Ficha de Trabalho 18 - RESOLUÇÃO

1. Para um certo valor de k, a função f admite limite para $x=0$. Seja f definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^x+k & se \quad x\le 0 \\ 2^{\log_2(x+3)} & se \quad x>0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 0 **(B)** 3 **(C)** 2 **(D)** 1

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{\log_2(x+3)} = 2^{\log_2(3)} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^x+k = e^0+k = 1+k = f(0)$$

$$1+k=3 \Rightarrow k=2 \qquad \boxed{C}$$

2. Seja f a função de expressão analítica $f(x)=\log\left(1-2^x\right)$.

2.1. O domínio de f é:

(A) IR^+ **(B)** IR_0^+ **(C)** IR^- **(D)** IR_0^-

2.2. O $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ é igual a:

(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** e **(D)** 0

2.1 $D_f = \{x \in IR : 1-2^x > 0\} =]-\infty, 0[=$

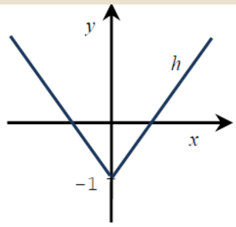
$$1-2^x>0 \Leftrightarrow 2^x<1 \Leftrightarrow 2^x<2^0$$

$$\Leftrightarrow x<0$$

2.2 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log(1-2^x) =$ $\boxed{C}$

$= \log\left(\lim_{x\to-\infty}(1-2^x)\right) = \log(1-0) = 0$

3. A figura representa parte de duas semi-retas que são o gráfico de uma função h, de domínio IR, que tem Oy como eixo de simetria:
O contradomínio da função $f(x)=2^{h(x)}$ é:



(A) $[-1,+\infty[$ **(B)** $[-2,+\infty[$ **(C)** $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ **(D)** $]0,+\infty[$

$2^{h(x)} > 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

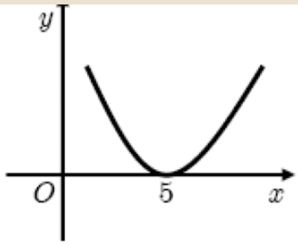
$h(x) \geq -1 \Leftrightarrow 2^{h(x)} \geq 2^{-1} \Leftrightarrow f(x) \geq 2^{-1}$

então $f(x) \geq \frac{1}{2} \wedge f(x) > 0$

Logo $D'_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ $\boxed{C}$

4. Ao lado está parte do gráfico da função h, positiva em $IR\setminus\{5\}$.

Qual é o valor de $\lim_{x\to5}\frac{\ln(0{,}1x)}{h(x)}$?



(A) $+\infty$ **(B)** 0 **(c)** $-\infty$ **(D)** 5

$\lim_{x\to5}\frac{\ln(0{,}1x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x\to5}\ln(0{,}1x)}{\lim_{x\to5}h(x)} = \frac{\ln(0{,}1\times5)}{\lim_{x\to5}h(x)}$

$= \frac{\ln(0{,}5) < 0}{0^+} = -\infty$ $\boxed{C}$

5. Para um certo valor de k, é continua em IR a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & se\ x\leq 0 \\ \dfrac{kx}{\ln(2x+1)} & se\ x>0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8

Se f é contínua em $\mathbb{R}$, é contínua em $x=0$

então $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{kx}{\ln(2x+1)} = k \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln(2x+1)} =$$

$\ln(2x+1)=y$

$2x+1=e^y$

$2x=e^y-1$

$x=\frac{e^y-1}{2}$

$x\to 0$

$y\to 0$

$$= k\lim_{y\to 0} \frac{\frac{e^y-1}{2}}{y} = k \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{2y} =$$

$$= \frac{k}{2} \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = \frac{k}{2}\times 1 = \frac{k}{2}$$

