

1. Se n é par:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Se n é ímpar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, é convergente.

OPÇÃO: B

2. Sabemos que razão é $\frac{2}{3}$

$$\text{Então } u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \frac{2}{3}} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{243}{1} = 211 \Leftrightarrow u_1 \times \frac{633}{243} = 211 \Leftrightarrow u_1 = \frac{211 \times 243}{633} \Leftrightarrow u_1 = 81$$

$$\text{Assim, } u_5 = u_1 \times r^{5-1} \Leftrightarrow u_5 = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \Leftrightarrow u_5 = 16$$

3. Como $A \cap B = \emptyset$, os acontecimentos A e B são incompatíveis, ou seja,

$$\underbrace{P(A \cup B)}_{0,6} = P(A) + P(B) \Leftrightarrow 0,6 = P(A) + 0,4 \Leftrightarrow P(A) = 0,2$$

$P(\bar{B})=0,6 \Leftrightarrow P(B)=0,4$

$$\text{Logo } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,2 = 0,8$$

OPÇÃO: D

4. As peças podem ser da mesma cor ou de cor diferentes.

Deste modo:

- $3 \times {}^{12}C_2$, é o número de maneiras de escolher uma das 3 cores, 3C_1 , e para cada uma delas, escolher duas das doze casas do tabuleiro para as duas peças da mesma cor, ${}^{12}C_2$
- ${}^3C_2 \times {}^{12}A_2$, é o numero de maneiras de escolher duas das três cores, 3C_2 , e para cada uma delas, escolher ordenadamente duas das doze casas do tabuleiro para as duas peças de cores diferentes, ${}^{12}A_2$

5. Designemos os acontecimentos:

S : «O aluno jogou Semáforo»

R : «O aluno jogou Rastros»

Sabemos, pelo enunciado, que:

- $P(S) = \frac{1}{2} P$
- $P(\bar{R}) = \frac{1}{4}$
- $P(S | \bar{R}) = \frac{1}{5}$

Pretende-se $P(\bar{S} \cap R)$

Construindo a tabela de dupla entrada:

	S	\bar{S}	
R	$\frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$	$\frac{3}{4} - \frac{9}{20} = \frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}$
\bar{R}	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$\text{De } P(S | \bar{R}) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(S \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(S \cap \bar{R}) = \frac{P(\bar{R})}{5} \Leftrightarrow P(S \cap \bar{R}) = \frac{\frac{1}{4}}{5} \Leftrightarrow P(S \cap \bar{R}) = \frac{1}{20}$$

Portanto, $P(\bar{S} \cap R) = \frac{3}{10}$

6.

- 6.1. O plano que contém a base do cone é $4y - 3z = 16$, seja $\vec{u} = (0, 4, -3)$ um vetor normal ao plano. Então qualquer vetor perpendicular a \vec{u} é um vetor normal do plano perpendicular ao plano que contém a base do cone.

Seja $\vec{v} \perp \vec{u}$ então um vetor perpendicular pode ser $\vec{v} = (1, 3, 4)$

Logo o plano é do tipo $x + 3y + 4z + d = 0$, como passa no ponto $(1, 2, -1)$ calculemos o valor de d .

$$1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + d = 0 \Leftrightarrow 1 + 6 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Logo o plano pedido é $x + 3y + 4z = 3$

OPÇÃO: D

- 6.2. O ponto A é do tipo $(0, y, 0)$ e o ponto V é do tipo $(0, 0, z)$

Como A faz parte do plano que contém a base então

$$4y - 3 \cdot 0 = 16 \Leftrightarrow 4y = 16 \Leftrightarrow y = 4$$

Assim, tem-se $A(0, 4, 0)$

$[AV]$ é a altura do cone.

