EXAME DE MATEMÁTICA A

Ensino Secundário | 2022/2023

12.º Ano de Escolaridade

2.ª Fase 2023

RESOLUÇÃO

✱ 1. Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim u_n = 0$.

Qual das expressões seguintes pode ser termo geral de (u_n) ?

(A) $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ **(B)** $-\frac{n^2+1}{n}$ **(C)** $\frac{4n+3}{3n+4}$ **(D)** $\frac{(-1)^n}{n}$

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \begin{cases} \lim \frac{1}{n} = 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

OPÇÃO: D

2. Considere um triângulo equilátero, $[ABC]$, com $\overline{AB} = 1$.

Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo; unindo os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo. Continuando a proceder deste modo, obtém-se uma sequência de n triângulos, sendo $n > 4$.

Na Figura 1, representam-se os primeiros quatro triângulos da sequência.

Mostre que a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é menor do que 6 unidades, qualquer que seja o valor de n .

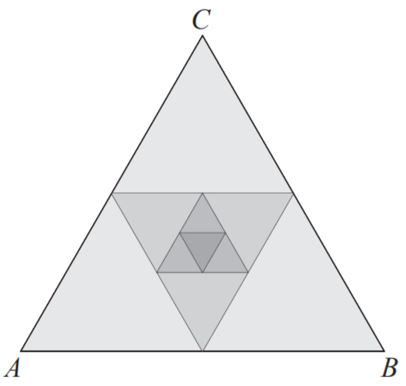


Figura 1

$P_{[ABC]} = 3 \times 1 = 3$

Seja D , E e F os pontos médios de cada um dos lados do triângulo $[ABC]$ então cada um dos lados do triângulo $[DEF]$ mede $\frac{1}{2}$, logo $P_{[DEF]} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

Ou, seja o perímetro de cada figura é $\frac{1}{2}$ do perímetro da figura anterior, pelo que p_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

A soma dos perímetros é $S_n = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$

$$\lim S_n = \lim\left(3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = \lim\left(3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right) = \lim\left(6 \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right) =$$

$$= \lim\left(6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 6 - 6 \times \frac{1}{+\infty} = 6 - 0 = 6$$

à medida que o número de triângulos aumenta o seu perímetro tende para 6.

$\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0 \Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 \Leftrightarrow 6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 6$, $\forall n \in IN$, logo a soma de todos os perímetros é inferior a 6.

3. Considere todos os números naturais de seis algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 a 9.

Destes números, quantos têm exatamente dois cincos?

(A) 98 415 **(B)** 61 440 **(C)** 36 015 **(D)** 25 200

Temos 6 posições para colocar o número os dois algarismos 5: ${}^6C_2 = 15$

Sobram 4 posições para colocar os restantes algarismos, como pode haver repetição: ${}^8A'_4 = 8^4 = 4096$

Assim, $15 \times 4096 = 61440$

OPÇÃO: B

4. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos equiprováveis;
- $P(\overline{A}) = 0{,}6$;
- $P(A \cup \overline{B}) = 0{,}7$.

Determine o valor de $P((A \cup \overline{B}) \mid B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Sabe-se que:

$P(A) = P(B)$ porque A e B são equiprováveis

$P(\overline{A}) = 0{,}6 \Rightarrow P(A) = 0{,}4$ logo $P(B) = 0{,}4 \Rightarrow P(\overline{B}) = 0{,}6$

$$P\left(\left(A \cup \overline{B}\right) \mid B\right) = \frac{P\left(\left(A \cup \overline{B}\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) \cup P\left(\overline{B} \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) \cup \varnothing}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P\left(A \cup \overline{B}\right) = P(A) + P\left(\overline{B}\right) - P\left(A \cap \overline{B}\right) \Leftrightarrow 0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}6 - P\left(A \cap \overline{B}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}3$$

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - P\left(A \cap \overline{B}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}3 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$$

$$P\left(\left(A \cup \overline{B}\right) \mid B\right) = \frac{P\left(\left(A \cup \overline{B}\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}$$

★ 5. Uma certa composição geométrica é formada por n hexágonos regulares inscritos em circunferências concêntricas, contidas num mesmo plano, de centro no ponto V, sendo $n > 3$.

