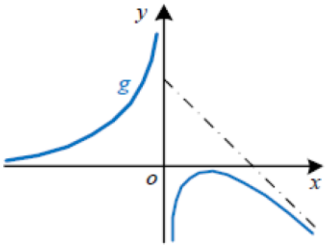
1. Considere a função g cujo gráfico se encontra representado parcialmente na figura ao lado.

Tal como a figura sugere, tem-se que:



- o domínio de g é $IR \setminus \{0\}$;
- $x=0$, $y=0$ e $y=-x+2$ são assíntotas do gráfico de g.

Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)$

(B) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[g(x)+x-2\right]=0$

(C) $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

(D) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2) = -\infty$

(A) Verdadeira

(B) $\lim\limits_{x\to0^+}\left[g(x)+x-2\right] = \lim\limits_{x\to0^+} g(x) + \lim\limits_{x\to0^+}(x-2) = -\infty-2=-\infty$ (Falsa)

(C) Verdadeira

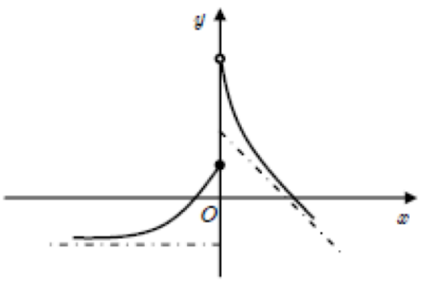
(D) Verdadeira

2. Considere uma função g, contínua em IR **exceto à esquerda de 0**, e tal que:

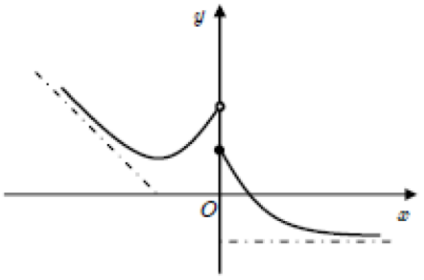
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}g(x)=-1$$

Qual dos seguintes gráficos pode representar o gráfico de g?

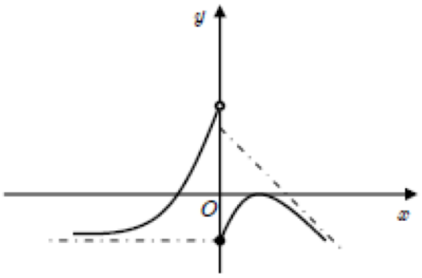
(A)



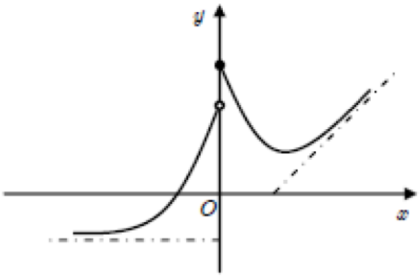
(B)



(C)



(D)



$y=mx+b$ é uma assíntota ao gráfico de g tal que os valores de $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$

Assim, como $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=-1$ o declive da assíntota não vertical é $m=-1$ e, como $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1$ então $y=-1$ é uma assíntota horizontal.

Assim, as hipóteses são **(A)** ou **(C)**.

Como g é contínua em IR exceto à esquerda de 0, significa que é contínua em IR_0^+, isto é, $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=g(x)$ e por observação do gráfico a opção **(C)** é o único que pode representar $g(x)$

3. De uma função f de domínio e contínua em IR^+, sabe-se que o seu gráfico admite a assíntota de equação $y = x - 4$. Qual é a proposição **falsa**?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+4\right)=0$ **(B)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ **(D)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$

Como $y = x - 4$ é assíntota, então:

(A) é verdadeira, porque pela definição $y = mx + b$ é assíntota se $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(fx-(mx+b)\right)=0$

(B) é verdadeira, porque $m = 1$, isto é, a função é crescente, logo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(C) é verdadeira, porque $1 = m = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

