrac{4}{1+i} - \dfrac{2}{i^7}$.

Determine o número complexo w tal que o número complexo $z \times w$ tenha módulo $5\sqrt{2}$ e afixo pertencente à bissetriz do terceiro quadrante.

Apresente w na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

$$z = \frac{4}{1+i} - \frac{2}{i^7} \underset{i^7=i^3=-i}{=} \frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \frac{2}{-i} = \frac{4-4i}{1-i^2} + \frac{2}{i} = \frac{4-4i}{1-(-1)} + \frac{2}{i} = \frac{4-4i}{2} + \frac{2}{i} = \frac{4i-4i^2+4}{2i} =$$

$$= \frac{4i-4(-1)+4}{2i} = \frac{4i+4+4}{2i} = \frac{4i+8}{2i} \times \frac{i}{i} = \frac{4i^2+8i}{2i^2} = \frac{-4+8i}{-2} = 2-4i$$

Como o afixo de $z \times w$ pertence à bissetriz do terceiro quadrante, um argumento é $\dfrac{5\pi}{4}$.

Como o seu módulo é $5\sqrt{2}$, temos que:

$$z \times w = 5\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = 5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -5-5i$$

$$\text{Portanto, } z \times w = -5-5i \Leftrightarrow w = \frac{-5-5i}{z} \Leftrightarrow w = \frac{-5-5i}{2-4i} \Leftrightarrow w = \frac{(-5-5i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{-10-20i-10i-20i^2}{4-16i^2} \Leftrightarrow w = \frac{-10+20-30i}{20} \Leftrightarrow w = \frac{10}{20} - \frac{30}{20}i \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

✱ 13. Para certos valores reais de b e de m, não nulos, a reta de equação $y = mx + 1$ é tangente ao gráfico da função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 + bx + 5$ num ponto cuja abcissa é positiva.

Determine a abcissa desse ponto.

Seja a a abcissa do ponto onde a reta tangente ao gráfico de f é a reta de equação $y = mx + 1$

Então, $f'(a) = m$

$$f'(x) = \left(2x^2 + bx + 5\right)' = 4x + b, \quad \text{portanto } f'(a) = 4a + b$$

$$4a + b = m$$

Como o ponto pertence à reta e ao gráfico da função:

$$f(a) = 2a^2 + ba + 5 \quad \text{e} \quad f(a) = ma + 1$$

$$2a^2 + ba + 5 = ma + 1$$

$$\begin{cases} m = 4a + b \\ 2a^2 + ba + 5 = ma + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ 2a^2 + ba + 5 = (4a + b)a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ 2a^2 + ba + 5 = 4a^2 + ba + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ 2a^2 - 4a^2 + ba - ba + 5 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ -2a^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ a^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ a = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Como a abcissa é positiva, $a > 0$, concluímos que $a = \sqrt{2}$