Funções – Trigonometria 1 **Resolução**

1. Seja f a função real de variável real definida por $f(x)=\sin^2(3x)$.

A expressão de f', função derivada de f, é:

(A) $f'(x)=2\sin(3x)$ (B) $f'(x)=3\sin(6x)$

(C) $f'(x)=\sin(6x)$ (D) $f'(x)=2\cos(3x)$

$$f'(x)=\left(\sin^2(3x)\right)'=3\times 2\sin(3x)\cos(3x)=3\sin(6x)$$

Opção **(B)**.

2. Considera a função f definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{6x-\pi} & \text{se} \quad x>\dfrac{\pi}{6}\\ k+\cos\left(6x-\frac{\pi}{3}\right) & \text{se} \quad x\le\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

O valor de k para o qual a função f é contínua é:

(A) $\frac{5}{6}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{6}$

Basta analisar a continuidade para $x=\frac{\pi}{6}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{6x-\pi}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$$

Fazendo $x-\frac{\pi}{6}=y$, tem-se $\lim\limits_{y\to 0^+}\left(\frac{1}{6}\times\frac{\sin y}{y}\right)=\frac{1}{6}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}^-}\left[k+\cos\left(6x-\frac{\pi}{3}\right)\right]=k+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=k-\frac{1}{2}$. Então, $k-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$.

Opção **(C)**.

3. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{8}$ é:

(A) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$f'(x)=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Então:

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=-2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\right)=-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)=$$

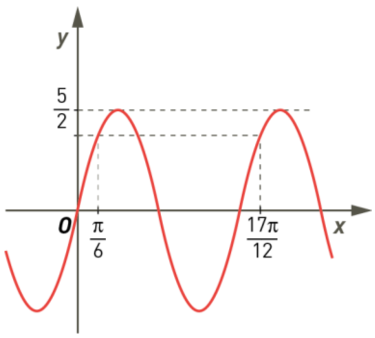
$$=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

Opção **(A)**.

4. Considera a expressão $f(x)=k\sin(ax)$; $a,k\in\mathbb{R}^+$.

Para certos valores de a e de k, obtém-se uma função de domínio $\mathbb{R}$ em que parte da representação gráfica é apresentada na figura ao lado.

Sabe-se que a amplitude do intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{17\pi}{12}\right]$ é o período positivo mínimo da função.



Os valores de a e k são:

(A) $a=\frac{8}{5}$ e $k=\frac{5}{2}$ (B) $a=\frac{5}{4}$ e $k=\frac{5}{2}$

(C) $a=\frac{5}{4}$ e $k=3$ (D) $a=\frac{8}{5}$ e $k=5$

Sabe-se que $-1\le\sin(ax)\le1$, ou seja, $-k\le k\sin(ax)\le k$.

Atendendo à figura, $k=\frac{5}{2}$. Seja T o período positivo mínimo da função.

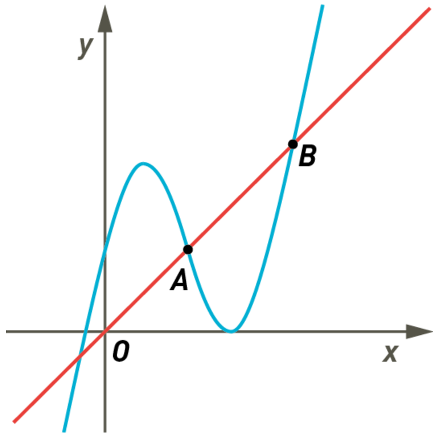
$T=\frac{17\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{15\pi}{12}=\frac{5\pi}{4}$. Então, $\frac{2\pi}{|a|}=\frac{5\pi}{4}\Leftrightarrow5\pi|a|=8\pi\Leftrightarrow|a|=\frac{8}{5}$.

Como $a>0$, $a=\frac{8}{5}$.

Opção (A).

5. Na figura estão representadas graficamente as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = x - 4\cos(x-4) \quad \text{e} \quad g(x) = x$$



Sabe-se que os pontos A e B são pontos de interseção dos gráficos de f e g cujas abcissas pertencem a $[0, 2\pi]$.

5.1. Determina a distância entre os pontos A e B.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 4\cos(x-4) = x \Leftrightarrow -4\cos(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 4 \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Como $x \in [0, 2\pi]$, $x_A = 4 - \frac{\pi}{2}$ e $x_B = 4 + \frac{\pi}{2}$. Então, $\overline{AB} = \sqrt{\pi^2 + \pi^2} = \pi\sqrt{2}$.

5.2. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f(x)}{x-4}$

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{x - 4\cos(x-4)}{x-4}$$. Fazendo $x - 4 = y$, tem-se:

$$\lim_{y\to 0} \frac{y + 4 - 4\cos y}{y} = \lim_{y\to 0}\left(1 + \frac{4(1-\cos y)}{y}\right) = 1 + 4\lim_{y\to 0} \frac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y(1+\cos y)} = = 1 + 4\lim_{y\to 0} \frac{\sin^2 y}{y(1+\cos y)} =$$

$$1 + 4\left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{1+\cos y} \times \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}\right) = = 1 + 4\left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{1+\cos y} \times \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}\right) = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{f'(x) - 1}{x^2 - x - 12}$

$$\lim_{x\to 4} \frac{f'(x) - 1}{x^2 - x - 12} = \lim_{x\to 4} \frac{1 + 4\sin(x-4) - 1}{(x-4)(x+3)} = \lim_{\substack{x\to 4 \\ x-4\to 0}} \frac{\sin(x-4)}{x-4} \times \lim_{x\to 4} \frac{4}{x+3} = 1 \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$$

6. Considera a função real de variável real g definida por:

$$g(x) = 1 + \sqrt{3}\cos x - \sin x$$

6.1. Mostra que $g(x) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Sendo $g(x) = 1 + \sqrt{3}\cos x - \sin x$, tem-se:

$$g(x) = 1 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = 1 + 2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

6.2. Determina os zeros de g.

$$g(x)=0 \Leftrightarrow 1+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

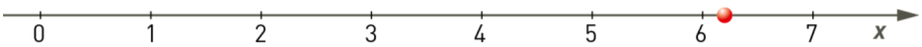
$$\frac{\pi}{3}-x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee \frac{\pi}{3}-x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}-2k\pi \vee x=-\frac{5\pi}{6}-2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

6.3. Sabe-se que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ e $\sin\alpha=\frac{3}{4}$. Determina o declive da reta tangente ao gráfico de g no pont $A(\alpha, g(\alpha))$.

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{7}{16} \text{ e } \alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\text{. Então, } \cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$g'(x)=-2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=-2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)=\frac{\sqrt{7}}{4}-\sqrt{3}\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{4}$$

7. Um ponto move-se numa reta numérica e a distância à origem em cada instante t, em segundos, é dada, em metros, pela função $d(t)=5+2\cos\left(\frac{t}{2}+\pi\right)$, $t\in[0, 30]$.



No instante $t=\pi$, determina:

7.1. a distância do ponto à origem;

$$d(\pi)=5+2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=5+0=5\text{. A distância à origem é } 5\text{ m}$$

7.2. a velocidade do ponto;

$$d'(t)=-2\times\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right)=-\sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right)$$

$$d'(\pi)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=1\text{. A velocidade é } 1\text{ m/s}.$$

7.3. a aceleração do ponto.

$$d''(t)=\left(-\sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right)\right)'=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}+\pi\right)$$

$$d''(\pi)=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=0\text{. A aceleração é } 0\text{ m/s}^2.$$