Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas – Equações. Estudo da Função Logaritmo de Base a. – 3 **Resolução**

1. Resolve em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log(1-x)=1$ **b)** $2\log x=\log 2$ **c)** $3e^{x+1}=2e^{-x}$

d) $\ln|x|=\ln 3$ **e)** $x-2=\log_{\frac{1}{2}}2$

a) $D=\{x\in \mathbb{R}: 1-x>0\}=\left]-\infty,1\right[$

$\log(1-x)=1 \Leftrightarrow 1-x=10 \Leftrightarrow x=-9$

$\text{C.S.}=\{-9\}$

b) $D=\{x \Leftrightarrow \mathbb{R}: |x|>0\}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$\ln|x|=\ln 3 \Leftrightarrow |x|=3 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=3$

$\text{C.S.}=\{-3,3\}$

c) $D=\mathbb{R}^+$

$2\cdot\log x=\log 2 \Leftrightarrow \log x=\dfrac{\log 2}{2} \Leftrightarrow \log x=\log\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

$\text{C.S.}=\{\sqrt{2}\}$

d) $D=\mathbb{R}$

$x-2=\log_{\frac{1}{2}}2 \Leftrightarrow x=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}+2 \Leftrightarrow x=-1+2 \Leftrightarrow x=1$

$\text{C.S.}=\{1\}$

e) $D=\mathbb{R}$

$3\times e^{x+1}=2\times e^{-x} \Leftrightarrow 3e^{x+1}\cdot e^{x}=2 \Leftrightarrow e^{2x+1}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+1=\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)-1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln 3-1)$

$\text{C.S.}=\left\{\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln 3-1)\right\}$

2. Justifica que, para cada $x\in\mathbb{R}$, se tem: $10^{\frac{x}{2}}=e^{x\ln\sqrt{10}}$

$$e^{x\ln\sqrt{10}}=\left(e^{\ln\sqrt{10}}\right)^x=\left(\sqrt{10}\right)^x=\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^x=10^{\frac{x}{2}}$$

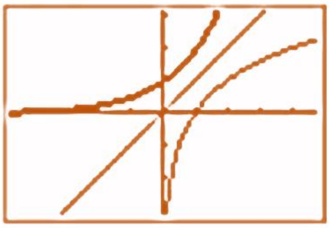
3. Considera as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

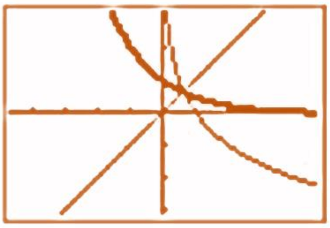
3.1 Justifica que as funções f e g admitem inversa.

São funções exponenciais, logo, são bijetivas.

3.2 Representa cada uma das funções graficamente e, por transformação geométrica dos gráficos de f e de g , obtém os gráficos das funções inversas de f e de g.

Representando: f e f^{-1} $\qquad$ g e g^{-1}





3.3. Indica o domínio, o contradomínio, os pontos de interseção com os eixos coordenados e a monotonia de f^{-1} e de g^{-1}.

$$D_{f^{-1}} = D_{g^{-1}} = \mathbb{R}^+$$
$$D'_{f^{-1}} = D'_{g^{-1}} = \mathbb{R}$$

Interseção com Ox : $(1, 0)$

f^{-1} é crescente e g^{-1} é decrescente.

4. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ e $f(x) = a + b^{x+1}$.

Sabendo que $f(0) = 2$ e $f(1) = 8$, determina $f^{-1}(0)$.

$f(0) = 2 \Leftrightarrow a + b = 2$ $\qquad$ $f(1) = 8 \Leftrightarrow a + b^2 = 8$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a + b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - b \\ 2 - b + b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rule{2cm}{0.4pt} \\ b^2 - b - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rule{2cm}{0.4pt} \\ b = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \vee b = 3 \end{cases},$$

$b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, logo, $b = 3$.

