1. Justifique que cada um dos seguintes limites é nulo.

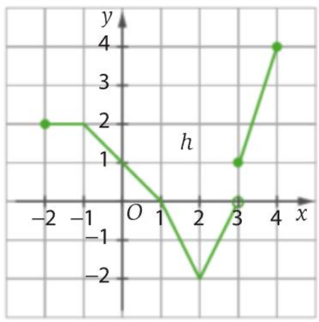
1.1 $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(x^3-1\right)\right]$

$$\lim_{x\to 0}\left[x\left(x^3-1\right)\right] = \lim_{x\to 0} x \times \lim_{x\to 0}\left(x^3-1\right) = 0\times(-1) = 0$$

1.2 $\lim\limits_{x\to -1}\left[\sqrt{x+1}\cos\left(\frac{1}{x+1}\right)\right]$

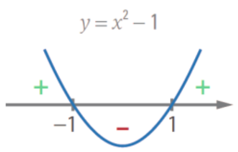
$\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+1} = 0$ e a função $y = \cos\left(\frac{1}{x+1}\right)$ é limitada

2. Sejam f e g as funções reais de variável real definidas por $f(x)\sqrt{x^2-1}$ e $g(x)\frac{1}{x-1}$. Seja h a função real de variável real cujo gráfico se apresenta na figura.



2.1 Determine os domínios de $g\circ f$, $f\circ h$ e $g\circ h$

$$D_f = \left\{x\in IR : x^2-1\geq 0\right\} = \left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$$



$$D_g = \left\{x\in IR : x-1\neq 0\right\} = IR\setminus\{1\}$$

$$D_h = [-2,4]$$

$$D_{g\circ f} = \left\{x\in IR : x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\right\} = \left\{x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\wedge \sqrt{x^2-1}\in IR\setminus\{1\}\right\}$$

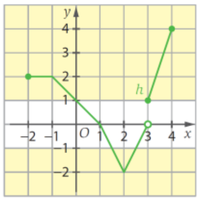
$$\sqrt{x^2-1} = 1 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^2-1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$D_{g\circ f} = \left(\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\right)\cap\left(IR\setminus\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}\right) =$$

$$= \left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]-\sqrt{2},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$$

$$D_{f\circ h}=\left\{x\in IR : x\in D_h \wedge h(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in[-2,4]\wedge h(x)\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\right\}=$$

$$=\left\{x\in[-2,4]\wedge\left(h(x)\leq -1\vee h(x)\geq 1\right)\right\}$$

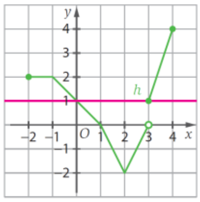


$$h(x)\leq -1\vee h(x)\geq 1 \underset{\substack{\text{Por}\\ \text{observação}\\ \text{do gráfico}}}{\Leftrightarrow} x\in[-2,0]\cup\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]\cup[3,4]$$

$$D_{f\circ h}=[-2,4]\cap\left([-2,0]\cup\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]\cup[3,4]\right)=[-2,0]\cup\left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]\cup[3,4]$$

$$D_{g\circ h}=\left\{x\in IR : x\in D_h\wedge h(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in[-2,4]\wedge h(x)\in IR\setminus\{1\}\right\}=$$

$$=\left\{x\in[-2,4]\wedge h(x)\neq 1\right\}$$



$$h(x)\neq 1 \underset{\substack{\text{Por}\\ \text{observação}\\ \text{do gráfico}}}{\Leftrightarrow} x\neq 0\wedge x\neq 3$$

$$D_{g\circ h}=[-2,4]\cap\left([-2,4]\setminus\{0,3\}\right)=[-2,4]\setminus\{0,3\}$$

2.2 Determine, caso existam, os seguintes:

2.2.1 $\lim\limits_{x\to 1}(g\circ f)(x)$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-1}=0 \text{ e } \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}=-1$$

$$\lim_{x\to 1}(g\circ f)(x)=-1$$

2.2.2 $\lim\limits_{x\to 4}(g\circ h)(x)$

$$\lim_{x\to 4}(g\circ h)(x)=\lim_{x\to 4} g(h(x))=g\left(\lim_{x\to 4}h(x)\right)=g(4)=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}$$