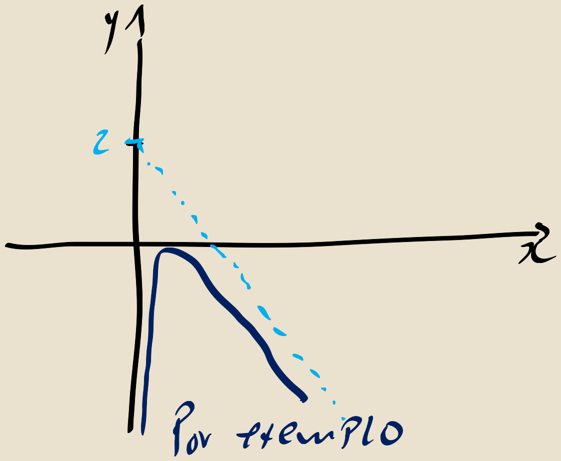
$$\lim_{x\to 0^-} (x+3) = 0^- + 3 = 3 = f(0)$$

então $\frac{k}{2} = 3 \Leftrightarrow k=6$

$\boxed{C}$

6. De uma função f de domínio IR^+, sabe-se que a reta de equação $y = 2 - x$ é assíntota do seu gráfico. Qual é o valor de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$?

(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 2 **(D)** -1



$y = -x + 2$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\boxed{B}$

7. Seja f uma função de domínio IR^+. Sabe-se que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + f(x)}{3x} = 1$.

Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota do gráfico da função f?

(A) $y = \frac{1}{3}x$ **(B)** $y = \frac{2}{3}x$ **(C)** $y = x$ **(D)** $y = 3x$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + f(x)}{3x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{3x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{3x} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln}{x} + \frac{1}{3} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}}_{= m} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times m = 1 \Leftrightarrow m = 3$

$\boxed{D}$

8. Sejam f e g funções de domínio $]0,+\infty[$.

Sabe-se que:

- a reta de equação $y=3$ é assíntota horizontal do gráfico de f;
- f não tem zeros;
- $g(x)=\dfrac{e^{-x}-3}{f(x)}$

Qual das opções seguintes define uma assíntota horizontal do gráfico de g?

(A) $y=3$ **(B)** $y=e$ **(C)** $y=0$ **(D)** $y=-1$

$y=3$ é A.H de $f \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

$f(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$

$g(x)=\dfrac{e^{-x}-3}{f(x)}$

$D_g=\mathbb{R}\cap D_f\cap\underbrace{\{x\in\mathbb{R}: f(x)\neq 0\}}_{\text{Condição universal}}$

$=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}^+$

$=\mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}-3}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}-3}{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}=$

$=\dfrac{e^{-\infty}-3}{3}=\dfrac{0-3}{3}=-1$

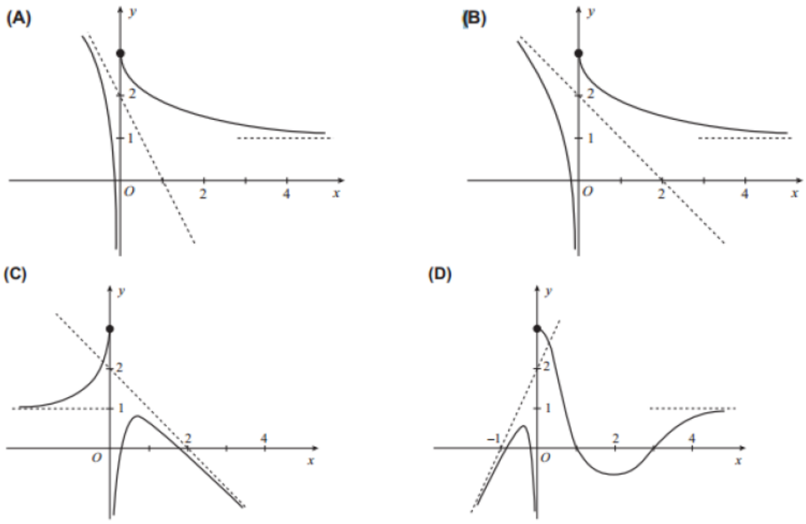
Logo $y=-1$ é A.H ao gráfico de g

$\boxed{D}$

9. Seja f uma função de domínio IR.
Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+2x\right]=2$.

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f?



