1. Um número real a é tal que o gráfico da função definida por $f(x)=\log_3(6x+a)$ tem uma assíntota de equação $x=5$.
O ponto de ordenada 4 pertence ao gráfico de f.
Qual é a sua abcissa?

(A) $\frac{17}{2}$ **(B)** $\frac{37}{2}$ **(C)** $-\frac{25}{6}$ **(D)** $-\frac{43}{6}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: 6x+a>0\}$

$6x>-a \Leftrightarrow x>-\frac{a}{6}$

Como $x=5$ é assíntota então

$-\frac{a}{6}=5 \Leftrightarrow -a=30 \Leftrightarrow a=-30$

$f(x)=4 \Leftrightarrow \log_3(6x-30)=4$

$\Leftrightarrow \log_3(6x-30)=\log_3 81$

$\Leftrightarrow 6x-30=81$

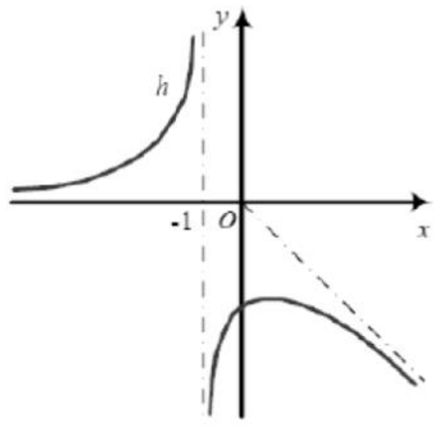
$\Leftrightarrow 6x=111$

$\Leftrightarrow x=\frac{111}{6}$

$\Leftrightarrow x=\frac{37}{2}$

B

2. Na figura está representada parte da representação gráfica de uma função h, cujo domínio é $IR \setminus \{-1\}$. As retas de equações $x=-1$ e $y=-x$ são assíntotas do gráfico de h.



Seja (x_n) a sucessão tal que $(x_n) = -1 + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$, com $n \in IN$.

Qual é o valor de $\lim h(x_n)$?

(A) 0 **(B)** $+\infty$ **(C)** $-\infty$ **(D)** -1

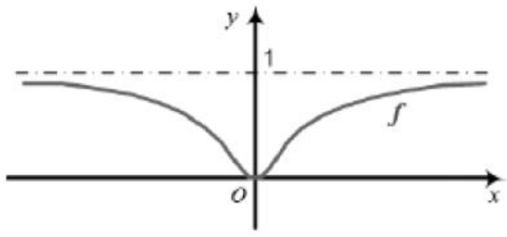
$$\lim x_n = \lim\left(-1+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = \lim\left(-1+\ln\left(1+\frac{-1}{n}\right)\right)$$

$$= -1 + 0^- = -1^-$$

B

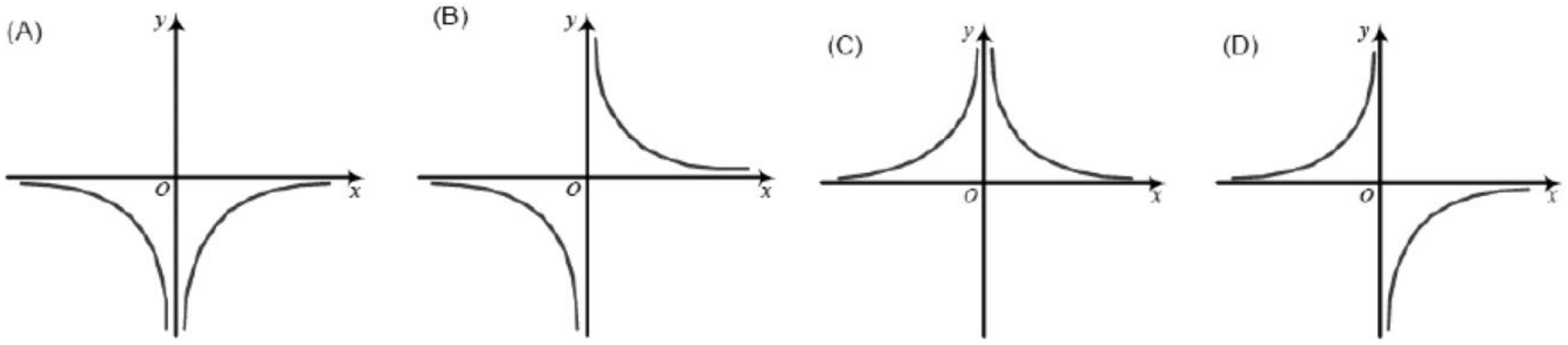
$$\lim h(-1^-) = +\infty$$

3. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f, de domínio IR.