2.2.3 $\lim\limits_{x\to +\infty}(g\circ f)(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x))=g\left(\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=g\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}\right)=g(+\infty)=\frac{1}{+\infty-1}=0$$

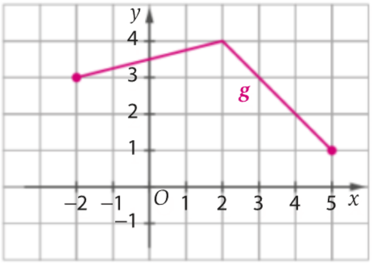
2.2.4 $\lim\limits_{x\to 0^+}(g\circ h)(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} g(h(x))=g\left(\lim_{x\to 0^+}h(x)\right)=g(1^-)=\frac{1}{1^- -1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

2.2.5 $\lim\limits_{x\to 2}(f\circ h)(x)$

$\lim\limits_{x\to 2} f(h(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to 2} h(x)\right) = f(-2) = \sqrt{(-2)^2 - 1} = \sqrt{3}$

3. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = -\sqrt{x^2 - 3x}$ e seja g a função cujo gráfico se reprsenta na figura seguinte.



3.1 O valor de $\lim\limits_{x\to 4}(g\circ f)(x)$ é:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

$\lim\limits_{x\to 4} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to 4} f(x)\right) = g\left(\lim\limits_{x\to 4}\left(-\sqrt{x^2-3x}\right)\right) = g\left(-\sqrt{16-12}\right) =$

$= g(-2) = 3$

OPÇÃO: C

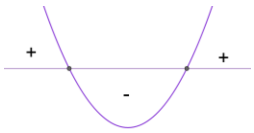
3.2 Em qual dos seguintes valores de a não está definido $\lim\limits_{x\to a}(f\circ g)(x)$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

$D_{f\circ g} = \{x \in IR : x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$

$D_g = [-2, 5]$

$D_f = \{x \in IR : x^2 - 3x \geq 0\} =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$



C.A.

$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

$D_{f\circ g} = [-2, 5] \cap (]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[) = [-2, 3]$

Dos valores apresentados, 4 não é ponto aderente de $D_{f\circ g}$, logo não existe $\lim\limits_{x\to 4}(f\circ g)(x)$

Portanto $a = 4$

OPÇÃO: D

4. Das funções f e g , de domínio IR, sabe-se que o contradomínio de f é $[2\,,3]$ e que $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$

Pode afirmar-se que:

(A) $\lim_{x\to 2}(f+g)(x) = 0$

(B) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0$

(C) $\lim_{x\to 2}(fg)(x) = 0$

(D) $\lim_{x\to 2}(f-g)(x) = 0$

Sabe-se que:

- $D'_f = [2,3]$, então $\lim_{x\to 2} f(x) \in [2,3]$
- $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$

(A)

$\lim_{x\to 2}(f+g)(x) = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x) = k, \quad k \in [2,3]$, logo $\lim_{x\to 2}(f+g)(x) \neq 0$

(B)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)} = \frac{k}{0} = \infty \quad , \quad k \in [2,3]$$

(C)

$$\lim_{x\to 2}(fg)(x) = \lim_{x\to 2} f(x) \times \lim_{x\to 0} g(x) = k \times 0 = 0 \quad , \quad k \in [2,3]$$

(D)

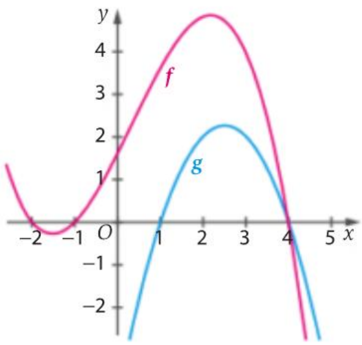
$$\lim_{x\to 2}(f-g)(x) = \lim_{x\to 2} f(x) - \lim_{x\to 2} g(x) = k - 0 = k \quad , \quad k \in [2,3]$$

OPÇÃO: C

5. Na figura ao lado estão representadas graficamente as funções f e g

Sabe-se que:

- f é uma função polinomial de 3.º grau cujos zeros são $-2\,, -1$ e 4 e cujo coeficiente do termo de maior grau é $-\frac{1}{5}$;
- g é uma função quadrática de 1 e 4 são zeros e cujo coeficiente do termo de maior grau é -1



Determine os seguintes limites:

5.1 $\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{f(x)}$

$\lim_{x\to 1} g(x)=0$

$\lim_{x\to 1} f(x)=k \;, k>0$

$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{k}=0$

5.2 $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=k \;,\; k>0$

$\lim_{x\to 1^-} g(x)=0^-$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{k}{0^-}=-\infty$

5.3 $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=k \;,\; k>0$

$\lim_{x\to 0^+} g(x)=0^+$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{k}{0^+}=+\infty$

5.4 $\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x\to -1} f(x)=0$

$\lim_{x\to -1} g(x)=k \;,\; k<0$

$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{k}=0$

5.5 $\lim_{x\to -1^-} \frac{g(x)}{f(x)}$

$\lim_{x\to -1^-} g(x)=k \;,\; k<0$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=0^-$

$\lim_{x\to -1^-} \frac{g(x)}{f(x)}=\frac{k}{0^-}=+\infty$

5.6 $\lim_{x\to -1^+} \frac{g(x)}{f(x)}$

$\lim_{x\to -1^+} g(x)=k \;,\; k<0$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=0^+$

$\lim_{x\to -1^-} \frac{g(x)}{f(x)}=\frac{k}{0^+}=-\infty$

5.7 $\lim_{x\to -2^+} \frac{g(x)}{f(x)}$

$\lim_{x\to -2^+} g(x)=k \;,\; k<0$

$\lim_{x\to -2^+} f(x)=0^-$

$\lim_{x\to -2^+} \frac{g(x)}{f(x)}=\frac{k}{0^-}=+\infty$

5.8 $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to -\infty} g(x)=-\infty$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$ indeterminação

Para levantar a indeterminação, basta considerar os termos de maior grau de cada uma das funções polinomiais.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{-\frac{1}{5}x^3}{-x^2}=\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{5}x=-\infty$$

5.9 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to 4} g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$ indeterminação

Para levantar a indeterminação temos que considerar as expressções de cada uma das funções.

$f(x)=-\frac{1}{5}(x+2)(x+1)(x-4)$

$g(x)=-(x-1)(x-4)$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 4}\frac{-\frac{1}{5}(x+1)(x+2)\cancel{(x-4)}}{-(x-1)\cancel{(x-4)}}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{5}(x+1)(x+2)}{x-1}=\frac{\frac{1}{5}\times 5\times 6}{3}=2$$

6. Determine o domínio, justifique a continuidade das funções e estude a existência de assíntotas ao gráfico das funções definidas por:

6.1 $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$

Domínio:

$D_g=\{x\in IR: x^2+3\neq 0\}=IR$

Continuidade:

Uma função racional é contínua em todo o seu domínio.

Assíntotas não verticais:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-1}{x^2+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^3+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(g(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Quando $x\to-\infty$, os cálculos são indénticos, e, portanto, também se obtém a mesma resta.

Assim, $y=0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de g.

6.2 $h(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}$

Domínio:

$D_f=\{x\in IR: x\geq 0\}=IR_0^+$

Continuidade:

A função é contínua porque $h(x)$ é a adição de duas funções (definidas por por potências de expoente racional) contínuas em todo o seu domínio.

Assíntotas verticais:

Não existem porque a função é contínua em todo o seu domínio.

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = 0+0=0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(h(x)-mx\right) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right) = +\infty$$

Logo, não existem assíntotas não verticais ao gráfico de h

6.3 $l(x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$

Domínio:

$$D_f = \left\{x \in IR : (x-1)^2 \geq 0 \wedge x-1 \neq 0\right\} = IR \setminus \{1\}$$

$$\underbrace{(x-1)^2 \geq 0}_{\text{Condição universal}} \quad \wedge \quad x \neq 1$$

Continuidade:

A função l é contínua pois é o quaociente de funções contínuas em D_l

A função $y = x-1$ é contínua em IR pois é uma função polinomial.

A função $y = \sqrt{(x-1)^2}$ é contínua em IR pois é a composição de funções contínuas em IR

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

C.A.