$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1 \text{ é A.H.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right)=2 \Rightarrow y=-2x+2 \text{ é A.O.}$$

C.A. $-2x+2=0 \Leftrightarrow x=1$

$\boxed{A}$

10. Considere a função f, de domínio IR, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} k+\dfrac{1-e^{x-1}}{2x-2} & \text{se } x<1 \\ -x+\ln x & \text{se } x\geq 1 \end{cases} \quad (k \text{ designa um número real})$$

10.1. Determine, caso exista, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

10.2. Usando métodos exclusivamente analíticos, determine k, sabendo que existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

10.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\ln x\right)^{\infty-\infty}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(-1+\frac{\ln x}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\times\left(-1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)$

$=+\infty\times(-1+0)=-\infty$

10.2 Se existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ então

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \left(k + \frac{1 - e^{x-1}}{2x-2} \right) = k + \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1 - e^{x-1}}{2x-2} \right) =$$

$$= k - \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{2(x-1)} = k - \frac{1}{2} \lim_{x \to 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} =$$

$y = x - 1$, $x \to 1$ então $y \to 0$

$$= k - \frac{1}{2} \lim_{y \to 0} \frac{e^{y} - 1}{y} = k - \frac{1}{2} \times 1 = k - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} (-x + \ln x) = -1 + \ln 1 = -1 = f(1)$$

então $k - \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$

11. Seja f a função de domínio IR definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x-2e^2}{x-2} & se \quad x<2\\ 3e^x+\ln(x-1) & se \quad x\geq 2\end{cases}$$

Averigue se a função é contínua em $x=2$.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{xe^x-2e^2}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{y\to 0^-}\frac{(y+2)e^{y+2}-2e^2}{y}=$$

$y=x-2$
$x=y+2$
$x\to 2^-$
$y\to 0^-$

$$=\lim_{y\to 0^-}\frac{ye^{y+2}+2e^{y+2}-2e^2}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0^-}\frac{\cancel{y}e^{y+2}}{\cancel{y}}+2\lim_{y\to 0^-}\frac{e^{y+2}-e^2}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0^-}e^{y+2}+2e^2\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}=$$

$$=e^{0+2}+2e^2\times 1=e^2+2e^2=3e^2$$

$$f(2)=\lim_{x\to 2^+}3e^x+\ln(x-1)=3e^2+\ln 1=$$
$$=3e^2$$

Como $\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$ a função f é contínua em $x=0$

12. Considere a função f definida por $f(x)=\frac{1}{3}+e^{1-x}$.

12.1 . Estude a função f quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados no seu gráfico.

f é a soma entre duas funções contínuas em $\mathbb{R}$,
Portanto f não admite assíntotas verticais

$D_f=\mathbb{R}$

Assíntotas não verticais

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}+e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+3e^{1-x}}{3x}=\frac{1+0}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}+e^{1-x}\right)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}+e^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+3e^{1-x}}{3x}\overset{\infty/\infty}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^{1-x}}{3x}=0+\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e}{x\,e^{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e}{x}}{\frac{e^{x}}{x}}=$$

$x\to-\infty$, $-x\to+\infty$ $\quad y=-x$ então $x=-y$

$$=\lim_{-y\to+\infty}\frac{\frac{e}{-y}}{\frac{e^{-y}}{-y}}=\frac{\frac{e}{-\infty}}{+\infty}=\frac{0}{+\infty}=0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{3} + e^{1-x} = \frac{1}{3} + e^{+\infty} = +\infty$$

Portanto $y = \frac{1}{3}$ é a única assíntota ao gráfico de f.

12.2. Resolva analiticamente a equação $f(x)=1$, apresentando a solução na forma $\ln(ke)$, onde k representa um número real positivo.

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow e^{1-x} = 1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 - x = \ln \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \ln \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \ln e - \ln \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \ln \frac{e}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \ln \frac{3e}{2}$$

13. Considere f uma função de domínio $]-3, +\infty[$.

A reta r, que interseta os eixos coordenados nos pontos (-2,0) e (0,1), é assíntota do gráfico de f.

Seja g a função de domínio IR^+, definida por $g(x) = \frac{3x + f(x) - ln(x)}{x}$.

Prove que a reta de equação $y = \frac{7}{2}$ é assíntota do gráfico de g.

$m = \frac{1-0}{0+2} = \frac{1}{2}$ $\quad b = 1 \quad$ $y = \frac{1}{2}x + 1$ é A.O. ao gráfico de f

Como $m = \frac{1}{2}$ então $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + f(x) - \ln x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}}_{\text{declive}} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}}$$

$$= 3 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{7}{2}$$

Log $y = \frac{7}{2}$ é assíntota ao gráfico de g

14. A respeito das funções f e g, de domínio $]-\infty,0[$, sabe-se que a reta de equação $y=-x+1$ é uma assíntota do gráfico de f e que $g(x)=\dfrac{f(x)-xe^x}{x}$.