A Figura 2 é um esquema de parte dessa composição, e nela estão representados três dos n hexágonos que formam a composição.

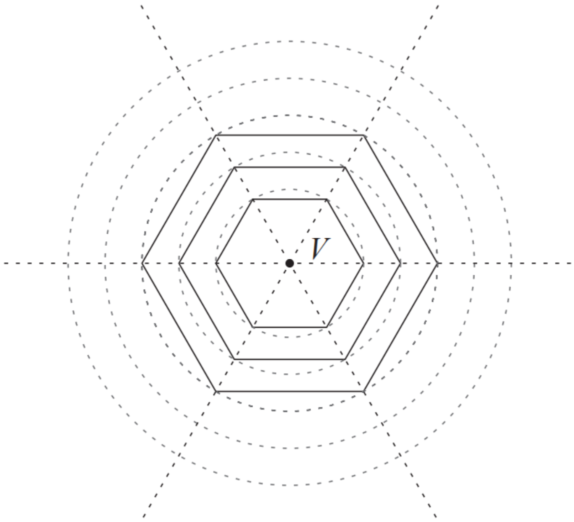


Figura 2

Considere o conjunto de pontos formado pelo ponto V e pelos vértices de todos os hexágonos da composição.

Sabe-se que, selecionando, ao acaso, dois pontos desse conjunto, a probabilidade de estes serem vértices do mesmo hexágono é igual a $\frac{5}{49}$.

Determine o valor de n.

Número de casos possíveis:

Temos que escolher dois vértices de cada um dos n hexágonos, o terceiro vértice é o ponto V.

Assim, ${}^{6n}C_1 + {}^{6n}C_2 = {}^{6n+1}C_2$

Número de casos favoráveis:

Escolher dois vértices de cada um dos n hexágonos, isto é ${}^{6}C_2 \times n$

$$\frac{{}^{6}C_2 \times n}{{}^{6n+1}C_2} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{15n}{\frac{(6n+1)!}{2 \times (6n+1-2)!}} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{15n}{\frac{(6n+1)!}{2 \times (6n-1)!}} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{30n}{\frac{(6n+1)\,6n!}{(6n-1)!}} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{30n}{\frac{(6n+1)\,6n\,\cancel{(6n-1)!}}{\cancel{(6n-1)!}}} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{30n}{6n\,(6n+1)} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{5}{6n+1} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow 6n+1 = 49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6n = 48 \Leftrightarrow n = 8$$

6. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + e^{bx}$, em que a e b são números reais.

Sabendo que o gráfico da função f contém os pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(2, 7)$, determine os valores de a e de b.

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(2) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + e^{b} = 5 \\ a + e^{2b} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - e^{b} \\ 5 - e^{b} + e^{2b} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ e^{2b} - e^{b} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ------ \\ e^{2b} - e^{b} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Cálculos Auxiliares:

$$e^{2b} - e^{b} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{b} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow e^{b} = 2 \vee \underbrace{e^{b} = -1}_{\substack{\text{Impossível} \\ e^{b} > 0,\, \forall b \in IR}} \Leftrightarrow e^{b} = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - 2 \\ e^{b} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \ln 2 \end{cases}$$

7. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$?

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \underset{\substack{x\to 0 \\ 2x \to 0}}{=} 2 \lim_{2x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = 2 \times 1 = 2$$

OPÇÃO: D

8. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma hexagonal reto $[ABCDEFGHIJKL]$, de bases $[ABCDEF]$ e $[GHIJKL]$.

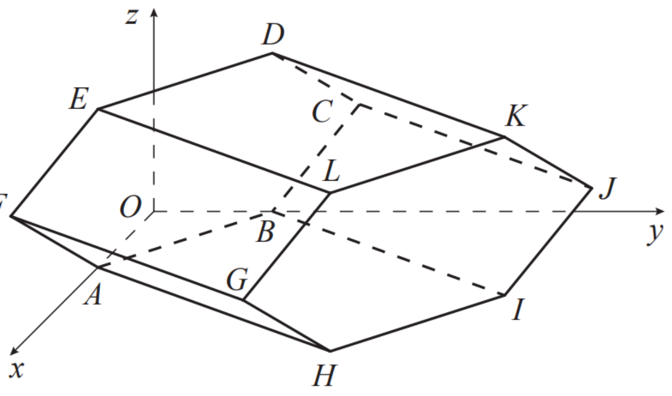


Figura 3

Sabe-se que:

- as coordenadas dos vértices A e G do prisma são, respetivamente, $(4,0,0)$ e $\left(12, \frac{13}{2}, 2\right)$;
- a reta EL é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (-2, -8, 4) + k(3, 4, 0)$, $k \in \mathbb{R}$.