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -x+1 & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x+1}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = -1$$

Logo não existem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$y = 1$ é uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$

$x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-1}{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+1}{x-1} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x-2} = -1$$

$y = -1$ é uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$

6.4 $m(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} & \text{se } x < -2 \\ x^2 - 1 & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$

Domínio:

$D_m = IR$

Continuidade:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to -2^-} \frac{\cancel{(x+2)}(x+5)}{\cancel{x+2}} = -2 + 5 = 3$$

$$\lim_{x \to -2^+} \left(x^2 - 1\right) = 4 - 1 = 3 = m(-2)$$

Como $\lim\limits_{x \to -2^-} m(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} m(x) = m(-2) = 3$ a função é contínua em $x = -2$

A função m é contínua em $]-\infty, -2[$ pois é o quociente de duas funções contínuas em IR

A função m é contínuam em $[-2, +\infty[$ pois é definida por um polinómio.

Assíntotas verticais:

Como a função é contínua em IR, não existem assíntotas verticais ao gráfico de m

Assíntotas não verticais:

$x \to +\infty$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Logo não existem assíntotas não verticais ao gráfico de m quando $x \to +\infty$

$x \to -\infty$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} - x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 7x + 10 - \cancel{x^2} - 2x}{x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x + 10}{x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{x} = 5$$

Logo $y = x + 5$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de m quando $x \to -\infty$

7. Considera a função g definida por $g\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Estude a continuidade da função e a existência de assíntotas ao gráfico da função g.

A função g é contínua em $IR \setminus \{0\}$ pois é o quociente de duas funções contínuas em IR

Vamos verificar em $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2-2}{x\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}} = 0$$

$$g\left(0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

como $\lim\limits_{x\to 0^-} g\left(x\right) \neq g\left(0\right)$ a função não é contínua em $x = 0$

Assíntotas verticais:

No estudo da continuidade verificou-se que $\lim\limits_{x\to 0^-} g\left(x\right) = 0$ de forma análoga se conclui que $\lim\limits_{x\to 0^+} g\left(x\right) = 0$, logo não existem assíntotas verticais ao gráfico de g

Assíntotas não verticais:

$x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x^2} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x} - \frac{\sqrt{2}}{+\infty} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{+\infty}}}{+\infty} - 0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{x} = 1 - 0 = 1$$

Portanto $y = 1$ é uma assíntota do gráfico de g quando $x \to +\infty$

$x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x^2} - \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x} - \frac{\sqrt{2}}{+\infty} = -\frac{\sqrt{1+\frac{2}{+\infty}}}{+\infty} - 0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2}}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{x} = -1 - 0 = -1$$

Logo $y = -1$ é uma assíntota horizontal do gráfico de g quando $x \to -\infty$

8. Considere a função h definida por $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1+4x^2}}{2x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$

8.1 Determine o valor de k de modo que a função h seja contínua em $x = 0$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1-\sqrt{1+4x^2}}{2x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to0^-} \frac{\left(1-\sqrt{1+4x^2}\right)\left(1+\sqrt{1+4x^2}\right)}{2x^2\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)} = \lim_{x\to0^-} \frac{1-1-4x^2}{2x^2\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0^-} \frac{-4\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)} = \frac{-2}{1+\sqrt{1-0}} = -1$$

De forma semelhante calcula-se $\lim_{x\to0^+} h(x) = -1$

Para que a função h seja contínua em $x = 0$, tem que se verificar $h(0) = \lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^-} h(x)$, isto é, $k = -1$

8.2 Para o valor de k nas condições da alínea anterior, justifique que a função h é contínua em IR

A função $y = \sqrt{1+4x^2}$ é contínua em IR, pois é a composição de duas funções contínuas, uma polinomial $\left(y = 1+4x^2\right)$ e outra definida por uma potência de expoente racional, tendo-se $1+4x^2 > 0, \ \forall x \in IR$.

A função $y = 1-\sqrt{1+4x^2}$ é contínua em IR, pois é a diferença de duas funções contínuas em IR.

Para $x \neq 0$ a função h é contínua, pois é quociente de duas funções contínuas em IR.

Para $x = 0$, considerando $k = -1$, a função é contínua, por **8.1**, logo h é contínua em IR