Prove que o gráfico de g admite uma assíntota paralela ao eixo Ox.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x) - xe^x}{x} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}}_{\text{declive}} - \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}e^x}{\cancel{x}} =$$

$$-1 - e^{-x} = -1 - 0 = -1$$

Portanto $y=-1$ é A. H. ao gráfico de g portanto paralela ao eixo Ox

15. Considere a função f, de domínio $IR \setminus \{0\}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{e^{4x}-1} & \text{se} \quad x<0\\ \\ x\ln(x) & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$

15.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

f é definida por funções contínuas, logo é contínua no seu domínio, isto é, $IR \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x \overset{0 \times \infty}{=} \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln \frac{1}{y} \right) =$$

$x \to 0^+$

$\frac{1}{x} \to +\infty$

$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$

$$= \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y^{-1}}{y} = - \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{e^{4x} - 1}{x}} =$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}{4 \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{4x}} = \frac{1}{4 \lim_{4x \to 0^-} \frac{e^{4x} - 1}{4x}} = \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Portanto o gráfico de f não admite assíntotas verticais

15.2. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, de domínio IR^+, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$.

Sabe-se que:

- A é o ponto de coordenadas (2, 0);
- B é o ponto de coordenadas (5, 0);
- P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g.

Para cada posição do ponto P, considere o triângulo $[ABP]$. Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é 1.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas.

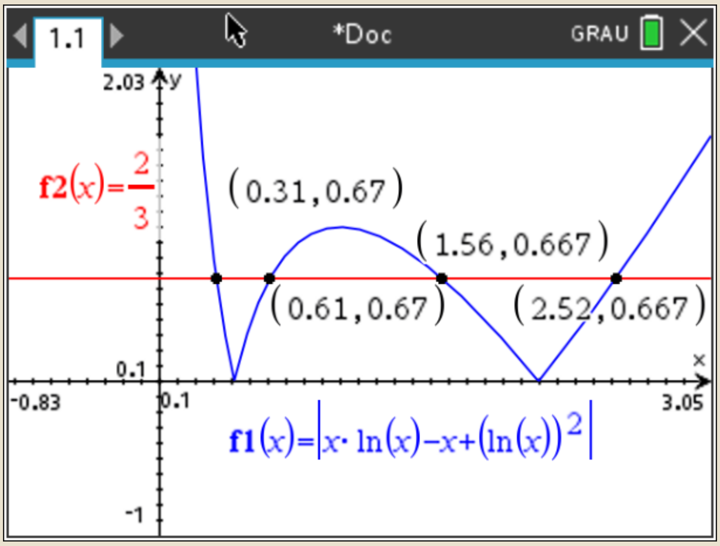
$$g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$$

$$A_{[ABP]} = 1 \Leftrightarrow \frac{(5-2) \times |f(x) - x + \ln^2 x|}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - x + \ln^2 x| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{|x \ln x - x \ln^2 x|}_{y_1} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{y_2}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



$x \approx 0{,}31$

$x \approx 0{,}61$

$x \approx 1{,}56$

$x \approx 2{,}52$

16. Considere a função f, de domínio IR, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x+1) - x\ln(x) + 3x & \text{se } x > 0 \\ x\,e^{1-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x} e^{1-x}}{\cancel{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

logo f não admite Assíntotas não verticais quando $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\ln(x+1) - \cancel{x}\ln x + 3\cancel{x}}{\cancel{x}} \overset{\infty/\infty}{=}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(x+1) - \ln x + 3\right) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3 =$$

$$= \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x}\right) + 3 = \ln 1 + 3 = 3$$

$$m = 3$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - 3x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x\ln(x+1) - \ln x \cancel{+3x} \cancel{-3x}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x\ln(x+1) - \ln x\right) = \lim_{x \to +\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \ln\left(\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\right) =$$

$$= \ln\left(\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln e = 1$$

logo $y = 3x + 1$ é a única assíntota ao gráfico de f.