Tal como a figura sugere, a reta de equação $y=1$ é uma assintota do gráfico de f. Seja w a função, de domínio $IR \setminus \{0\}$, definida por: $w(x) = \log[f(x)]$.

Numa das opções seguintes está parte da representação gráfica da função w? Em qual delas?



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^- \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} w(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(f(x)) = \log(1^-) = 0^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} w(x) = \lim_{x\to-\infty} \log(f(x)) = \log(1^-) = 0^-$$

A

4. Para certos valores reais de a a função g, definida por $g(x)=(\log(a-3)+\log a)^x$ é uma função exponencial estritamente crescente. Então pode-se afirmar que:

(A) $a \in]5,+\infty[$ **(B)** $a \in]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$ **(C)** $a \in]3,+\infty[$ **(D)** $a \in]-\infty,-2[\cup]5,+\infty[$

$$(\log(a-3)+\log a)^x = (\log(a-3)\cdot a)^x =$$
$$= (\log(a^2-3a))^x$$

$g(x)$ é estritamente crescente então $\log(a^2-3a)>1$

$\log(a^2-3a) > \log 10 \wedge a>0 \wedge a>3$

$a^2-3a-10>0 \wedge a>3$

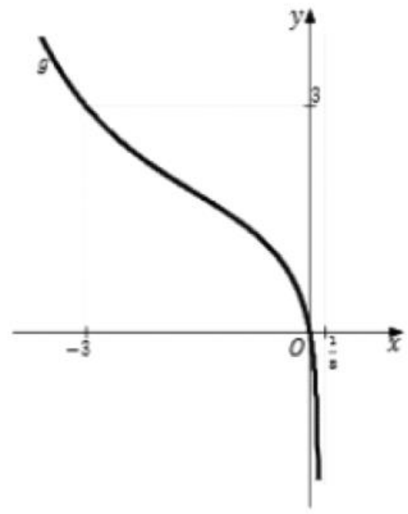
C.A. $a^2-3a-10=0 \Leftrightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}$

$\Leftrightarrow a=-2 \vee a=5$

$a\in(]-\infty,-2[\cup]5,+\infty[)\cap]3,+\infty[=]5,+\infty[$

A

5. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função g definida por $g(x) = e^{-x+a} + \log_5(1-bx)$, com a e b constantes reais.



Sabe-se que:

- O ponto de coordenadas $(-3,3)$ pertence ao gráfico de g;
- A reta de equação $x = \frac{1}{8}$ é assíntota vertical do gráfico de g.

Quais são os valores de a e de b?

(A) $a = 3$ e $b = 8$ **(B)** $a = -3$ e $b = 8$ **(C)** $a = -3$ e $b = -8$ **(D)** $a = 3$ e $b = -8$

$g(x) = e^{-x+a} + \log_5(1-bx)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1-bx > 0\} =]-\infty, \frac{1}{b}[$

$1-bx > 0 \Leftrightarrow -bx > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{b}$

como $x = \frac{1}{8}$ é equação da assíntota do gráfico e $D_g =]-\infty, \frac{1}{b}[$ então

$\frac{1}{b} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \boxed{b=8}$

$(-3,3) \in$ ao gráfico de g

$g(-3) = 3 \Leftrightarrow e^{3+a} + \log_5(1-8\times(-3)) = 3$

$\Leftrightarrow e^{3+a} + \log_5(25) = 3 \Leftrightarrow e^{3+a} + \log_5 5^2 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{3+a} + 2 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{3+a} = 1 \Leftrightarrow e^{3+a} = e^0$

$\Leftrightarrow 3+a=0 \Leftrightarrow a=-3$

B

6. Sejam a e b dois números reais positivos, com $a \neq 1$. Se $a^{7+\log_a(2b)} = 8$, então:

(A) $a^7 + 2b = 8$ **(B)** $a^7 = \frac{8}{b}$ **(C)** $a^7 = 16b$ **(D)** $a^7 = \frac{4}{b}$

$$a^{7+\log_a(2b)} = 8 \Leftrightarrow a^7 \times a^{\log_a(2b)} = 8$$

$$a^7 \cdot 2b = 8 \Leftrightarrow a^7 \cdot b = 4 \Leftrightarrow a^7 = \frac{4}{b}$$ D

7. Para certos valores reais de a a função g, definida por $g(x) = (\log(a-3) + \log a)^x$ é uma função exponencial estritamente crescente.

