



1. Considere a função g , contínua em \mathbb{R} , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} kx^3 - k^4 & \text{se } x \geq k \\ x^2 - k^2 & \text{se } x < k \end{cases}, \text{ com } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

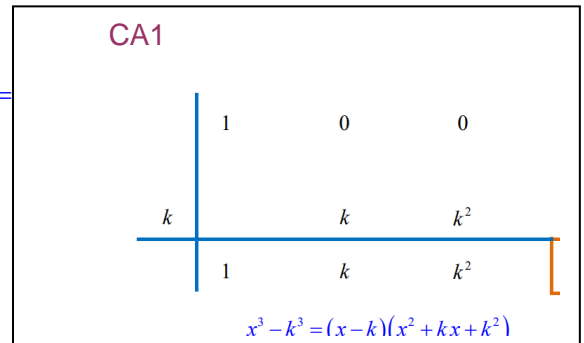
1.1. Mostre que $k=2$

Como g é contínua em \mathbb{R} , então também é contínua em $x=k$, isto é,
 $\lim_{x \rightarrow k^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} g(x) = g(k)$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow k^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} (x^2 + x) = k^2 + k = g(k)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{kx^3 - k^4}{x^2 - k^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{k(x^3 - k^3)}{x^2 - k^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{k \cancel{(x-k)} (x^2 + kx + k^2)}{\cancel{(x-k)} (x+k)} \stackrel{\text{C.A.1}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow k^+} \frac{k(x^2 + kx + k^2)}{x+k} = \frac{k(k^2 + k \times k + k^2)}{k+k} = \\ &= \frac{\cancel{k} (3k^2)}{2\cancel{k}} = \frac{3k^2}{2} \end{aligned}$$



Como $\lim_{x \rightarrow k^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} g(x) = g(k)$, temos que:

$$\begin{aligned} k^2 + k &= \frac{3k^2}{2} \Leftrightarrow 2k^2 + 2k - 3k^2 = 0 \Leftrightarrow -k^2 + 2k = 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k(k-2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2 \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ concluímos que $x=2$ c.q.m.

1.2. Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{3x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 16}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 16}{3x^3 + 3x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x^3}}{3\cancel{x^3}} = \frac{2}{3}$$



1.3. Determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{g(x)} + x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} + x)(\sqrt{x^2 + x} - x)}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \\ &= - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{-\infty}} + 1} = - \frac{1}{1 + 1} = - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ como $x \rightarrow -\infty$ então $|x| = -x$

2. Considere a função f definida por $f(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x}$

2.1. Determine o domínio de f

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge 4 - x \neq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$$

2.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})}{(4 - x)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{(4 - x)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{2 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

2.3. Determine o valor de k para o qual a função h é contínua, sendo h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 4 \\ x - 6k & \text{se } x \leq 4 \end{cases}$$

Temos que h é contínua para $x > 4$, pois é o quociente de, uma potência de expoente racional e uma função afim, que são contínuas em \mathbb{R} . h também é contínua para $x < 4$, pois é uma função afim.

Assim, para h ser contínua tem que ser em $x = 4$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} h(x) = h(4)$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 6k) = 4 - 6k = h(4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Logo, } 4 - 6k = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 16 - 24k = 1 \Leftrightarrow -24k = -15 \Leftrightarrow k = \frac{15}{24} \Leftrightarrow k = \frac{5}{8}$$

3. Considere a função g de domínio $[a, +\infty[$, com $a \in \mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2+x}}{x^2 + 2x - 3} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

3.1. Determine o menor valor possível que a pode tomar.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2+x \geq 0 \wedge x^2 + 2x - 3 \neq 0 \wedge x \neq 1\}$$

C.A.

$$2+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

$$\text{Logo, } D_g = [-2, +\infty[$$

$$\text{Portanto, } a = -2$$

3.2. Verifique se a função g é contínua em $x = 1$

$$\text{A função } g \text{ é contínua em } x = 1 \text{ se } \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2+x}}{x^2 + 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2+x}}{(x-1)(x+3)} \cdot \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2+x})(\sqrt{3} + \sqrt{2+x})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2+x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-2-x}{(x-1)(x+3)(\sqrt{3} + \sqrt{2+x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(x-1)(x+3)(\sqrt{3} + \sqrt{2+x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{\cancel{(x-1)}(x+3)(\sqrt{3} + \sqrt{2+x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+3)(\sqrt{3} + \sqrt{2+x})} = \frac{-1}{(1+3)(\sqrt{3} + \sqrt{2+1})} = \frac{-1}{4(2\sqrt{3})} = -\frac{1}{8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{De forma análoga se conclui que } \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\frac{1}{8\sqrt{3}}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \neq g(1)$ a função não é contínua em $x = 1$

4. Considere as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \frac{2x-1}{2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4.1. Justifique que f é bijetiva

$$f(x) = \frac{2x-1}{2} = x - \frac{1}{2}$$

Injetividade:

$$f \text{ é injetiva se } \forall x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 - \frac{1}{2} = x_2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Sobrejetiva:

$$f \text{ é sobrejetiva se } \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = y \Leftrightarrow x = y + \frac{1}{2}$$

$D'_f = \mathbb{R}$ que é igual ao conjunto de chegada, logo f é sobrejetiva

Como f é injetiva e sobrejetiva, concluímos que f é bijetiva.