Vamos determinar a reta AV :

Vetor diretor é o vetor normal ao plano, isto é, $\vec{u} = (0, 4, -3)$

Reta $AV: (x, y, z) = (0, 4, 0) + k(0, 4, -3), k \in \mathbb{R}$

Como $V(0, 0, z)$, então

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 4 + 4k \\ z = -3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ k = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Logo $V(0, 0, 3)$ e $\overrightarrow{AV} = V - A = (0, 0, 3) - (0, 4, 0) = (0, -4, 3)$

A altura do cone é $\|\overrightarrow{AV}\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 3^2} = 5$

Portanto $V_{cone} = \frac{1}{3} \times 3^2 \pi \times 5 = \frac{1}{3} \times 9\pi \times 5 = 15\pi$

7. O raio da circunferência é 3.

Como o arco de circunferência AB tem comprimento 2π e o raio é igual a 3 então como o comprimento do arco AB é dado por $A\hat{C}B \times \overline{CA}$, então $A\hat{C}B \times 3 = 2\pi \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{2\pi}{3}$ donde se conclui que

$$\cos(\overline{CB} \wedge \overline{CA}) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$[CA]$ e $[CB]$ são raios da circunferência, logo as normas dos vetores são iguais, isto é, $\|\overline{CA}\| = \|\overline{CB}\| = 3$

$$\text{Como } \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \|\overline{CA}\| \cdot \|\overline{CB}\| \cdot \cos(\overline{CA} \wedge \overline{CB}) \Leftrightarrow \overline{CA} \cdot \overline{CB} = 3 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \overline{CA} \cdot \overline{CB} = -\frac{9}{2}$$

8.

8.1. A função f é contínua em $x = 2$ se:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$f(2) = \frac{e^{2-2}}{2+2} = \frac{e^0}{4} = \frac{1}{4}$$

Vamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{2-x}}{x+2} = \frac{e^{2-2}}{2+2} = \frac{1}{4} = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\text{sen}(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\text{sen}(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\text{sen}(x-2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x+2} =$$

Fazendo $y = x - 2$, se $x \rightarrow 2^-$ então $y \rightarrow 0^-$

$$= \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x+2} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Logo, como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ podemos concluir que a função é contínua em $x = 2$

8.2. No intervalo $]-\infty, -2[$ a derivada de f é:

$$f'(x) = \left(\frac{e^{2-x}}{x+2} \right)' = \frac{(e^{2-x})'(x+2) - e^{2-x}(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{-e^{2-x}(x+2) - e^{2-x}}{(x+2)^2} = \frac{-e^{2-x}(x+2+1)}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-e^{2-x}(x+3)}{(x+2)^2}$$

Os zeros da derivada são:

$$\frac{-e^{2-x}(x+3)}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow e^{2-x}(-x-3) = 0 \wedge \underbrace{(x+2)^2 \neq 0}_{\text{Condição universal em }]-\infty, -2[} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -e^{2-x} = 0 \vee -x-3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{2-x} = 0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \vee x = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Fazendo o quadro de sinais da derivada, no intervalo $]-\infty, -2[$ e relacionando com a monotonia de f , tem-se:

x	$-\infty$	-3		-2
f'	$+$	0	$-$	n.d.
f	\nearrow	Máximo: $f(-3)$	\searrow	n.d.

Portanto a função f :

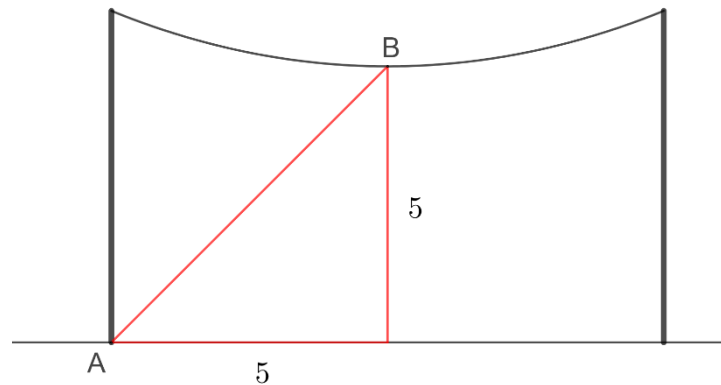
- é crescente em $]-\infty, -3]$
- é decrescente em $[-3, -2[$
- Tem um máximo relativo para $x = -3$, que é, $f(-3) = \frac{e^{2+3}}{-3+2} = -e^5$

9.