Então pode afirmar-se que:

(A) $a \in]5, +\infty[$

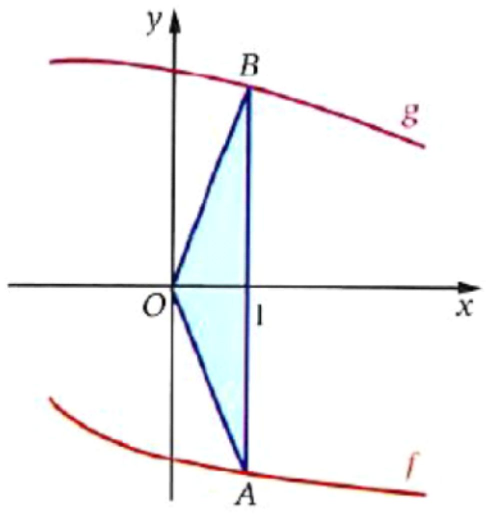
(B) $a \in]3, +\infty[$

(C) $a \in]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

(D) $a \in]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$

Igual ao exercício 4

8. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f definida por $f(x) = -2 - \log_9(x+2)$; parte do gráfico da função g definida por $g(x) = -\frac{x}{2} + 2 + \log_3(x+3)$ e o triângulo $[AOB]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de f.
- o ponto B pertence ao gráfico de g.
- a equação da reta AB é $x = 1$.

Qual é a área do triângulo $[AOB]$?

(A) $2 + \log_9 2$ **(B)** $2 + \log_3 2$ **(C)** $2 + \log_9 4$ **(D)** $2 + \log_3 4$

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{AB} \cdot 1}{2} = \frac{\overline{AB}}{2} \qquad \overline{AB} = |g(1) - f(1)|$$

$$g(1) = -\frac{1}{2} + 2 + \log_3(1+3) = \frac{3}{2} + \log_3(4)$$

$$f(1) = -2 - \log_9(1+2) = -2 - \log_9(3)$$

$$g(1) - f(1) = \frac{3}{2} + \log_3 4 + 2 + \log_9 3 = \frac{3}{2} + \log_3 4 + 2 + \frac{\log_3 3}{\log_3 9} =$$

$$= \frac{7}{2} + \log_3 4 + \frac{1}{2} = 4 + \log_3 4$$

$$A_{[AOB]} = \frac{4 + \log_3 4}{2} = 2 + \frac{1}{2}\log_3 4 = 2 + \log_3 4^{1/2} =$$

$$= 2 + \log_3 \sqrt{4} = 2 + \log_3 2$$

B

9. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f de domínio $]-\infty, 2[$ definida por $f(x)=1-\log_3(6-3x)$ e um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

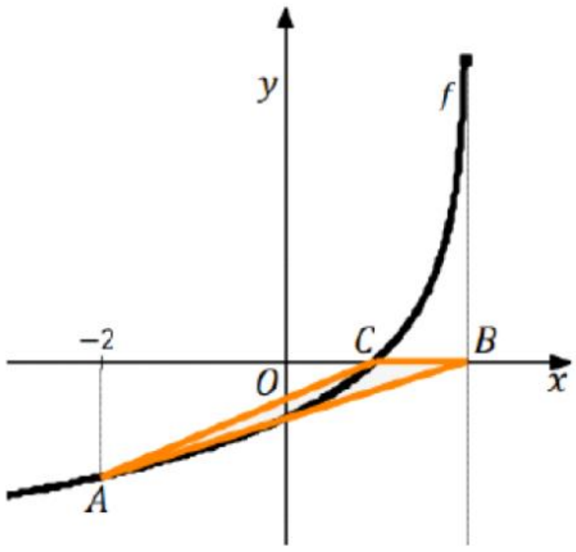
- o ponto A pertence ao gráfico de f e tem abcissa -2
- o ponto B pertence ao eixo Ox e à assíntota do gráfico de f
- o ponto C pertence ao eixo Ox e ao gráfico de f.