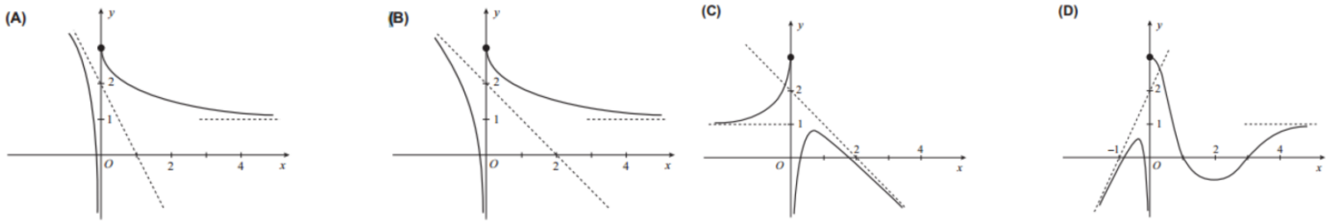
(D) é falsa, porque

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-4)\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+4\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)+\lim_{x\to+\infty}4=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=-\lim_{x\to+\infty}4 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=-4$$

4. Seja f uma função de domínio IR.
Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+2x\right]=2$.

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f?



Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, então $y=1$ é uma assíntota horizontal da função quando $x\to+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+2x\right]=2$, então $y=-2x+2$ é uma assíntota oblíqua da função.

Assim o gráfico que pode representar parte do gráfico da função f é o (A)

5. Seja *f* uma função de domínio IR.
Sabe-se que:

- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=1$;
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$;
- $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$;
- $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$.

Em qual das opções seguintes as duas equações definem assíntotas do gráfico da função *f*?

(A) $y=-2x+1$ **e** $x=1$ **(B)** $y=2x+1$ **e** $x=1$ **(C)** $y=-2x+1$ **e** $y=3$ **(D)** $y=2x+1$ **e** $y=2$

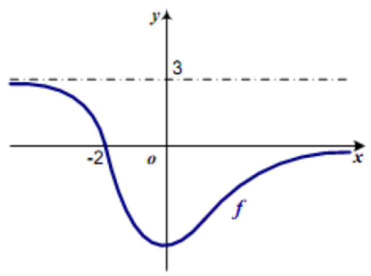
Sabe-se que:

- $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=1$, então $y=2x+1$, é uma assíntota oblíqua de $f(x)$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$, então $y=3$ é uma assíntota horizontal de $f(x)$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, então $x=1$ é uma assíntotal vertical à direita de $x=1$

OPÇÃO: B

6. Na figura está representada a função *f*, de domínio IR, cujo gráfico admite como assíntotas as retas de equações $y=0$ e $y=3$.

As assíntotas do gráfico da função $\frac{1}{f}$ paralelas aos eixos coordenados são:



(A) $x=-2$ e $y=\frac{1}{3}$ **(B)** $x=-2$ e $y=3$

(C) $y=0$ e $y=3$ **(D)** Não existem

Em $x=-2$, $f(x)=0$, assim $\lim_{x\to-2^-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0+}=+\infty$ e $\lim_{x\to-2^+}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0-}=-\infty$, logo $x=-2$ é uma assíntota vertical da função.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to-\infty} f(x)}=\frac{1}{3}$, logo $\frac{1}{3}$ é assíntota horizontal de $f(x)$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to+\infty} f(x)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$, não existe assíntota horizontal quando $x\to+\infty$

OPÇÃO: A

7. Determine as equações das assintotas, caso existam, dos gráficos das seguintes funções:

7.1. $f(x)=\dfrac{2x^2-4x+3}{x-1}$.

7.2. $f(x)=2x-\sqrt{x^2-9}$

7.3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-4}{x+2} & se \quad x<-2\\ 0 & se \quad x=-2\\ \dfrac{3x^2+7x-7}{x+3} & se \quad x>-2\end{cases}$

7.1. **Assíntotas Verticais:**

$D_f=\{x\in IR: x-1\neq 0\}=IR\setminus\{1\}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-4x+3}{x-1}=\frac{2-4+3}{1^+-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-4x+3}{x-1}=\frac{2-4+3}{1^--1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

Logo, $x=1$ é uma assíntota vertical da $f(x)$

Assíntotas não verticais:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-4x+3}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-4x+3}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{2-0+0}{1-0}=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-4x+3}{x-1}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\cancel{2x^2}-4x+3-\cancel{2x^2}+2x}{x-1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x+3}{x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{3}{x}}{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}-\frac{1}{x}}\right)=\frac{-2+0}{1-0}=-2$$

Assim, $y=2x-2$ é uma assíntota oblíqua da função.

Quando $x\to-\infty$, os cálculos são idênticos, e, portanto, também se obtém a mesma reta.

7.2. Assintotas verticais

$$D_f = \{x \in IR : x^2 - 9 \geq 0\} =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$$

C.A.