9.1. Sabemos que o ponto mais próximo do solo é equidistante dos dois postes, então $h(5)$ é a altura mais próxima do solo.

$$h(5) = 6,3 \left(e^{\frac{5-5}{12,6}} + e^{\frac{5-5}{12,6}} \right) - 7,6 = 6,3(e^0 + e^0) - 7,6 = 12,6 - 7,6 = 5$$

Reproduzindo um esquema da figura temos:



Assim, $d(A, B) = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} \approx 7,1$

OPÇÃO: A

9.2. Seja x a distância do poste a d , se essa a distância diminuir 50% então a distância ao solo diminui 30 centímetros, isto é, 0,3 metros

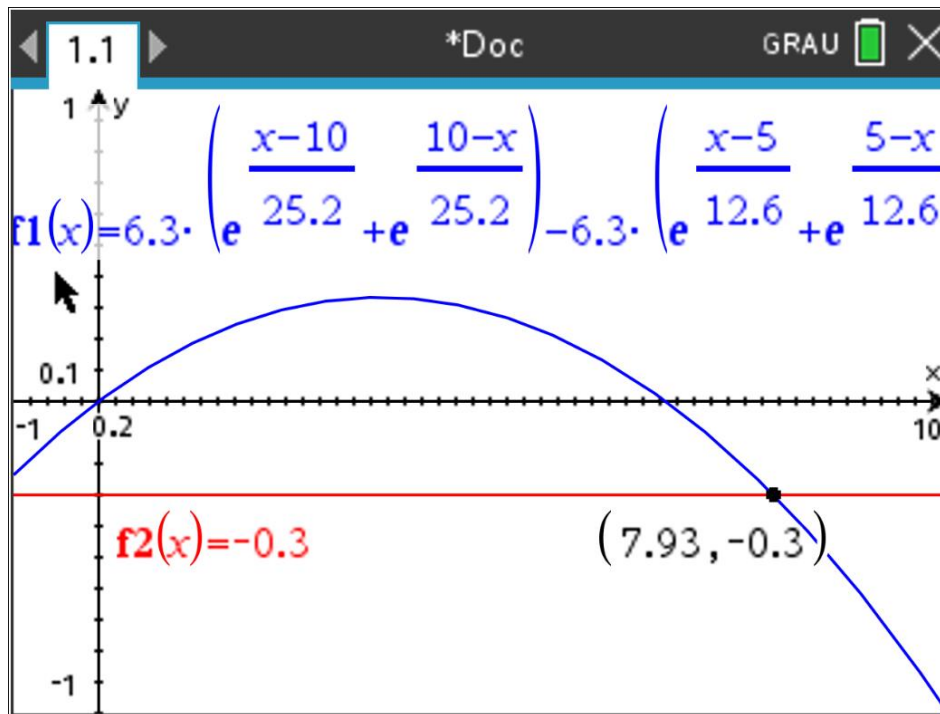
Logo, a equação que permite resolver o problema é:

$$\begin{aligned} h\left(\frac{x}{2}\right) = h(x) - 0,3 &\Leftrightarrow h\left(\frac{x}{2}\right) - h(x) = -0,3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6,3 \left(e^{\frac{\frac{x}{2}-5}{12,6}} + e^{\frac{5-\frac{x}{2}}{12,6}} \right) - 7,6 - 6,3 \left(e^{\frac{x-5}{12,6}} + e^{\frac{5-x}{12,6}} \right) + 7,6 = -0,3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6,3 \left(e^{\frac{x-10}{25,2}} + e^{\frac{10-x}{25,2}} \right) - 6,3 \left(e^{\frac{x-5}{12,6}} + e^{\frac{5-x}{12,6}} \right) = -0,3 \end{aligned}$$

Seja:

- $f_1(x) = 6,3 \left(e^{\frac{x-10}{25,2}} + e^{\frac{10-x}{25,2}} \right) - 6,3 \left(e^{\frac{x-5}{12,6}} + e^{\frac{5-x}{12,6}} \right)$
- $f_2(x) = -0,3$

Colocando na calculadora, obtemos:



Tratando-se de uma distância, não existem valores negativos, logo o valor de d é 7,9 m e é único.