Os três itens seguintes devem ser resolvidos **utilizando métodos exclusivamente analíticos**.

9.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\log_3 2$.

9.2. Caracterize a função f^{-1}, função inversa de f.

9.3. Determine o conjunto solução da equação $f^{-1}(x)+3^{x+1}=0$.



$$\lim_{x\to 2^-}(1-\log_3(6-3x)) = 1-\log_3(6-3\times 2)$$

$$= 1-\log_3 0^+ = 1-(-\infty) = +\infty$$

então $x=2$ é assíntota vertical ao gráfico de f e $B(2,0)$

$f(x)=0 \Leftrightarrow 1-\log_3(6-3x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3(6-3x)=\log_3 3 \Leftrightarrow 6-3x=3 \Leftrightarrow x=1$, logo $C(1,0)$

$$A_{[ABC]} = \frac{(2-1)\times(-1+\log_3 12)}{2} = \frac{-1+\log_3 12}{2} =$$

$$= \frac{\log_3 12-\log_3 3}{2} = \frac{\log_3 \frac{12}{3}}{2} = \frac{\log_3 4}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\log_3 4 = \log_3 4^{1/2} = \log_3\sqrt{4} = \log_3 2$$ c.q.m

9.2 $D_f =]-\infty, 2[= D'_{f^{-1}}$

$1 - \log_3(6-3x) = y \Leftrightarrow -\log_3(6-3x) = y-1$

$\Leftrightarrow \log_3(6-3x) = 1-y \Leftrightarrow \log_3(6-3x) = \log_3 3^{1-y}$

$\Leftrightarrow 6-3x = 3^{1-y} \Leftrightarrow -3x = 3^{1-y} - 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-3^{1-y} - 6}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{-\cancel{3} \cdot 3^{-y}}{\cancel{3}} - \dfrac{6}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -3^{-y} - 2$

$f^{-1}(x) = \dfrac{-3^{x+1} + 6}{3} = \dfrac{-3^{-x} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} + 2 = -3^{-x} + 2$

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow]-\infty, 2[$

$x \longmapsto -3^{-x} + 2$

9.3 $f^{-1}(x)+3^{x+1}=0 \Leftrightarrow -3^{-x}+2+3^{x+1}=0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3^x}+2+3^x\cdot 3=0 \Leftrightarrow \frac{-1+2\times 3^x+3\cdot(3^x)^2}{3^x}=0$

$3^x>0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3\cdot(3^x)^2+2\,3^x-1=0$

Seja $y=3^x$

$3y^2+2y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=\frac{1}{3}$

$\underbrace{3^x=-1}_{\text{Impossível}} \vee 3^x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x=3^{-1} \Leftrightarrow$

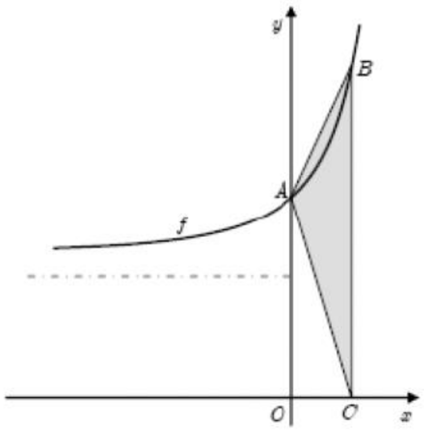
$3^x>0, \forall x\, D_f$

$\Leftrightarrow x=-1$

10. Considere a função f , definida por $f(x)=2^{x+1}+k$, $k \in IR$.

10.1. O ponto de coordenadas $(-4,3)$ pertence ao gráfico de f . Nestas condições determine o valor de k .

10.2. Suponha agora que $y=3$ é a equação da assíntota do gráfico de f . No referencial da figura ao lado está representada parte do gráfico de f e o triângulo [ABC].



Sabe-se que:

- O ponto A pertence ao gráfico de f e ao eixo Oy;
- O ponto B pertence ao gráfico de f e tem ordenada igual a $\sqrt{32}+3$;
- O ponto C pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa de B .

10.2.1. Determine, arredondado às décimas, a área do triângulo [ABC]. Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

10.2.2. É dada agora a função, de domínio IR , definida por $g(x)=8\times 2^{5-x}+3$.
Determine o conjunto solução da condição $f(x)\leq g(x)$.