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$\lim_{x \to -3^-} \left(2x - \sqrt{x^2 - 9}\right) = -6 - 0 = -6 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 3^+} \left(2x - \sqrt{x^2 - 9}\right) = 6 - 0 = 6$$

Logo, não existem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$x \to +\infty$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - |x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{x} = 2 - \sqrt{1 - \frac{9}{+\infty}} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2 - 9} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 9}\right) \overset{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 9}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right)}{x + \sqrt{x^2 - 9}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 + 9}{x + \sqrt{x^2 - 9}} = \frac{9}{+\infty} = 0$$

Assim, $y = x$ é uma assíntota oblíqua de $f(x)$ quando $x \to +\infty$

$x \to -\infty$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 9}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - |x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + x\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{x} = 2 + \sqrt{1 + \frac{9}{+\infty}} = 2 + 1 = 3$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(2x - \sqrt{x^2 - 9} - 3x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x - \sqrt{x^2 - 9}\right) = -\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right) \overset{(\infty - \infty)}{=}$$

$$= -\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - 9}\right)}{x - \sqrt{x^2 - 9}} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 9}{x - |x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = -\lim_{x \to -\infty} \frac{9}{x + x\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = -\frac{9}{-\infty} = 0$$

Assim, $y = 3x$ é uma assíntota oblíqua de $f(x)$ quando $x \to -\infty$

7.3.

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{2x-4}{x+2}=\frac{-4-4}{-2^-+2}=\frac{-8}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{3x^2+7x-7}{x+3}=\frac{12-14-7}{-2+3}=-9$$

Logo, $x=-2$ é assíntota vertical de $f\left(x\right)$

Assíntotas não verticais

$x\to-\infty$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x-4}{x+2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{x^2+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(2-\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}=2$$

Logo, $y=2$ é uma assíntota horizontal

$x\to+\infty$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x^2+7x-7}{x+3}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+7x-7}{x^2+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(3+\frac{7}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{3}{x}\right)}=3$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2+7x-7}{x+3}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+7x-7-3x^2-9x}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-7}{x+3}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{7}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=-2$$

Portanto, $y=3x-2$ é uma assíntota ao gráfico de $f\left(x\right)$

8. De uma função f, de domínio $]0,+\infty[$, sabe-se que a reta de equação $y=2x+3$ é uma assíntota do seu gráfico.

Considere a função h, de domínio $]0,+\infty[$, definida por $h(x)=\dfrac{1-4f(x)}{x}$.

Prove que o gráfico de h admite uma assíntota paralela ao eixo Ox.

h admite uma assíntota paralela ao eixo *Ox*, se o declive da assíntota for zero e $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=k,\quad k\in IR$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-4f(x)}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{4f(x)}{x\times x}\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2}{=}0-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{4f(x)}{x}\underset{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2}{=}0-4\times2=-8$$

Logo, $y=8$ é uma assíntota horizontal do gráfico de *h*

9. Considere duas funções *g* e *h*, de domínio IR^+.
Sabe-se que:

- a reta de equação $y=2x-1$ é assíntota do gráfico da função g;
- a função *h* é definida por $h(x)=\dfrac{1-[g(x)]^2}{x^2}$.

Mostre que o gráfico da função *h* tem uma assíntota horizontal.

$y=2x-1$, é assíntota do gráfico de *g*, e o domínio de *g* é IR^+, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=2$

Como o domínio de *h* é IR^+, temos que:

$$m=\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-[g(x)]^2}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-[g(x)]^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{[g(x)]^2}{x^2}\times\frac{1}{x}\right)=$$

$$=0-\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2\right]\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=-\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\right)^2\times0\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=2}{=}-(2)^2\times0=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-[g(x)]^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{[g(x)]^2}{x^2}=0-\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2\right]=$$

$$=-\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\right)^2 \underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=2}{=} -(2)^2=-4$$

Logo, $y=-4$ é uma assíntota horizontal de h.

10. Considere uma função f de domínio IR^+. Admita que f é positiva e que eixo Ox é assíntota horizontal do gráfico de f.
Mostre que o gráfico da função $\frac{1}{f}$, não tem assíntota horizontal.

Ox é assíntota horizontal do gráfico de f, isto é, $y=0$, é assíntota horizontal de f.

Como f é positiva, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Assim, , $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$, logo $\frac{1}{f}$ não tem assíntota horizontal.