Teorema de Bolzano - Resolução

1. Seja f, a função real, de variável real, contínua em $[6; 8]$.

Sabe-se que:

- $f(6) = 2m + 12$;
- $f(8) = -6 - 2m$.

O Teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]6; 8[$.

A qual dos intervalos seguintes pode pertencer m?

(A) $]-6; -3[$ **(B)** $]-4; -2[$

(C) $]-5; -4[$ **(D)** $]-\infty; -6[$

f é contínua em $[6, 8]$

$f(6) = 2m + 12$

$f(8) = -6 - 2m$

C.A.

$2m + 12 = 0 \Leftrightarrow$

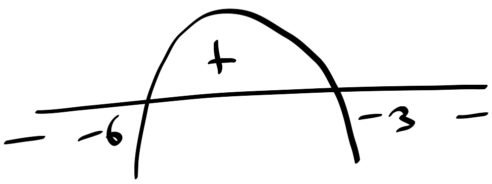
$\Leftrightarrow m = -6$

$-6 - 2m = 0$

$\Leftrightarrow m = -3$

Recorrendo ao Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, sabe-se que $f(6) \times f(8) < 0$

$\Leftrightarrow (2m + 12)(-6 - 2m) < 0$



Logo $m \in]-\infty, -6[\cup]-3, +\infty[$

$\boxed{D}$

2. Seja f uma função definida por $f(x) = \frac{3}{x} + \sqrt{2-x}$. Em qual dos intervalos seguintes é possível garantir, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, a existência de, pelo menos, uma solução da equação $f(x) = 0$?

(A) $]-1,1[$ **(B)** $]-7,-1[$ **(C)** $]1,2[$ **(D)** $]-2,2[$

$f(x) = \frac{3}{x} + \sqrt{2-x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 2-x \geq 0 \wedge x \neq 0\}$

$2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

$D_f =]-\infty, 2] \setminus \{0\}$

Assim f é contínua em $]-\infty, 2] \setminus \{0\}$

$f(-7) = \frac{3}{-7} + \sqrt{2+7}$
$= -\frac{3}{7} + 3 =$
$= \frac{18}{7}$

$f(-1) = -3 + \sqrt{3}$

Como f é contínua em $]-7,-1[$ e $f(-1) < 0 < f(-7)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]-7,-1[: f(c) = 0$

$\boxed{B}$

3. Sejam f e g as funções reais de variável real de domínio IR definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{se } x > -1 \\ \frac{x}{(x-2)^2} & \text{se } x \leq -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = (x-2)^3$$

3.1. Mostre que a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[3,4]$.

e 0

3.2. Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora gráfica, determine um valor aproximado

3.1 Queremos mostrar que $\exists x \in]3,4[: f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f(x) - g(x)}_{h(x)} = 0$$

Seja $h(x) = f(x) - g(x)$

Como h é a diferença entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, é contínua em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em $[3, 4]$

$$h(3) = f(3) - g(3) = \sqrt{3+1} - (3-2)^3 = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$h(4) = f(4) - g(4) = \sqrt{4+1} - (4-2)^3 = \sqrt{5} - 8 < 0$$

Como $h(3) \times h(4) < 0$ e h é contínua

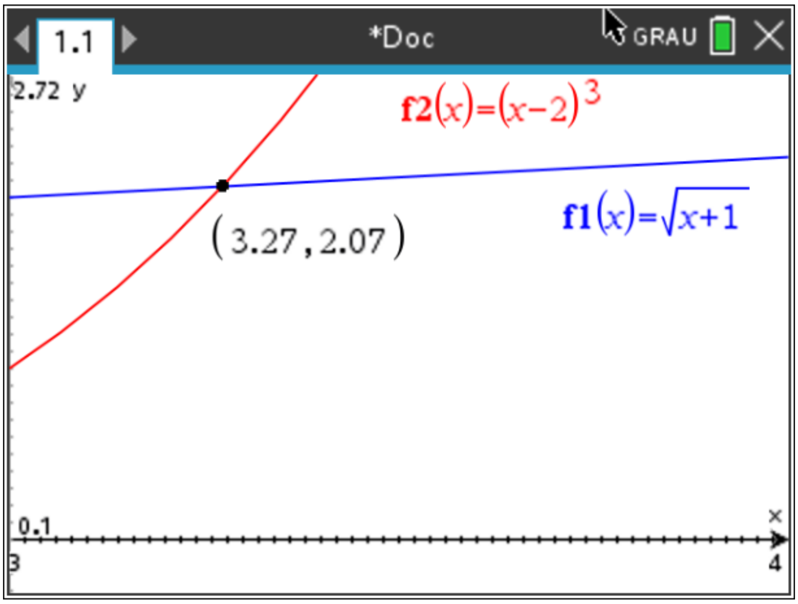
Pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy

$\exists x \in]3,4[: h(x) = 0$

3.2

$f(x) = g(x) \quad x \in [3, 4]$

$\sqrt{x+1} = (x-2)^3$



$x \approx 3{,}27$

4. De uma função f, de domínio $[a, b]$, sabe-se que:

- f é contínua em todo o seu domínio
- $f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$
- $f(a) = \frac{f(b)}{4}$

Seja h a função de domínio $[a, b]$, definida por $h(x) = 2f(x) - f(b)$

Prove que a função tem pelo menos um zero.

$D_h = [a, b] \quad h(x) = 2f(x) - f(b)$

Como h é definida pela diferença entre duas funções contínuas em $[a,b]$, é contínua em $[a,b]$

$h(a) = 2f(a) - f(b) = 2 \times \frac{f(b)}{4} - f(b) = -\frac{f(b)}{2}$

Como $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$, então $-\frac{f(b)}{2} < 0$
$f(b) > 0$

e portanto $h(a) < 0$

$h(b) = 2f(b) - f(b) = f(b)$

Como $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$, $f(b) > 0$

Portanto $h(b) > 0$

Como $h(a) < 0 < h(b)$ e h é contínua em $[a,b]$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy $\exists c \in]a,b[: h(c) = 0$

5. Considere, para um certo número real k, uma função contínua f, de domínio $[k, k+4]$.

Sabe-se que:

- $f(k) = f(k+4) = 0$
- $f(k+2) > 0$

Mostre que a equação $f(x) = f(x+2)$ tem, pelo menos, uma solução em $]k, k+2[$

$D_f = [k, k+4]$

$f(k) = f(k+4) = 0$

$f(k+2) > 0$

$\exists x \in]k, k+2[: f(x) = f(x+2)$?

$\underbrace{f(x) - f(x+2)}_{h(x)} = 0$

Seja $h(x) = f(x) - f(x+2)$

Seja $g(x) = f(x+2)$, então $D_g = [k-2, k+4-2]$

$= [k-2, k+2]$

$D_h = [k, k+4] \cap [k-2, k+2] = [k, k+2]$

Como h é a diferença entre duas funções contínuas nos seus respetivos domínios, é contínua em $[k, k+2]$

$h(k) = f(k) - f(k+2) = 0 - f(k+2) = -f(k+2)$

Como $f(k+2) > 0$, $-f(k+2) < 0$

Portanto $h(k) < 0$

$h(k+2) = f(k+2) - f(k+4) = f(k+2) - 0 =$

$= f(k+2)$

como $f(k+2) > 0$, $h(k+2) > 0$

Assim $h(k) \times h(k+2) < 0$ e h é contínua, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy $\exists x \in]k, k+2[: h(x) = 0$

6. Seja g, uma função real de variável real, contínua em $\mathbb{R}$ e par, e seja a um número real positivo, tal que $g(a) \neq g(3a)$.

Mostre que equação $g(x-2a) = g(x+2a)$ tem pelo menos uma solução em $]-a, a[$.

? $\exists x \in]-a,a[: g(x-2a) = g(x+2a) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{g(x-2a) - g(x+2a)}_{h(x)} = 0$$