✱ 8.1. Qual das seguintes equações define a superfície esférica de diâmetro $[AG]$?

(A) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$

(B) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{4}$

(C) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{16}$

(D) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{4}$

Seja M o ponto médio de $[AG]$

$$M\left(\frac{4+12}{2}, \frac{\frac{13}{2}+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = M\left(8, \frac{13}{4}, 1\right)$$

$$d(A, M) = \sqrt{(8-4)^2 + \left(\frac{13}{4}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + \frac{169}{16} + 1} = \sqrt{\frac{441}{16}}$$

$$(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$$

OPÇÃO: A

8.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do vértice F do prisma.

EL é paralela a FG

$$FG : (x, y, z) = \left(12, \frac{13}{2}, 2\right) + k(3, 4, 0) \text{ , } k \in IR$$

Assim, um ponto da reta é do tipo $(x, y, z) = \left(12 + 3k, \frac{13}{2} + 4k, 2\right) \text{ , } k \in IR$

$(3, 4, 0)$ é um vetor normal do plano EFA

$EFA : 3x + 4y + d = 0$

$A(4, 0, 0)$ pertence ao plano EFA

$3 \times 4 + 4 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$

$EFA : 3x + 4y - 12 = 0$

O ponto F é ponto de interseção da reta FG e do plano EFA

$$3(12 + 3k) + 4\left(\frac{13}{2} + 4k\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow 36 + 9k + 26 + 16k - 12 = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

Assim $F(x, y, z) = \left(12 + 3(-2), \frac{13}{2} + 4(-2), 2\right) = \left(6, -\frac{3}{2}, 2\right)$

9. Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. Oxy, o retângulo $[OABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy;
- o ponto D pertence ao segmento de reta $[OA]$;
- o ponto E pertence ao segmento de reta $[CB]$;
- $\overline{EB} = \overline{OD} = \dfrac{\overline{OA}}{3}$;
- $\overline{OC} = \dfrac{\overline{OA}}{4}$;
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7$.

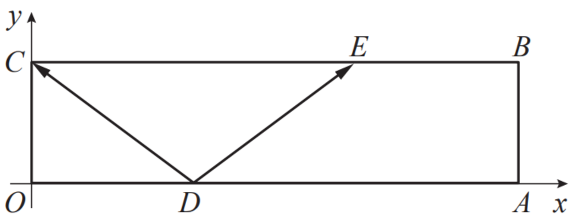


Figura 4

Determine $\overline{OA}$.

Seja G o ponto de $[AO]$, tal que $[EG]$ é perpendicular à reta EB

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GE}$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GE}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DG} + \underbrace{\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{GE}}_{\overrightarrow{DO} \perp \overrightarrow{GE}} + \underbrace{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{DG}}_{\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{DG}} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{GE} =$$

$$= \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DG} + 0 + 0 + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{GE}$$

Como:

$$\overline{EB} = \overline{OD} = \frac{\overline{OA}}{3}$$

$$\overline{EB} = \overline{GA}\text{, logo } \overline{OD} + \overline{GA} = \frac{\overline{OA}}{3} + \frac{\overline{OA}}{3} = \frac{2}{3}\overline{OA}$$

$$\overline{OD} + \overline{DG} + \overline{GA} = \overline{OA} \Leftrightarrow \overline{DG} + \frac{2}{3}\overline{OA} = \overline{OA} \Leftrightarrow \overline{DG} = \frac{\overline{OA}}{3}$$