4.2. Caracterize a inversa da função f

$$\text{De 4.1. temos que } x = y + \frac{1}{2}, \text{ logo } f^{-1}(x) = x + \frac{1}{2}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccc} & x & x + \frac{1}{2} \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \end{array}$$

4.3. Justifique que g não admite inversa

$$g \text{ não admite inversa porque, por exemplo, } g(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1 \text{ e } g(1) = \frac{1}{1^2} = 1$$

Como, $g(-1) = g(1)$, e $-1 \neq 1$, logo g não é injetiva. Portanto não admite inversa.

5. Caracterize a inversa da função:

$$\begin{aligned} f: IR_0^+ &\longrightarrow IR_0^+ \\ x &\longrightarrow \sqrt{x} \end{aligned}$$

Começemos por verificar se a função é bijetiva.

Injetividade:

$$\forall x_1, x_2 \in IR_0^+, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

como
 $D_f = IR_0^+$
 $(\sqrt{x})^2 = x$

Sobrejetividade:

$$f \text{ é sobrejetiva se } \forall y \in IR, \exists x \in IR: y = f(x)$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2, \text{ porque } y > 0$$

$$D'_f = IR_0^+ \text{ que é igual ao conjunto de chegada}$$

Portanto f é sobrejetiva.

Assim, f é bijetiva.

$$\text{Como, } x = y^2$$

$$f^{-1}(x) = y^2$$

$$f^{-1}: IR_0^+ \longrightarrow IR_0^+$$

$$\underbrace{x \qquad x^2}$$

6. Sabe-se que f e g são funções reais de variável real bijetivas tais que $f(1) = -2$ e $g^{-1}(-4) = -5$

Resolva as equações

6.1. $3 + f^{-1}(x-1) = 4$

$$3 + f^{-1}(x-1) = 4 \Leftrightarrow f^{-1}(x-1) = 1 \Leftrightarrow x-1 = f(1) \Leftrightarrow x-1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$$

6.2. $g(1-2x) = -4$

$$g(1-2x) = -4 \Leftrightarrow 1-2x = g^{-1}(-4) \Leftrightarrow 1-2x = -5 \Leftrightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = 3$$

7. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = \sqrt{2x+1}$ e $g(x) = \sqrt{x} + 1$

7.1. Determine o domínio da função $h = f - g$ e os zeros de h

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{1}{2}\right\} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty[$$

$$\text{Como } D_h = D_{f-g} = D_f \cap D_g \text{ então } D_{f-g} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty[\cap [0, +\infty[= [0, +\infty[$$

Zeros:

$$\begin{aligned} h(x) = 0 \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (f-g)(x) = 0 \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - \sqrt{x} - 1 = 0 \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = \sqrt{x} + 1 \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Rightarrow 2x+1 = (\sqrt{x} + 1)^2 \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x+1 = x + 2\sqrt{x} + 1 \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 2\sqrt{x} \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Rightarrow x^2 = 4x \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x=0 \vee x=4) \wedge x \in D_h &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x=0 \vee x=4 &\end{aligned}$$

$$\text{Zeros: } \{0, 4\}$$

7.2. Determine o domínio de $j = \frac{f}{g}$

$$\begin{aligned} D_j &= D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} \\ g(x) \neq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq -1 \end{aligned}$$

Como o domínio de \sqrt{x} é \mathbb{R}_0^+ então a condição $\sqrt{x} \neq -1$ é universal em \mathbb{R}_0^+

De 7.1. temos que $D_f \cap D_g = [0, +\infty[$ então $D_j = [0, +\infty[$

7.3. Verifique a existência de assíntotas ao gráfico de j

Como o domínio da função é o intervalo $[0, +\infty[$ e a função j é contínua em todo o seu domínio, é a divisão de duas funções de expoente racional, logo não existem assíntotas verticais.

Vamos verificar a existência de assíntotas não verticais.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{x(\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x(\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x(\sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{\frac{2}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}}}{\sqrt{+\infty+1}} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}(\sqrt{x-1})}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x} - \sqrt{2x+1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-x-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{x-1} = +\infty + \frac{1}{2} = +\infty$$

Logo, não existem assíntotas não verticais do gráfico de j

8. Determine o domínio da função definida por $f(x) = \sqrt{|x^2-1|-1}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : |x^2-1|-1 \geq 0\}$$

$$|x^2-1|-1 \geq 0 \Leftrightarrow |x^2-1| \geq 1 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 1 \vee x^2-1 \leq -1 \Leftrightarrow x^2-2 \geq 0 \vee x^2 \leq 0$$

C.A.

$$x^2-2=0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Quadro de sinais:

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
x^2-2	+	0	-	0	+

$$\text{Assim, } (]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[) \cup \{0\} =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, +\infty[$$