Seja $h(x) = g(x-2a) - g(x+2a)$

Como g é contínua em $\mathbb{R}$, h é a diferença entre funções contínuas em $\mathbb{R}$, e portanto é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $[-a, a]$

$$h(-a) = g(-a-2a) - g(-a+2a) = g(-3a) - g(a) =$$

$$= \underbrace{g(3a)}_{g \text{ é par}} - g(a)$$

$$h(a) = g(a-2a) - g(a+2a) = g(-a) - g(3a) =$$

$$= \underbrace{g(a)}_{g \text{ é par}} - g(3a) = -(g(3a) - g(a)) = -h(a)$$

Com $h(a)$ e $h(-a)$ tem sinais contrários

$$h(a) \times h(-a) < 0$$

Assim $h(a) \times h(-a) < 0$, e h é contínua em $[-a,a]$, pelo corolário de Bolzano-Cauchy

$$\exists x \in]-a,a[: h(x) = 0$$

7. Sejam g e h duas funções, de domínios $\mathbb{R}$ e $[0, +\infty[$, respetivamente, tais que:

- g é contínua em $\mathbb{R}$, $g(0) = 0$ e $g(1) = 1$;
- $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$;
- $h(x) = a\sqrt{ag(x)} - a^2$, com $0 < a < 1$.

Mostre que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $]0, 1[$.

? $\exists x \in]0,1[: h(x) = 0$

Como h é a diferença entre funções contínuas, h é contínua em $[0,+\infty[$, em particular em $[0,1]$

$h(0) = a\sqrt{a g(0)} - a^2 = a\sqrt{a \times 0} - a^2 = -a^2$

como $0 < a < 1$, $-a^2 < 0$, $\forall\, 0 < a < 1$

e portanto $h(0) < 0$

$h(1) = a\sqrt{a g(1)} - a^2 = a\sqrt{a} - a^2 = a \cdot a^{1/2} - a^2 =$

$= a^{3/2} - a^2 = a^{3/2} - a^{3/2 + 1/2} = a^{3/2}(1 - a^{1/2}) =$

$= a^{3/2}(1 - \sqrt{a})$

como $0 < a < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{a} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\sqrt{a} < 0$

$\Leftrightarrow 0 < 1 - \sqrt{a} < 1$ e portanto

$\underbrace{a^{3/2}}_{>0}\underbrace{(1 - \sqrt{a})}_{>0} > 0$, $\forall a \in]0,1[$

Portanto $h(1) > 0$

Como $h(0) < 0 < h(1)$ e h é contínua em $[0,1]$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy $\exists x \in]0,1[: h(x) = 0$

8. Seja g uma função contínua de domínio $[0,8]$.

Sabe-se que $g(0)>1$ e que $g(8)+2g(0)=0$.

Considere uma função h definida por $h(x)=2g(x-2)+4$. Mostre que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $[2,10]$.

$? \exists x \in]2,10[: h(x)=0$

Seja $f(x)=g(x-2)$ $\quad D_f=[0+2, 8+2]=[2,10]$

então $D_h=[2,10]$

como h é a soma de funções contínuas nos seus domínios, h é contínua em $[2,10]$

$h(2)=2g(2-2)+4=2g(0)+4$

como $g(0)>1$, $2g(0)+4>0$, logo $h(2)>0$

$h(10)=2g(10-2)+4=2g(8)+4$ $\quad g(8)=-2g(0)$

$= 2(-2g(0))+4 = -4g(0)+4$

como $g(0)>1 \Leftrightarrow -4g(0)>-4$

$\Leftrightarrow -4g(0)+4>-4+4$

$\Leftrightarrow h(10)<0$

como $h(10)<0<h(2)$ e h é contínua em $[2,10]$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy

$\exists x \in]2,10[: h(x)=0$

9. Seja g uma função de domínio $[-2,2]$, contínua e par tal que $g(-2)=3$. Seja f uma função de domínio $[-2,2]$, definida por: $f(x)=x^2+xg(x)-2+8k$. Recorrendo ao Corolário do Teorema de Bolzano, determine os valores de k para os quais a função f admite pelo menos um zero no intervalo $]-2,2[$.

Se $\exists\, x \in]-2,2[: f(x)=0$, então pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy

$f(-2)\times f(2)<0$

$f(-2)=(-2)^2-2g(-2)-2+8k=$

$=4-2\times 3-2+8k=-4+8k$

$f(2)=\underbrace{2^2}_{\cancel{4}\,2}+2g(2)-\cancel{2}+8k=$

$=2+2g(2)+8k=2+2\times 3+8k=8+8k$

g é par

$g(-2)=g(2)=3$

$f(-2)\times f(2)<0 \Leftrightarrow (-4+8k)(8+8k)<0$

C.A.

$-4+8k=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$

$8+8k=0 \Leftrightarrow k=-1$

$k \in]-1,\frac{1}{2}[$