EXAME DE MATEMÁTICA A

Ensino Secundário | 2022/2023

12.º Ano de Escolaridade

1ª Fase 2023

RESOLUÇÃO

1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$?

(A) 1 **(B)** $2e$ **(C)** e^2 **(D)** $+\infty$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{2} = e^2$$

OPÇÃO: C

2. A Figura 1 representa uma linha poligonal simples que começou a ser construída a partir do segmento de reta $[AB]$. O segundo segmento de reta, com uma das extremidades em B, foi construído com mais $2\ \mathrm{cm}$ do que o primeiro, o terceiro segmento foi construído com mais $2\ \mathrm{cm}$ do que o segundo, e assim sucessivamente, tendo cada segmento de reta sempre mais $2\ \mathrm{cm}$ do que o anterior.

Continuando a construção da linha poligonal, do modo acima descrito, até ao 100.º segmento de reta, obtém-se uma linha poligonal com o comprimento total de 104 metros.

Determine o comprimento do segmento de reta $[AB]$.

Apresente o valor pedido em centímetros.

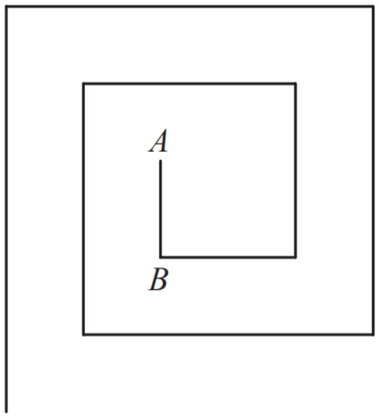


Figura 1

Seja $u_1 = \overline{AB}$, sabe-se que 104 metros corresponde a 10400 cm

Temos que a razão é igual a 2, porque $u_{n+1} = u_n + 2 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 2$

Assim, como $u_{100} = u_1 + (100-11)\times 2 \Leftrightarrow u_{100} = u_1 + 198$, $s_{100}=10400$ e $S_{100} = \frac{u_1 + u_{100}}{2}\times 100$

Então,

$$\frac{u_1 + u_{100}}{2}\times 100 = 10400 \Leftrightarrow (u_1 + u_1 + 198)\times 50 = 10400 \Leftrightarrow 2u_1 + 198 = \frac{10400}{50} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 + 198 = 208 \Leftrightarrow 2u_1 = 10 \Leftrightarrow u_1 = 5$$

3. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja f uma função diferenciável, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, f', é dada por

$$f'(x) = -2xe^{1-x^2}$$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, caso este(s) exista(m).

$$f''(x) = \left(-2xe^{1-x^2}\right)' = -2e^{1-x^2} - 2x(-2x)e^{1-x^2} = -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} =$$

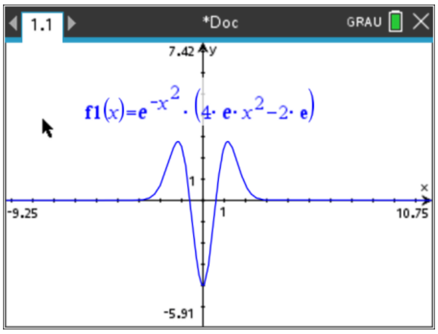
$$= \left(4ex^2 - 2e\right)e^{-x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(4ex^2 - 2e\right)e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x^2} = 0}_{\text{Impossível}} \vee 4ex^2 - 2e = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e\left(2x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Recorrendo ao quadro de sinais:

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
e^{-x^2}	+	+	+	+	+
$4ex^2 - 2e$	+	0	−	0	+
f''	+	0	−	0	+
f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$



f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$

f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

As abcissas dos pontos de inflexão são: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{4x-4}{e^{x-1}-1} & \text{se } x<1\\[2ex] 7\times 3^{x-1}-3 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** sem recorrer à calculadora.