10.1 $f(-4)=3 \Leftrightarrow 2^{-4+1}+k=3$

$\Leftrightarrow 2^{-3}+k=3$

$\Leftrightarrow k=3-\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow k=\frac{23}{8}$

10.2 $B(x, \sqrt{32}+3)$ $f(x)=2^{x+1}+k$

10.2.1 Como $y=3$ é assíntota ao gráfico de f, então

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=3 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(2^{x+1}+k\right)=3$

$\Leftrightarrow 2^{-\infty}+k=3 \Leftrightarrow k=3$

$f(x)=2^{x+1}+3$

$B(x, \sqrt{32}+3)$

$f(x)=2^{x+1}+3$

$B(x, \sqrt{32}+3)$

Então $f(x)=\sqrt{32}+3 \Leftrightarrow 2^{x+1}+\cancel{3}=\sqrt{32}+\cancel{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{x+1}=32^{1/2} \Leftrightarrow 2^{x+1}=\left(2^5\right)^{1/2}$

$\Leftrightarrow 2^{x+1}=2^{5/2} \Leftrightarrow x+1=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

logo $B\left(\frac{3}{2}, \sqrt{32}+3\right)$ e $C(3,0)$

Portanto $A_{[ABC]}=\frac{(\sqrt{32}+3)\times 3}{2} \simeq 13{,}0$

10.2.2 $g(x)=8\times 2^{5-x}+3$

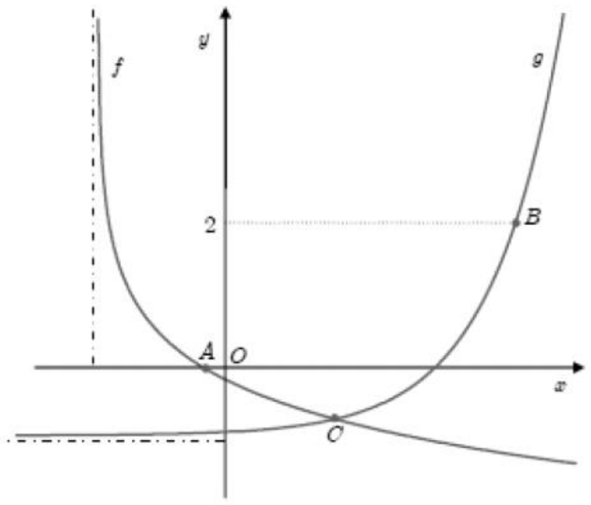
$f(x)\leq g(x) \Leftrightarrow 2^{x+1}+\cancel{3}\leq 8\times 2^{5-x}+\cancel{3}$

$\Leftrightarrow 2^{x+1}\leq 2^3\times 2^{5-x} \Leftrightarrow 2^{x+1}\leq 2^{8-x}$

$\Leftrightarrow x+1\leq 8-x \Leftrightarrow 2x\leq 7 \Leftrightarrow x\leq\frac{7}{2}$

$C.S=\left]-\infty, \frac{7}{2}\right]$

11. Considere as funções definidas por $f(x)=\underline{1}-\log_6(6x+11)$ e $g(x)=e^{x-8}-1$, cujos gráficos se encontram parcialmente representados num referencial o.n. xOy, juntamente com as suas assíntotas.



Tal como a figura sugere:

- O ponto A pertence ao gráfico de f e ao eixo Ox;
- O ponto B pertence ao gráfico de g;
- O ponto C pertence aos gráficos de f e g.

11.1. Indique a equação da assíntota do gráfico de f.

11.2. Determine as abcissas dos pontos A e B.

11.3. Caracterize a função inversa de f.

11.4. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da equação $f(x)=\log_6(-3x)$.

11.5. Com recurso à calculadora determine as coordenadas do ponto C (arredondadas às centésimas).

11.1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}: 6x+11>0\}=\left]-\frac{11}{6},+\infty\right[$

$6x+11>0 \Leftrightarrow x>-\frac{11}{6}$

Como f está definida de $\left]-\frac{11}{6},+\infty\right[$

Vamos mostrar que $x=-\frac{11}{6}$ é A.V. ao gráfico de f.

$$\lim_{x\to -\frac{11}{6}^+} f(x)=\lim_{x\to -\frac{11}{6}^+}\left(1-\log_6(6x+11)\right)=$$

$$=1-\log_6(-11^+ +11)=1-\log_6 0^+=$$

$$=1-(-\infty)=+\infty$$

Logo $x=-\frac{11}{6}$ é A.V. ao gráfico

11.2 $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-\log_6(6x+11)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_6(6x+11)=1 \Leftrightarrow \log_6(6x+11)=\log_6 6$