10. Temos que $\text{Im}(w) = -\text{Re}(w)$, tomando $a = \text{Re}(w)$ vem que $w = a - ai$, com $a > 1$

$$\text{Então, } -iw^2 = -i(a - ai)^2 = -i\left(a^2 - 2a^2i + a^2 \underset{-1}{i^2}\right) = -i\left(a^2 - 2a^2i - a^2\right) = -i\left(-2a^2i\right) = 2a^2 \underset{-1}{i^2} = -2a^2$$

Logo, w é um número real negativo inferior a -2 , uma vez que $a > 1 \Leftrightarrow a^2 > 1 \Leftrightarrow -2a^2 < -2$

Conclui-se assim, que dos pontos apresentados o único que pode ser o afixo de $-iw^2$ é o C

OPÇÃO: C

11. Temos que:

$$|-\sqrt{3} + i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

Seendo θ um argumento de $-\sqrt{3} + i$ temos que:

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \theta \text{ pertence ao segundo quadrante,}$$

então θ pode ser $\frac{5\pi}{6}$, logo $-\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$\text{Assim, } \left(\frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{2}i}\right)^6 = \left(\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^6 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)}\right)^6 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i\frac{6\pi}{3}} = 2^{\frac{6}{2}} e^{i2\pi} = 8e^{i2\pi}$$

Portanto as soluções da equação $z^3 = 8e^{i(0)} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, com $k \in \{0, 1, 2\}$

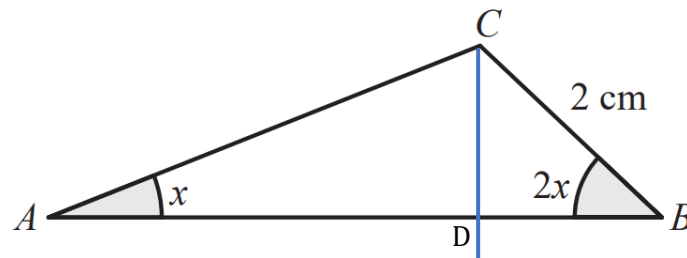
Logo:

- $k = 0$, então $z = 2e^{i(0)} = 2$, o afixo não pertence ao 3.º quadrante;
- $k = 1$, então $z = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$, o afixo não pertence ao 3.º quadrante;
- $k = 2$, então $z = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$, o afixo pertence ao 3.º quadrante

Conclui-se assim, que o número complexo que é solução da equação e cujo afixo, no plano complexo, pertence ao 3.º quadrante é:

$$2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \text{sen } \frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

12. Recorrendo a um esquema da figura, em que D é a projeção ortogonal de C , temos:



$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$$

Calcular \overline{DB} :

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \frac{\overline{DB}}{2} \Leftrightarrow 2 \underbrace{\cos(2x)}_{\cos(2x)=\cos^2 x - \sin^2 x} = \overline{DB} \Leftrightarrow \overline{DB} = 2 \left(\underbrace{\cos^2 x}_{\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x} - \sin^2 x \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{DB} &= 2(\cos^2 x + \cos^2 x - 1) \Leftrightarrow \overline{DB} = 4\cos^2 x - 2 \end{aligned}$$

Calcular \overline{CD} :

$$\sin(2x) = \frac{\overline{CD}}{2} \Leftrightarrow 2\sin(2x) = \overline{CD}$$

Calcular \overline{AD} :

$$\tan x = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \tan x = \frac{2\sin(2x)}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{2 \overbrace{\sin(2x)}^{\sin(2x)=2\sin x \cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{4 \cancel{\sin x} \cos x}{\cancel{\sin x}} \Leftrightarrow \overline{AD} = 4\cos^2 x$$

$$\text{De } \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = 4\cos^2 x + 4\cos^2 x - 2 = 8\cos^2 x - 2 \text{ c.q.m.}$$