Assim, $\overline{OD} = \overline{DG} = \overline{GA}$, isto é, $\left\|\overrightarrow{OD}\right\| = \left\|\overrightarrow{DG}\right\| = \left\|\overrightarrow{GA}\right\|$

$$\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DG} = -\left\|\overrightarrow{DO}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OG}\right\| = -\frac{\overline{OA}}{3} \times \frac{\overline{OA}}{3} = -\frac{\overline{OA}^2}{9}$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{GE} = \left\|\overrightarrow{OC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{GE}\right\| = \frac{\overline{OA}}{4} \times \frac{\overline{OA}}{4} = \frac{\overline{OA}^2}{16}$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{GE} \Leftrightarrow -7 = -\frac{\overline{OA}^2}{9} + \frac{\overline{OA}^2}{16} \Leftrightarrow -7 = -\frac{7}{144}\overline{OA}^2 \Leftrightarrow$$

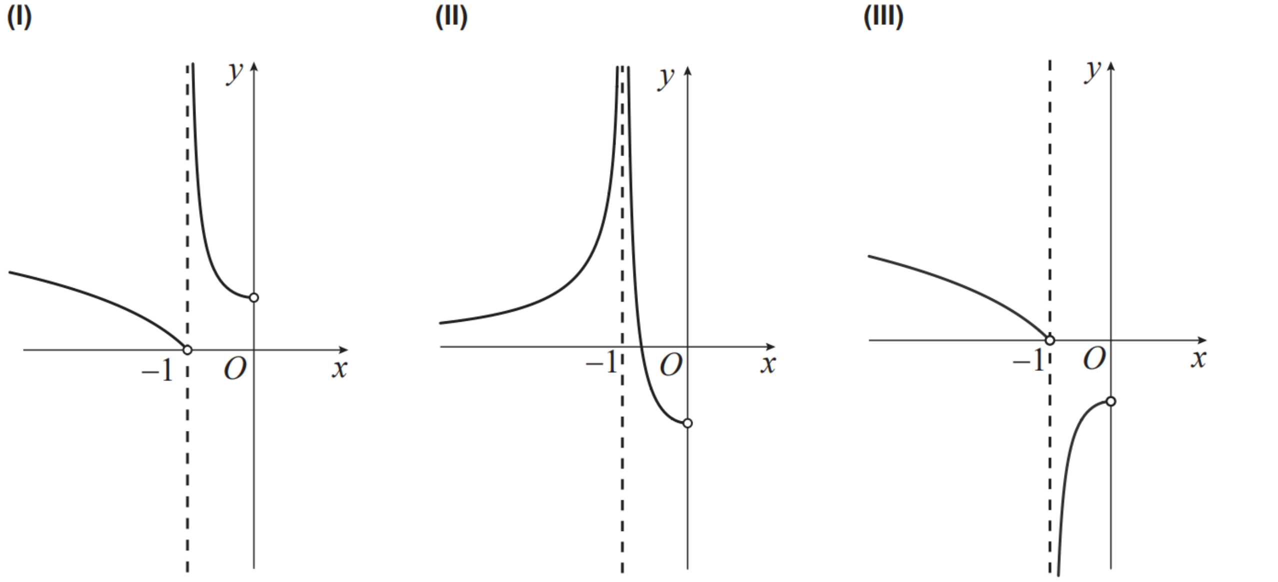
Portanto de $\Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 144 \Leftrightarrow \overline{OA} = \sqrt{144},\ \ \overline{OA} > 0$

$\Leftrightarrow \overline{OA} = 12$

10. Seja g uma função par, diferenciável, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, tal que:

- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$;
- $g(0) < 0$;
- $g'(x) < 0, \ \forall x \in]-\infty, -1[$.

Em cada um dos referenciais o.n. Oxy seguintes, **I**, **II** e **III**, estão representadas parte do gráfico de uma função e a assíntota a esse gráfico, de equação $x = -1$.



Justifique que em nenhum dos referenciais, **I**, **II** e **III**, pode estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$.

Na sua resposta, apresente, para cada um dos referenciais, uma razão que justifique a impossibilidade de nele estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$.

(I) Falsa, porque a função é contínua em todo o seu domínio uma vez que é diferenciável, logo $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = g(0^-) < 0$ uma vez que $g(0) < 0$. No gráfico **(I)** a função quando tende para valores à esquerda de 0 é positiva.