4.1. Averigue se a função g é contínua em $x=1$.

A função g é contínua em $x=1$ se $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=g(1)$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{4x-4}{e^{x-1}-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{4(x-1)}{e^{x-1}-1}\underset{\substack{x\to 1^-\Rightarrow x-1\to 0^-\\ y=x-1}}{=}\lim_{y\to 0^-}\frac{4y}{e^y-1}=\frac{4}{\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{e^y-1}{y}}=\frac{4}{1}=4$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(7\times 3^{x-1}-3\right)=7\times 3^{1-1}-3=4$$

$$g(1)=7\times 3^{1-1}-3=4$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=g(1)$, a função é contínua em $x=1$

4.2. Resolva, no intervalo $[1,+\infty[$, a equação $\log_3(g(x))=x+\log_3 2$.

$$\log_3\left(7\times 3^{x-1}-3\right)=x+\log_3 2$$

$$D=\left\{x\in IR: 7\times 3^{x-1}-3>0\wedge x\in[1,+\infty[\right\}=\left]\log_3\frac{3}{7}+1,+\infty\right[\cap[1,+\infty[=[1,+\infty[$$

C.A.

$$7\times 3^{x-1}-3=0\Leftrightarrow 3^{x-1}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow 3^{x-1}=3^{\log_3\frac{3}{7}}\Leftrightarrow x-1=\log_3\frac{3}{7}\Leftrightarrow x=\log_3\frac{3}{7}+1$$

$$\log_3\left(7\times 3^{x-1}-3\right)=x+\log_3 2\Leftrightarrow \log_3\left(7\times 3^{x-1}-3\right)=\log_3 3^x+\log_3 2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(7\times 3^{x-1}-3\right)=\log_3\left(2\times 3^x\right)\Leftrightarrow 7\times 3^{x-1}-3=2\times 3^x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\times 3^x\times 3^{-1}-2\times 3^x=3\Leftrightarrow 3^x\left(\frac{7}{3}-2\right)=3\Leftrightarrow 3^x\times\frac{1}{3}=3\Leftrightarrow 3^x=3^2\Leftrightarrow x=2$$

5. Um grupo de jovens inscreveu-se num campo de férias que oferece as modalidades de *surf* e de *skate*.

5.1. Dez dos jovens do grupo vão deslocar-se em fila, pela praia, para uma aula de *surf*.

A Ana, o Diogo e o Francisco são três desses jovens.

De quantas formas diferentes se podem dispor os jovens na fila, ficando a Ana, o Diogo e o Francisco juntos?

(A) 483 840 **(B)** 241 920 **(C)** 60 480 **(D)** 30 240

Como os 3 amigos têm que ficar juntos e existem dez lugares disponíveis, temos $10 - 3 + 1 = 8$

posições onde podem ficar os três amigos juntos.

Como eles podem trocar de posição, os três amigos podem ficar dispostos de $8 \times 3!$

Os restantes 7 podem dispor-se nos restantes 7 lugares na fila de $7!$ formas diferentes.

Logo, os jovens podem dispor-se de $8 \times 3! \times 7! = 241\,920$ formas diferentes

5.2. No ato da inscrição, todos os jovens do grupo responderam a um questionário sobre a prática das modalidades de *surf* e de *skate*.

De acordo com as respostas ao questionário:

- 65% praticavam *surf*;
- 20% praticavam *skate* e não praticavam *surf*;
- quatro em cada cinco dos que praticavam *surf* também praticavam *skate*.

Selecionou-se, ao acaso, um jovem que, no questionário, tinha respondido que não praticava *skate*.

Determine a probabilidade de esse jovem, no questionário, também ter respondido que praticava *surf*.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Considere-se:

A: «Pratica Surf»

B: «Pratica Skate»

Sabe-se que:

$$P(A) = 0,65$$

$$P(\overline{A} \cap B) = 0,2$$

$$P(B \mid A) = \frac{4}{5} = 0,8$$

Queremos saber que $P(A \mid \overline{B})$

	A	$\overline{A}$	
B	$0,52$	$0,20$	$0,72$
$\overline{B}$	$0,13$	$0,15$	$0,28$
	$0,65$	$0,35$	1

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow 0,8 = \frac{P(A \cap B)}{0,65} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,65 \times 0,8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,52$$

Assim, $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,13}{0,28} = \dfrac{13}{28}$

5.3. Considere que, no grupo, há 70 jovens com 13 ou 14 anos de idade, sendo o número de jovens com 14 anos maior do que o número de jovens com 13 anos.

Para realizar uma determinada tarefa, vão ser selecionados, aleatoriamente, dois desses jovens.

Sabe-se que a probabilidade de selecionar dois desses jovens com idades distintas é $\dfrac{16}{35}$.