$\Leftrightarrow 6x+11=6 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{6}$ $\quad A\left(-\frac{5}{6},0\right)$

$B(x,2)$

$g(x)=2 \Leftrightarrow e^{x-8}-1=2 \Leftrightarrow e^{x-8}=3$

$\Leftrightarrow e^{x-8}=e^{\ln 3} \Leftrightarrow x-8=\ln 3 \Leftrightarrow x=\ln 3+8$

$B(\ln 3+8\;,\;2)$

11.3 $f(x)=1-\log_6(6x+11)$

$D'_{f^{-1}}=D_f=\left]-\frac{11}{6},+\infty\right[$

$1-\log_6(6x+11)=y \Leftrightarrow \log_6(6x+11)=1-y$

$\Leftrightarrow 6x+11=e^{1-y} \Leftrightarrow 6x=e^{1-y}-11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{e^{1-y}-11}{6}$ então $f^{-1}(x)=\dfrac{6^{1-y}-11}{6}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{11}{6},+\infty\right[$

$x \longmapsto \dfrac{6^{1-y}-11}{6}$

11.4 $f(x) = \log_6(-3x)$

$1 - \log_6(6x+11) = \log_6(-3x)$

$D = \{x \in \mathbb{R} : 6x+11>0 \wedge -3x>0\} =]-\frac{11}{6}, 0[$

$x > -\frac{11}{6}$ $\quad$ $x<0$

$1 - \log_6(6x+11) = \log_6(-3x)$

$\Leftrightarrow 1 = \log_6(-3x) + \log_6(6x+11)$

$\Leftrightarrow \log_6 6 = \log_6(-3x(6x+11))$

$\Leftrightarrow 6 = -3x(6x+11)$

$\Leftrightarrow 18x^2 + 33x + 6 = 0$

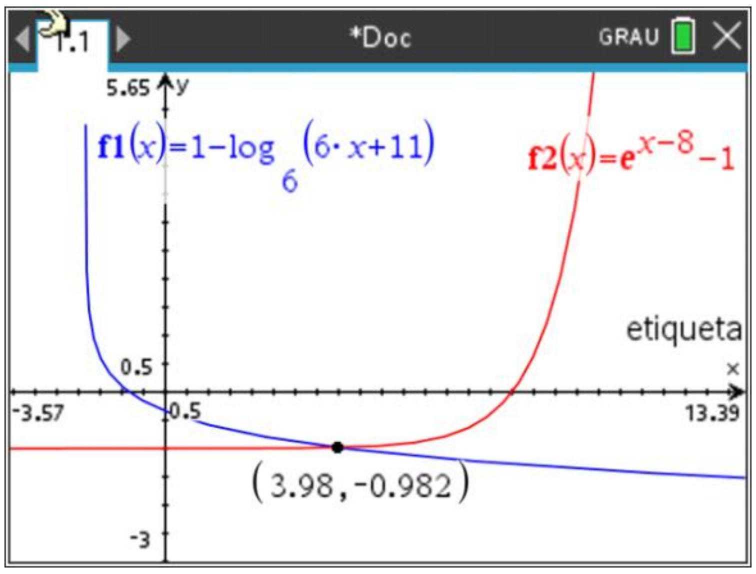
$\Leftrightarrow x = \frac{-33 \pm \sqrt{33^2 - 4 \times 6 \times 18}}{36}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-11+\sqrt{73}}{12} \vee x = \frac{-11-\sqrt{73}}{12}$

$\notin D$ $\quad$ $\notin D$

$S = \{\}$

11.5



$C\,(3{,}98\,;\ -0{,}982)$

12. Seja h a função definida por $h(x)=\dfrac{\ln(5x-x^2)}{\log_4(3x)+2}$

12.1. Determine o domínio de h.

12.2. Mostre que $h(1)=\dfrac{\ln^2(4)}{\ln 48}$

12.1 $D_h=\{x\in\mathbb{R}: 5x-x^2>0 \wedge 3x>0 \wedge \log_4(3x)+2\neq 0\}$

- $3x>0 \Leftrightarrow x>0$
- $5x-x^2>0$

$5x-x^2=0 \Leftrightarrow x(5-x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=5$