(II) Falsa, porque como $g'(x) < 0, \ \forall x \in]-\infty, -1[$ a função é decrescente no intervalo $]-\infty, -1[$ e no gráfico de **(II)** a função é crescente em $]-\infty, -1[$

(III) Falsa, porque como a função é par se $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$ então $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = +\infty$ e no gráfico de **(III)** $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$

11. Na Figura 5, está representado, no plano complexo, um triângulo equilátero, $[ABC]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial, O.

O ponto A pertence ao semieixo imaginário positivo.

Os pontos A e B são os afixos dos números complexos z_1 e z_2, respetivamente.

A qual dos quadrantes do plano complexo pertence o afixo do número complexo $z_1^2 \times z_2$?

(A) Ao primeiro. **(B)** Ao segundo.

(C) Ao terceiro. **(D)** Ao quarto.

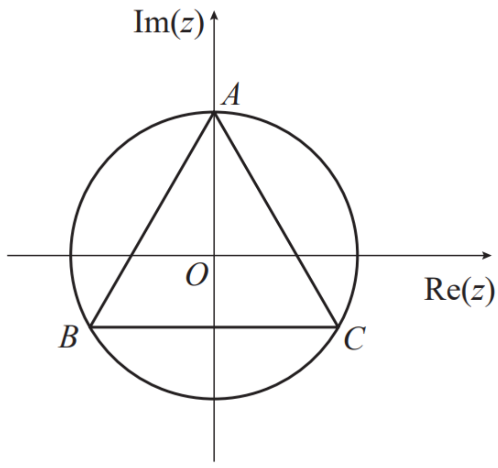


Figura 5

$$z_1 = re^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z_1^{\,2} = \left(re^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow z_1^{\,2} = r^2 e^{i\pi}$$

$$z_2 = re^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = re^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$z_1^{\,2} \times z_2 = r^2 e^{i\pi} \times re^{i\frac{7\pi}{6}} = r^3 e^{i\left(\pi+\frac{7\pi}{6}\right)} = r^3 e^{i\frac{13\pi}{6}} = r^3 e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)} = r^3 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Logo $z_1^{\,2} \times z_2$ pertence ao 1.º Quadrante

OPÇÃO: A

12. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $z = \dfrac{2\,i^{11} e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}\,i}$, com $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Sabe-se que:

- $\operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)$;
- o afixo de z pertence ao 4.º quadrante.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de α .

$$i^{11} = i^{4\times 2+3} = i^3 = -i$$

$$2i^{11} = -2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$-1-\sqrt{3}i$$

$$\left|-1-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}, \quad \theta \in 3.^{\text{o}}\text{Q} \Rightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3}$$

$$-1-\sqrt{3}i = 2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}i}=\frac{2e^{i\frac{3}{2}\pi}\times e i^{\alpha}}{2e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}}=e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)}=e^{i\left(\frac{13}{6}\pi+\alpha\right)}=e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$$

Como $\operatorname{Re}(z)=-\operatorname{Im}(z)\Rightarrow z=re^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$$re^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}\Rightarrow\begin{cases}r=1\\-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+\alpha+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=1\\\alpha=-\frac{5}{12}\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$k\in[0,2\pi[$

$k=0\Rightarrow\alpha=-\frac{5}{12}\pi$

$k=1\Rightarrow\alpha=-\frac{5}{12}\pi+2\pi=\frac{19}{12}\pi$

Logo $\alpha=\frac{19}{12}\pi$

13. Para fazer obras de remodelação das instalações, uma pequena empresa pretende pedir um empréstimo a um banco, a pagar em prestações mensais iguais.

De acordo com a proposta do banco, o valor da prestação mensal a pagar, p, em euros, é dado, em função da taxa de juro anual aplicada, j, em percentagem, pela expressão

$$p(j)=\frac{62{,}5j}{1-\left(1+\frac{j}{1200}\right)^{-120}},\quad \text{com } j>0$$

Sabe-se que, no caso de a taxa de juro anual inicial duplicar, a prestação mensal aumentará 120 euros.