13. Assíntotas verticais:

Como o domínio da função g é $]1, +\infty[$, vamos verificar se $x = 1$ é assíntota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (5x - 3\ln(x-1)) = 5 - 3\ln 0^+ = 5 - 3(-\infty) = +\infty$$

Logo, $x = 1$ é uma assíntota vertical de g

Assíntotas oblíquas ($y = mx + b$):

Declive (m):

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3 \ln(x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln(x-1)}{x} = \\ &= 5 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln\left(x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)}{x} = 5 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\left(\ln x + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)}{x} = 5 - 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x} = \\ &= 5 - 3 \times 0 - 3 \times \frac{\ln 1}{+\infty} = 5 - 0 - \frac{0}{+\infty} = 5 \end{aligned}$$

Ordenada na origem (b):

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 5x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \ln(x-1) - 5x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln(x-1)) = -(+\infty) = -\infty$$

Logo não existe assíntota oblíqua ao gráfico da função g

14. Começemos por determinar o domínio:

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : 5 - 2x > 0 \wedge 3 - x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -2x > -5 \wedge -x > -3\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x < 5 \wedge x < 3\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{5}{2} \wedge x < 3\right\} = \left] -\infty, \frac{5}{2} \right[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^x - 1) \ln(5 - 2x) + e^x \ln(3 - x) &= \ln(3 - x) \Leftrightarrow (e^x - 1) \ln(5 - 2x) + e^x \ln(3 - x) - \ln(3 - x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (e^x - 1) \ln(5 - 2x) + (e^x - 1) \ln(3 - x) &= 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(\ln(5 - 2x) + \ln(3 - x)) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \vee \ln(5 - 2x) + \ln(3 - x) &= 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \vee \ln(5 - 2x) = -\ln(3 - x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^x = e^0 \vee \ln(5 - 2x) = \ln(3 - x)^{-1} &\Leftrightarrow x = 0 \vee 5 - 2x = \frac{1}{3 - x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee 15 - 6x - 5x + 2x^2 = 1 \wedge 3 - x \neq 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 - 11x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = &\frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 2 \times 14}}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = &\frac{11 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{11 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{14}{4} \vee x = \frac{8}{4} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = &\frac{7}{2} \vee x = 2 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{0, 2\}$$

15. Seja a a abcissa do ponto A e b a abcissa do ponto B , com $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a < b$

As coordenadas dos pontos são:

- $A\left(a, \frac{k}{a}\right)$
- $B\left(b, \frac{k}{b}\right)$

O declive da reta que passa pelos pontos A e B é:

$$m = \frac{\frac{k}{b} - \frac{k}{a}}{b - a} = \frac{ak - bk}{ab(b - a)} = \frac{k(a - b)}{ab(b - a)} = -\frac{k(a - b)}{ab(b - a)} \stackrel{a < b \Rightarrow a - b \neq 0}{=} -\frac{k}{ab}$$

Seja $c \in \mathbb{R}^+$ um ponto do gráfico em que a reta tangente é paralela a AB .

$$f'(c) = \left(\frac{k}{c}\right)' = -\frac{k}{c^2}$$

Como as retas são paralelas, os declives são iguais, isto é,

$$-\frac{k}{ab} = -\frac{k}{c^2} \Leftrightarrow ab = c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{ab}, \quad c \in \mathbb{R}^+$$

Temos que as três abcissas dos pontos são: a , \sqrt{ab} e b , como $0 < a < b$, vem que:

- $0 < a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} < \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \Leftrightarrow a < \sqrt{ab}$
 $\sqrt{a} > 0$
- $0 < a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} < \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} < b$
 $\sqrt{b} > 0$

Portanto $a < \sqrt{ab} < b$ e as três abcissas são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, uma vez que:

$$\frac{b}{\sqrt{ab}} = \frac{b}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{\cancel{b} \sqrt{ab}}{a \cancel{\sqrt{ab}}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$$