$f(x) = -1 + 3^{x+1}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + 3^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 3^{x+1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f^{-1}(0) = 1$

5. Determina o domínio e os zeros, se existirem, das funções definidas por:

a) $f(x) = \log(3 - x)$ **b)** $f(x) = \ln(3^x - 3)$ **c)** $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}|x|$

d) $f(x) = \frac{\log_3(1-x^2)}{x}$ **e)** $f(x) = \log_3\left(\frac{1-x^2}{x}\right)$

a) $f(x) = \log(3 - x)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 3 - x > 0\} = \left]-\infty, 3\right[$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log(3 - x) = 0 \Leftrightarrow 3 - x = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Zeros: $\{2\}$

b) $f(x) = \ln(3^x - 3)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 3^x - 3 > 0\} = \left]1, +\infty\right[$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(3^x - 3) = 0 \Leftrightarrow 3^x - 3 = 1 \Leftrightarrow 3^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_3 4$

Zeros: $\{\log_3 4\}$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}|x|$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: |x| > 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}|x| = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

Zeros: $\{-1, 1\}$

d) $f(x) = \frac{\log_3(1 - x^2)}{x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 1 - x^2 > 0 \wedge x \neq 0\} = \left]-1, 1\right[\backslash\{0\}$

C.A.: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \wedge x < 1$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\log_3(1 - x^2)}{x} = 0 \Leftrightarrow \log_3(1 - x^2) = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - x^2 = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 0$

Zeros: $\varnothing$

e) $f(x) = \log_3\left(\frac{1-x^2}{x}\right)$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1-x^2}{x} > 0 \wedge x \neq 0\right\} =]-\infty, -1[\cup]0, 1[$$

	$-\infty$		-1		0		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-x^2}{x}$	$+$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	0	$-$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1-x^2}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^2-x}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 - x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\times(-1)\times 1}}{2\times(-1)} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-2} \wedge x \neq 0$$

Zeros: $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

6. Considera as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \ln x \text{ e } g(x) = x^2 - 1$$

Caracteriza:

a) $f \circ g$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \ln(x^2 - 1)$

$D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$g(x) \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

$f \circ g:]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow \ln(x^2 - 1)$

b) $g \circ f$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \ln^2 x - 1$$
$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} = \mathbb{R}^+$$
$$g \circ f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \to \ln^2 x - 1$$

7. Sabendo que cada uma das funções seguintes é bijetiva, caracteriza a sua função inversa.

a) $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{2}$

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{2} \qquad D_f = \mathbb{R}$$
$$y = \frac{e^{2x}-1}{2} \Leftrightarrow 2y + 1 = e^{2x} \Leftrightarrow 2x = \ln(2y+1) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2y+1)}{2}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{\ln(2x+1)}{2}$$
$$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 > 0\} = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$
$$f^{-1}: \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{\ln(2x+1)}{2}$$

b) $g(x) = 2\log(1-x)$

$$g(x) = 2\log(1-x)$$
$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: 1 - x > 0\} =]-\infty, 1[$$
$$y = 2\log(1-x) \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \log(1-x) \Leftrightarrow 1 - x = 10^{\frac{y}{2}} \Leftrightarrow x = 1 - 10^{\frac{y}{2}}$$
$$g^{-1}(x) = 1 - 10^{\frac{x}{2}}$$
$$g^{-1}: \mathbb{R} \to]-\infty, 1[$$
$$x \to 1 - 10^{\frac{x}{2}}$$

8. Considera as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definidas por:

$$f(x) = \log_4 x \text{ e } g(x) = \log_8 x^2$$

Mostra que $\forall x \in \mathbb{R}^+ , g(x) = \frac{4}{3} f(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \log_8 x^2 = 2\log_8 x = 2 \times \frac{\log_4 x}{\log_4 8} =$$

$$= 2 \times \frac{\log_4 x}{\log_4(4 \times 2)} = 2 \times \frac{\log_4 x}{\log_4 4 + \log_4 2} = 2 \times \frac{\log_4 x}{1 + \log_4 4^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= 2 \times \frac{\log_4 x}{1 + \frac{1}{2}} = 2 \times \frac{\log_4 x}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\log_4 x = \frac{4}{3} f(x)$$