Determine o número de jovens com 13 anos que há no grupo.

Considere-se n o número de jovens com 13 anos e $70-n$ o número de jovens com 14 anos.

Como temos de escolher dois jovens, dos setenta, o número de casos possíveis é ${}^{70}C_2$

O número de casos favoráveis $n(70-n)$ representa a escolha de um jovem de 13 anos e de um jovem de 14 anos.

Assim:

$$\frac{n(70-n)}{{}^{70}C_2} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow \frac{70n - n^2}{2415} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow -n^2 + 70n = \frac{16 \times 2415}{35} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 70n - 1104 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-70 \pm \sqrt{70^2 - 4(-1)(-1104)}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 24 \vee n = 46$$

Logo como o número de jovens com 13 anos é inferior ao número de jovens com 14 anos, existem 24 jovens com 13 anos.

6. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[OABCDE]$, de bases $[ABC]$ e $[OED]$.

Sabe-se que:

- as bases do prisma estão inscritas em semicircunferências, respetivamente, de diâmetros $[AB]$ e $[OE]$;
- os vértices A e E do prisma pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox e Oy;
- $\overline{OE} = 12{,}5$;
- a reta AC é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (10, 0, 0) + k(0, 4, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

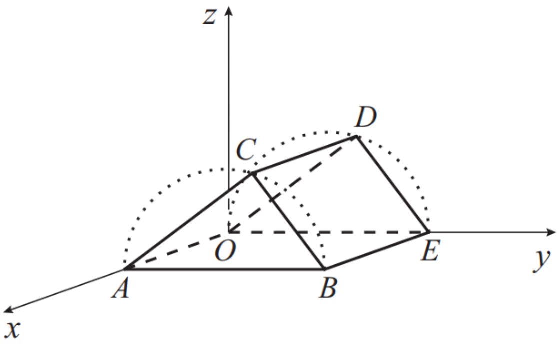


Figura 2

6.1. Qual das seguintes equações vetoriais define a reta OD?

(A) $(x, y, z) = (0, 6, 8) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (0, -4, -3) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (0, -4, -3) + k(0, 3, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (0, 6, 8) + k(0, 3, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

A reta OD é paralela à reta AC, então o vetor diretor de AC pode ser o mesmo da reta OD

Os vetores diretores das retas de (A) e (B) são os único que têm a mesma direção de AC

Como o ponto $O(0, 0, 0)$ pertence à reta OD temos:

(A) $(0, 0, 0) = (0, 6, 8) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, $k \in IR$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 6 + 2k \\ 0 = 8 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -3 = k \\ -\frac{16}{3} = k \end{cases}$$

, logo não pode ser esta reta

(B) $(0, 0, 0) = (0, -4, -3) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, $k \in IR$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -4 + 2k \\ 0 = -3 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2 = k \\ 2 = k \end{cases}$$

, logo o ponto O pertence à reta e tem a mesma direção de AB

OPÇÃO: B

6.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto C .

$A(10,0,0)$ pertence à reta AC

$\overline{OE} = \overline{AB} = 12,5$ portanto $B(10;12,5;0)$

De $AC: (x,y,z) = (10,0,0) + k(0,4,3),\ \ k \in IR$

sabemos, que qualquer ponto da reta é do tipo $(x,y,z,) = (10,4k,3k),\ \ k \in IR$

O ponto C pertence à superfície esférica de centro no ponto médio de $[AB]$, seja M esse ponto.

$$M\left(\frac{10+10}{2},\frac{0+12,5}{2},\frac{0+0}{2}\right) = \left(10,\frac{12,5}{2},0\right) = \left(10,\frac{25}{4},0\right)$$

A superfície esférica é:

$$(x-10)^2 + \left(y-\frac{25}{4}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2$$

Como C pertence à circunferência

$$(10-10)^2 + \left(4k-\frac{25}{4}\right)^2 + (3k)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16k^2 - 50k + \cancel{\left(\frac{25}{4}\right)^2} + 9k^2 = \cancel{\left(\frac{25}{4}\right)^2} \Leftrightarrow 25k^2 - 50k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k(k-2) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2$$

Se $k = 0$

$(x,y,z) = (10,0,0)$ este é o ponto A , que também pertence à superfície esférica

Se $k = 2$

$(x,y,z) = (10,4\times 2,3\times 2) = (10,8,6)$

Portanto $C(10,8,6)$

7. Na Figura 3, estão representados, em referencial o.n. Oxy, uma circunferência de centro na origem e os pontos A, P e Q, que pertencem à circunferência.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o ângulo orientado AOQ tem amplitude $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$;
- os pontos P e Q têm a mesma abcissa;
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3$.