$0 \quad + \quad 5$ $\qquad 0<x<5$

- $\log_4 3x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{1}{48}$

$\log_4 3x+2=0 \Leftrightarrow \log_4 3x=-2 \Leftrightarrow 3x=4^{-2}$

$\Leftrightarrow 3x=\frac{1}{16} \Leftrightarrow x=\frac{1}{48}$

$D_h=\,]0,5[\,\setminus\left\{\frac{1}{48}\right\}$

12.2 $h(1)=\frac{\ln(5-1)}{\log_4 3+2}=\frac{\ln 4}{\log_4 3+\log_4 4^2}=$

$=\frac{\ln 4}{\log_4 3\times 16}=\frac{\ln 4}{\log_4 48}=\frac{\ln 4}{\frac{\ln 48}{\ln 4}}=$

$=\frac{\ln^2(4)}{\ln(48)}$ c. q. m.

13. Considere as funções f e g definidas por:

$f(x)=\log_2(x^2-x)-\log_2(x)$ e $g(x)=-e^{2x}-e^x+7$

13.1. Determine os valores de x tais que $g(x)=f(3)$.

13.2. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x)\geq\frac{g(0)}{5}$.

13.3. Caracterize a função f^{-1}, função inversa de f.

13.1 $f(3)=\log_2(9-3)-\log_2 3=\log_2 6-\log_2 3=$

$=\log_2\left(\frac{6}{3}\right)=\log_2 2=1$

$g(x)=f(3)\Leftrightarrow -e^{2x}-e^x+7=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -e^{2x}-e^x+6=0\Leftrightarrow$

Seja $y=e^x$

$-y^2-y+6=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{-2}\Leftrightarrow y=-3 \lor y=2$

$\underbrace{e^x=-3}_{\text{Impossível}}\lor e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

$\forall x\in\mathbb{R}: e^x>0$

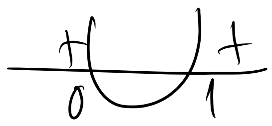
$S=\{\ln 2\}$

13.2 $f(x) \geq \frac{g(0)}{5}$

$$g(0) = -e^{0} - e^{0} + 7 = -1 - 1 + 7 = 5$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0 \wedge x > 0\}$$

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$



$$x < 0 \vee x > 1$$

$$(x < 0 \vee x > 1) \wedge x > 0$$

$$D_f =]1, +\infty[$$

$$f(x) = \frac{g(0)}{5} \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2 - x}{x}\right) \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}}\right) \geq \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$C.S =]3, +\infty[$$

13.3 $D_f = D'_{f^{-1}} =]1,+\infty[$ (13.2)

$\log_2(x^2-x) - \log_2(x) = y \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2-x}{x}\right) = y$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1) = y \Leftrightarrow x-1 = 2^y \Leftrightarrow x = 2^y - 1$

$f^{-1}(x) = 2^x - 1$ $\quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow]1,+\infty[$

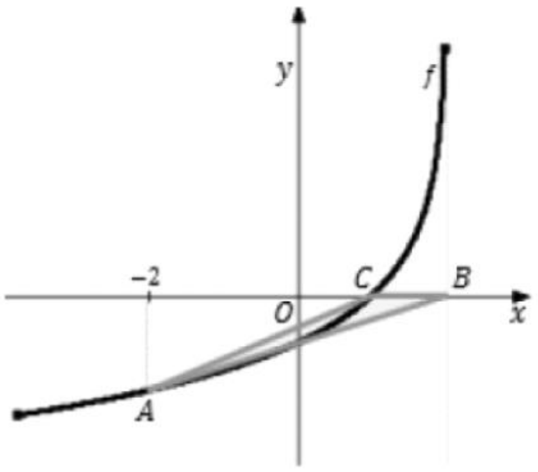
$x \longmapsto 2^x - 1$

14. Considere a função f, de domínio $]-\infty,2[$, definida por $f(x)=1-\log_3(6-3x)$.

14.1. Determine o conjunto solução da inequação $f(x)-f(1-2x)\geq 1+\log_3 x$.

14.2. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e um triângulo [ABC]. Sabe-se que:

- O ponto A pertence ao gráfico de f e tem abcissa -2;
- O ponto B pertence ao eixo Ox e à assíntota do gráfico de f;
- O ponto C pertence ao eixo Ox e ao gráfico de f.