9. Seja f a função em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \log_3(x^2) - \log_3\left(\frac{x}{9}\right)$

a) Mostra que $f(x) = 2 + \log_3 x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

$$f(x) = \log_3(x^2) - \log_3\left(\frac{x}{9}\right) =$$

$$= \log_3(x^2) - \log_3 x + \log_3 9 =$$

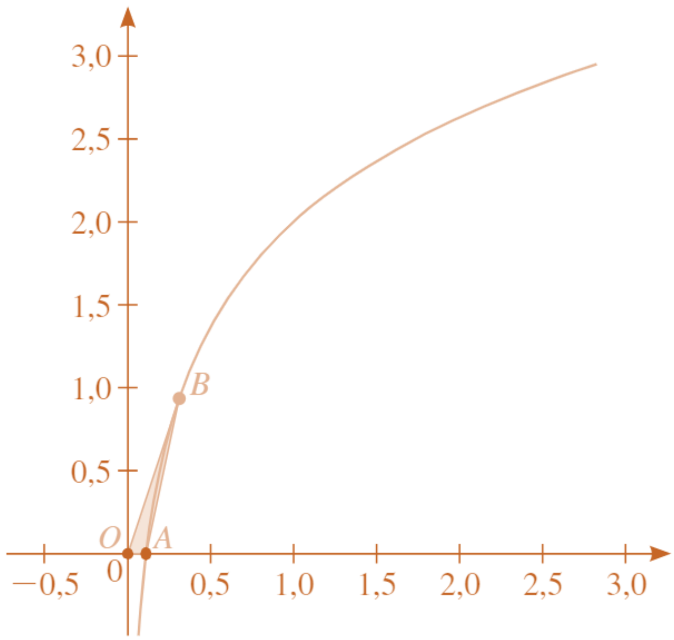
$$= \log_3\left(\frac{x^2}{x}\right) + 2 = 2 + \log_3 x$$

b) Determina a área do triângulo cujos vértices são a origem do referencial, o ponto do gráfico de f cuja ordenada é 1 e o ponto correspondente ao zero de f .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \log_3 x = 0 \Leftrightarrow$$

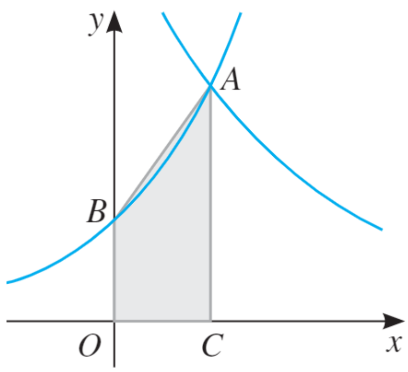
$$\Leftrightarrow \log_3 x = -2 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 3^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \rightarrow \text{zero de } f$$



$$A = \frac{\frac{1}{9} \times 1}{2} = \frac{1}{18}$$

10. Na figura estão representados, em referencial o.n. *xOy*, um trapézio [*ABOC*] e partes dos gráficos das funções de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 2^{2-x}$ e $g(x) = 3^x$.



Como a figura sugere:

- o ponto *O* é a origem do referencial;
- o ponto *A* é a interseção dos gráficos de *f* e de *g* ;
- o ponto *B* é a interseção do gráfico de *g* com o eixo das ordenadas;
- o ponto *C* tem a mesma abcissa de *A* e pertence ao eixo das abcissas.

Determina a área do trapézio [*ABOC*] , aproximada às centésimas.

$\overline{OB} = 1$

Cálculo da abcissa de A :

$2^{2-x} = 3^x \Leftrightarrow \log 2^{2-x} = \log 3^x \Leftrightarrow (2-x)\log 2 = x\log 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 4}{\log 6} = \log_6 4$

$\overline{OC} = \log_6 4$

$\overline{AC} = 3^{\log_6 4}$

A área do trapézio é: $\dfrac{3^{\log_6 4} + 1}{2} \times \log_6 4 \approx 1{,}29$.