Determine o valor de $\cos(2\alpha)$.

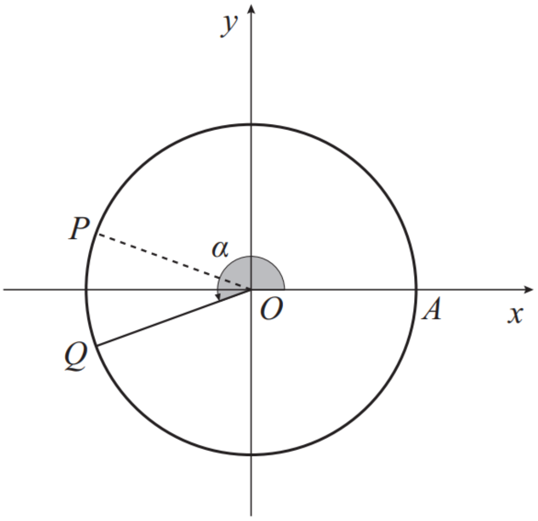


Figura 3

Como $A(2,0)$ o raio da circunferência é igual a 2

Temos que:

$Q(2\cos\alpha, 2\,\text{sen}\,\alpha)$

O ponto P tem a mesma abcissa de Q logo $x_P = x_Q$ e $y_p = -y_Q$

$P(2\cos\alpha, -2\,\text{sen}\,\alpha)$

$\overrightarrow{OP} = (2\cos\alpha.2\,\text{sen}\,\alpha)$ e $\overrightarrow{OQ} = (2\cos\alpha, -2\,\text{sen}\,\alpha)$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\cos\alpha.2\,\text{sen}\,\alpha) \cdot (2\cos\alpha, -2\,\text{sen}\,\alpha) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\alpha - 4\,\text{sen}^2\,\alpha = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\,\alpha) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cos(2\alpha) = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{3}{4}$

8. Uma empresa está a desenvolver um programa de testes para melhorar a propulsão de foguetes.

Os foguetes utilizados partem do solo e seguem uma trajetória vertical.

Em relação a um dos modelos de foguete utilizados, admita que, após o lançamento e até se esgotar o combustível, a sua distância ao solo, a, em metros, é dada, a cada instante t, em segundos, por

$$a(t) = 100\left[t + (10-t)\ln\left(1-\frac{t}{10}\right)\right] - 4{,}9t^2 \text{ , com } t \in [0, 8]$$

Determine, utilizando a calculadora gráfica, o instante a partir do qual, durante 3 segundos, esse foguete percorre 25 metros.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

Como a trajetória do foguete é vertical então durante 3 segundos o foguete percorre:

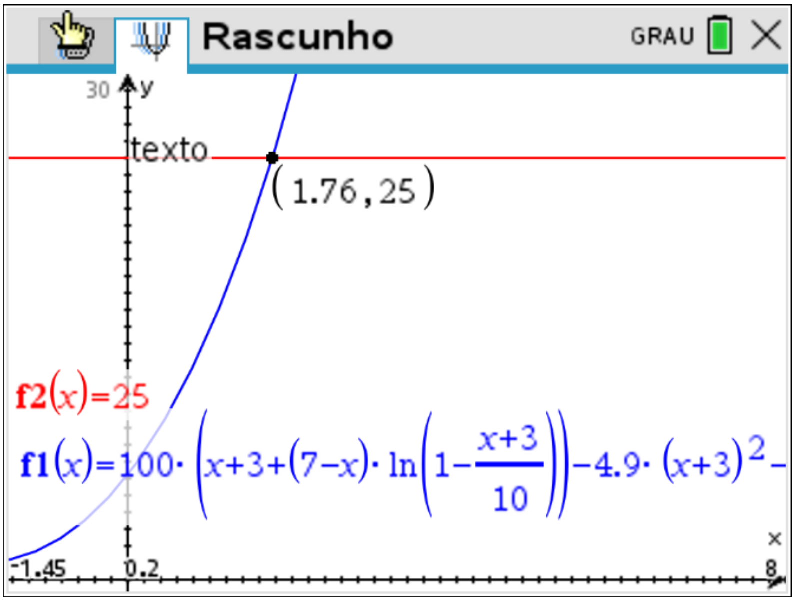
$a(t+3) - a(t)$

O instante a partir do qual o foguete percorre 25 metros é dado pela equação:

$$a(t+3) - a(t) = 25 \Leftrightarrow$$

$$100\left[t+3+(10-(t+3))\ln\left(1-\frac{t+3}{10}\right)\right] - 4{,}9(t+3)^2 - 100\left[t+(10-t)\ln\left(1-\frac{t}{10}\right)\right] + 4{,}9t^2 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{100\left[t+3+(7-t)\ln\left(1-\frac{t+3}{10}\right)\right] - 4{,}9(t+3)^2 - 100\left[t+(10-t)\ln\left(1-\frac{t}{10}\right)\right] + 4{,}9t^2}_{f1} = \underbrace{25}_{f2}$$



Por observação do gráfico o instante é 1,8 s

9. Sejam f e g funções duas vezes diferenciáveis, de domínios $\mathbb{R}$ e $]0,+\infty[$, respetivamente, e seja r a reta de equação $y=2x-1$.

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x+1)=0$;
- nos respetivos domínios, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo.

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $+\infty$.

II. $\lim\limits_{x\to1} g(x)=2$.

III. $f''(x)<g''(x)$, $\forall\, x\in\,]0,+\infty[$.

Justifique que as proposições **I**, **II** e **III** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

(I) É falsa porque

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-2x+1\right)=0$ então a reta $y=2x-1$ é uma assíntota oblíqua de $f\left(x\right)$ em $x\to+\infty$

Logo não existe assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to+\infty$

(II) É falsa porque $y=2x-1$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1, o ponto de tangência é $\left(1,g\left(1\right)\right)$ e que é o mesmo da reta r , isto é, $y=2\times1-1=1$, $g\left(1\right)=1$. Como a função é diferenciável, é contínua em todo o seu domínio logo $\lim\limits_{x\to1} g\left(x\right)=g\left(1\right)=1$

(III) É falsa porque:

f tem a concavidade voltada para cima em todo o seu domínio, logo $f''\left(x\right)\geq0,\ \forall x\in D_f$

g tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio, logo $g''\left(x\right)\leq0,\ \forall x\in D_g$

Portanto $f''\left(x\right)\leq g''\left(x\right),\ \forall x\in\left]0,+\infty\right[$

10. Na Figura 4, estão representados, no plano complexo, os pontos A e B.

O ponto O é a origem do referencial.

O ponto A é o afixo de um número complexo z tal que $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Re}(z)>0$.

O ponto B é o afixo de um número complexo w tal que o ângulo convexo AOB tem amplitude $\frac{5\pi}{8}$ radianos.

Qual dos valores seguintes é um argumento de $w \times z$?

(A) $\frac{3\pi}{8}$ **(B)** $\frac{5\pi}{8}$

(C) $\frac{9\pi}{8}$ **(D)** $\frac{11\pi}{8}$

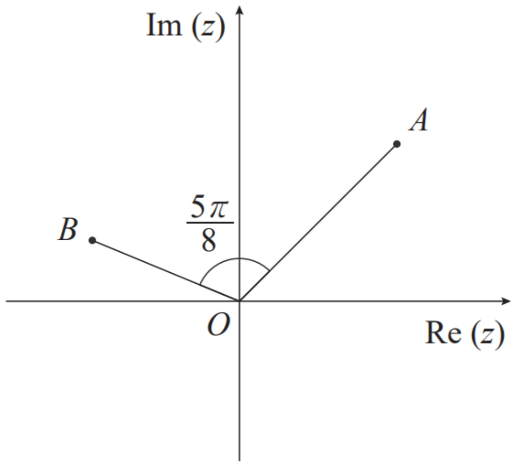


Figura 4

O ponto A é o afixo de z, $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z)$ e $\operatorname{Re}(z)>0$, então $\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{4}$

Assim, $z=|z|e^{i\frac{\pi}{4}}$

O ponto B é o afixo de w, então $w=|w|e^{i\left(\frac{5\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)}=|w|e^{i\frac{7\pi}{8}}$

Logo, $w\times z=|w||z|e^{i\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)}=|w||z|e^{i\left(\frac{9\pi}{8}\right)}$

OPÇÃO: C

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = \dfrac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i^{17}}{i}$.