Determine, utilizando a calculadora gráfica, a taxa de juro anual inicial.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às milésimas.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

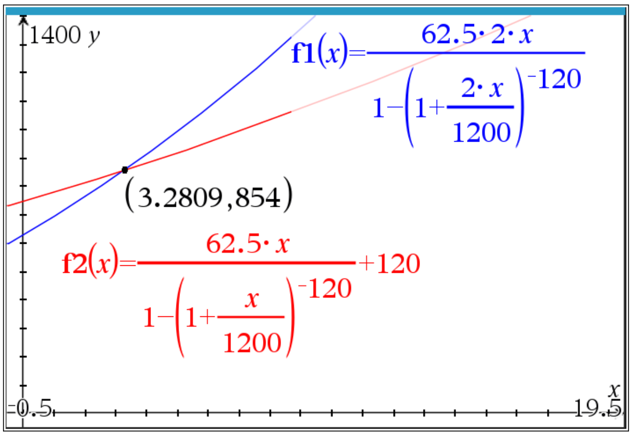
– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

$p(2j)=p(j)+120$

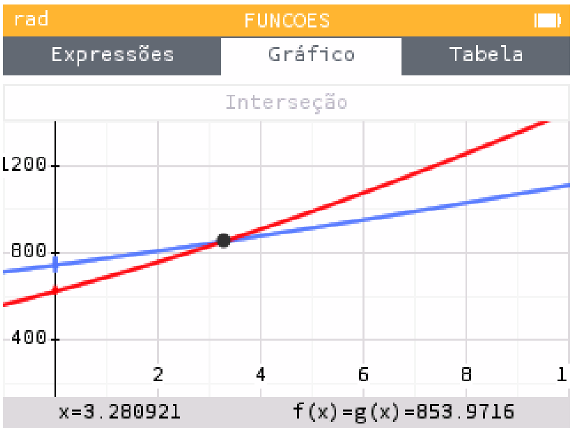
$$\text{f1:}\quad\frac{62{,}5\times 2x}{1-\left(1+\frac{2x}{1200}\right)^{-120}}$$

$$\text{f2:}\quad\frac{62{,}5x}{1-\left(1+\frac{x}{1200}\right)^{-120}}+120$$

TI-Nspire



NumWorks



$x \approx 3,281$

A taxa de juro inicial é $3,281$ %

14. Considere a função f, de domínio $]0,+\infty[$, definida por

$$f(x)=\frac{\ln x+2x}{x}$$

Resolva os itens **14.1.** e **14.2.** sem recorrer à calculadora.

✱ 14.1. O gráfico da função f admite uma assíntota vertical e uma assíntota horizontal.

Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

Assíntota vertical

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x+2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x}=\frac{-\infty}{0^+}+2=-\infty$$

Portanto $x=0$ é uma assíntota vertical

Assíntota horizontal:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x-2x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}-\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{x}=0+2=2$$

Logo, $y=2$ é uma assíntota horizontal

14.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos e determine esses extremos, caso existam.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função f.

$$f'(x)=\frac{(\ln x+2x)'\times x-(\ln x+2x)\times x'}{x^2}=\frac{\left(\frac{1}{x}+2\right)x-\ln x-2x}{x^2}=\frac{\frac{x}{x}+2x-\ln x-2x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\wedge x^2\neq 0\Leftrightarrow \ln x=1\wedge x\neq 0\Leftrightarrow x=e\wedge x\neq 0$$

Elaborando um quadro de sinais da derivada:

x	0		e	$+\infty$
$1-\ln x$	n.d.	$+$	0	$-$
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$
f'	n.d.	$+$	0	$-$
f	n.d.	$\nearrow$	máximo	$\searrow$

f é crescente em $\left]0,e\right]$

f é decrescente em $\left[e,+\infty\right[$

$f(e)=\frac{\ln e+2e}{e}=\frac{1+2e}{e}$ é um máximo de f

★ 15. Na Figura 6, estão representados, em referencial o.n. Oxy, uma semicircunferência de raio 2, e centro na origem do referencial, e o triângulo isósceles $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o vértice B pertence ao semieixo positivo Oy;
- o vértice C pertence ao semieixo negativo Ox;
- $\overline{AB} = \overline{BC}$;
- o lado $[AB]$ é tangente à semicircunferência no ponto T;
- $A\hat{O}T = \alpha$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

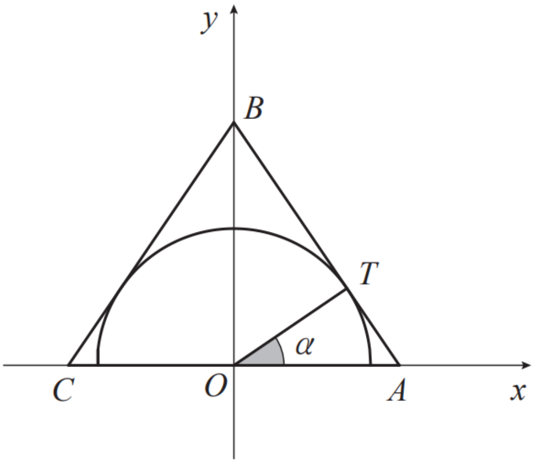


Figura 6

Prove que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de α, por $\dfrac{8}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$.

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{OB}}{2} = \frac{2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \overline{OA} \times \overline{OB}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{2}{\cos\alpha}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{2}{\cos\alpha} \times \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{4}{\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha} = \frac{2 \times 4}{2\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha} = \frac{8}{\operatorname{sen}(2\alpha)} \quad \text{c.q.m.}$$

✱ 16. Considere as funções f e g, de domínio $]0,+\infty[$, definidas por $f(x)=\frac{k}{x}$ e por $g(x)=-\frac{k}{x}$, com $k>0$.

Considere ainda:

- dois pontos P e Q, com a mesma abcissa, pertencentes, respetivamente, ao gráfico da função f e ao gráfico da função g;
- a reta s, tangente ao gráfico da função f no ponto P;
- a reta t, tangente ao gráfico da função g no ponto Q;
- o ponto R, ponto de intersecção das retas s e t.

Mostre que, qualquer que seja a abcissa dos pontos P e Q, a área do triângulo $[PQR]$ é igual a k.

Seja a a abcissa dos pontos P e Q

Como P pertence ao gráfico de f e Q pertence ao gráfico de g

$$P(a,f(a))=\left(a,\frac{k}{a}\right) \quad \text{e} \quad Q(a,g(a))=\left(a,-\frac{k}{a}\right)$$

$$f'(x)=\left(\frac{k}{x}\right)'=-\frac{k}{x^2} \quad \text{e} \quad g'(x)=\left(-\frac{k}{x}\right)'=\frac{k}{x^2}$$

Como s é a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a:

$$s:\ y=-\frac{k}{a^2}x+b_s$$

Como $P\left(a,\frac{k}{a}\right)$ pertence à reta s $\quad \frac{k}{a}=-\frac{k}{a^2}\times a+b_s \Leftrightarrow b_s=\frac{2k}{a}$

Portanto $s:\ y=-\frac{k}{a^2}x+\frac{2k}{a}$

Como r é a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa a:

$$r:\ y=\frac{k}{a^2}x+b_r$$

Como $P\left(a,-\frac{k}{a}\right)$ pertence à reta r $\quad -\frac{k}{a}=\frac{k}{a^2}\times a+b_r \Leftrightarrow b_r=-\frac{2k}{a}$

Portanto $r:\ y=\frac{k}{a^2}x-\frac{2k}{a}$

R é o ponto de interseção das retas s e r

$$-\frac{k}{a^2}x+\frac{2k}{a}=\frac{k}{a^2}x-\frac{2k}{a} \Leftrightarrow -\frac{k}{a^2}x-\frac{k}{a^2}x=-\frac{2k}{a}-\frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{2k}{a^2}x=\frac{4k}{a} \Leftrightarrow x=\frac{4k\times a^2}{2k\times a} \Leftrightarrow x=2a$$

A ordenada do ponto de interseção é $y=\frac{k}{a^2}\times 2a-\frac{2k}{a}\Leftrightarrow y=\frac{2k}{a}-\frac{2k}{a}\Leftrightarrow y=0$

Portanto a altura do triângulo $[PQR]$ é igual a $2a-a=a$

Logo a área do triângulo $[PQR]$

$$A_{[PQR]}=\frac{\overline{PQ}\times a}{2}=\frac{\left|f(a)-g(a)\right|\times a}{2}=\frac{\left|\frac{k}{a}+\frac{k}{a}\right|\times a}{2}=\frac{\left|\frac{2k}{a}\right|\times a}{2}=\frac{2ka}{2a}=k$$