Determine, em $\mathbb{C}$, as soluções da equação $z^2 = w$.

Apresente os valores pedidos na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

$$i^{17} = i^{4\times 2+1} = i$$

$$e^{i\frac{5\pi}{6}} = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$w = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i^{17}}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - i}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}}{i} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)i}{i^2} = \frac{-i^2\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} |w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\ \left.\begin{array}{l} \tan\theta = -\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \\ \theta \in 2.^{\text{o}}\ \text{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Logo, $w = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$z^2 = w \Leftrightarrow z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z = e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)},\ k \in \{0,1\} \Leftrightarrow z = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right)},\ k \in \{0,1\}$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

12. Seja f a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(2x) + x$, e seja r a reta de equação $y = -x + 2$.

12.1. Qual das expressões seguintes pode definir a função derivada de f?

(A) $2 - 2\cos^2 x$ **(B)** $2 - 2\operatorname{sen}^2 x$ **(C)** $3 - 4\cos^2 x$ **(D)** $3 - 4\operatorname{sen}^2 x$

$$f'(x) = \left(\operatorname{sen}(2x) + x\right)' = 2\cos(2x) + 1 = 2\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) + 1 = \quad \boxed{\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x}$$
$$= 2\left(1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) + 1 = 2 - 4\operatorname{sen}^2 x + 1 = 3 - 4\operatorname{sen}^2 x$$

OPÇÃO: D

12.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico da função f intersecta a reta r em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$.

Como f interseta a reta r então a abcissa é igual na função e na reta, ou seja, queremos saber o valor de x para o qual $f(x) = -x + 2 \Leftrightarrow f(x) + x - 2 = 0$.

Seja $h(x) = f(x) + x - 2 = \operatorname{sen}(2x) + x + x - 2 = \operatorname{sen}(2x) + 2x - 2$

A função f é contínua em $[0, \pi]$ e a reta r pode ser definida por uma função afim, logo é contínua em IR, como h é a adição de duas funções contínuas em $[0, \pi]$ e IR, em particular é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{6} - 2 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - 2 \approx -0,09$$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} - 2 \approx 0,96$$

Assim, como $h\left(\frac{\pi}{6}\right) \times h\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$ e h é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy $\exists c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[: h(c) = 0$

Portanto existe, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$

13. Sejam a e b números reais, não nulos, tais que a reta de equação $y = ax + b$ é tangente ao gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx$.

Determine as coordenadas do ponto de tangência.

$$f'(x) = \left(ax^2 + bx\right)' = 2ax + b$$

Logo, como $y = ax + b$ é tangente ao gráfico de f então:

$$2ax + b = a \Leftrightarrow 2ax = a - b \Leftrightarrow x = \frac{a-b}{2a}$$

Ponto de tangência:

$$f\left(\frac{a-b}{2a}\right) = a\left(\frac{a-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{a-b}{2a}\right) = \frac{a\left(a^2 - 2ab + b^2\right)}{4a^2} + \frac{ab - b^2}{2a} =$$

$$= \frac{a^3 - \cancel{2a^2b} + ab^2 + \cancel{2a^2b} - 2ab^2}{4a^2} = \frac{\cancel{a}\left(a^2 - b^2\right)}{4a^{\cancel{2}}} = \frac{a^2 - b^2}{4a}$$

$$y = ax + b$$

$$\frac{a^2 - b^2}{4a} = \cancel{a}\,\frac{a-b}{2\cancel{a}} + b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{4a} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{(a-b)(a+b)}{4a} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{4a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a - 2b = 4a \Leftrightarrow -2b = 2a \Leftrightarrow a = -b$$

Como $a = -b$, então $x = \dfrac{a - (-a)}{2a} = 1$

Assim, $y = ax + b = a \times 1 + b = a + b \underset{a=-b}{=} -b + b = 0$

Portanto o ponto de tangência é $(1, 0)$