Mostre que a área do triângulo [ABC] é igual a $\log_3 2$.

14.3. Mostre que a função f é injetiva.

14.4. Caracterize a função f^{-1}, função inversa de f.

14.5. Determine o conjunto solução da equação $f^{-1}(x)+3^{x+1}=0$.

14.1 $f(x) - f(1-2x) \geq 1 + \log_3 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \log_3(6-3x) - [1 - \log_3(6-3(1-2x))] \geq 1 + \log_3 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{1} - \log_3(6-3x) - \cancel{1} + \log_3(6-3+6x) \geq 1 + \log_3 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\log_3(6-3x) + \log(3+6x) \geq 1 + \log_3 x$ *

$D = \{x \in \mathbb{R}: 6-3x>0 \wedge 3+6x>0 \wedge x>0\} =]0,2[$

$x<2$ $\quad x>-\frac{1}{2}$ $\quad x>0$

$* \Leftrightarrow \log_3(3+6x) \geq \log_3(x) + \log(6-3x) + 1$

$\Leftrightarrow \log_3(3+6x) \geq \log_3(x(6-3x)) + \log_3 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3(3+6x) \geq \log_3(3x(6-3x)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3(3+6x) \geq \log_3(18x - 9x^2)$

$\Leftrightarrow 3+6x \geq 18x - 9x^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 3 \geq 0$

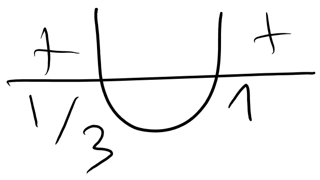
$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 \geq 0$

C. A.

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6}$

$x = \frac{1}{3} \vee x = 1$



$x < \frac{1}{3} \vee x > 1$

$C.S = \left( ]-\infty, \tfrac{1}{3}[\cup]1, +\infty[\right) \cap]0, 2[=$

$=]0, \tfrac{1}{3}[\cup]1, 2[$

14.2 $A(-2, f(-2))$

$f(-2) = 1 - \log_3(6 - 3 \times (-2)) = 1 - \log_3 12$

$B(x_B, 0)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (1 - \log(6-3x)) = 1 - \log 0^+ =$

$= 1 - (-\infty) = +\infty$

Assim $x=2$ é assíntota vertical ao gráfico de f. Portanto $B(2,0)$

$C(f(x)=0\ ,\ 0)$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 1-\log_3(6-3x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3(6-3x)=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3(6-3x)=\log_3 3$$
$$\Leftrightarrow 6-3x=3 \Leftrightarrow x=1$$

Portanto $C(1,0)$

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{OB}\times(-y_A)}{2}=\frac{1\times(-(1-\log_3 12))}{2}$$

$$=\frac{-1+\log_3 12}{2}=\frac{\log_3 12-\log_3 3}{2}$$

$$=\frac{\log_3\left(\frac{12}{3}\right)}{2}=\frac{\log_3 4}{2}=\frac{\log_3 2^2}{2}$$

$$=\frac{\cancel{2}\log_3 2}{\cancel{2}}=\log_3 2 \quad \text{c.q.m.}$$

14.3 f é injetiva $\Leftrightarrow \forall a,b \in D_f,$

$$f(a)=f(b) \Rightarrow a=b$$

$f(a)=f(b) \Leftrightarrow$

$$1-\log_3(6-3a)=\cancel{1}-\log_3(6-3b)$$

$$\log_3(6-3a)=\log_3(6-3b)$$

$$\cancel{6}-3a=\cancel{6}-3b$$

$$-3a=-3b$$

$$a=b$$

Logo f é injetiva

14.4 $D_f = D_{f^{-1}} =]-\infty, 2[$

$1-\log_3(6-3x)=y \Leftrightarrow \log_3(6-3x)=1-y$

$\Leftrightarrow 6-3x=3^{1-y} \Leftrightarrow -3x=3^{1-y}-6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{6-3^{1-y}}{3} \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{3}-\dfrac{\cancel{3}\cdot 3^{-y}}{\cancel{3}}$

$\Leftrightarrow x=2-3^{-y}$

$$f^{-1}(x) = 2 - 3^{-x} \qquad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

14.5 $f^{-1}(x) + 3^{x+1} = 0$

$$2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{3^{x}} + 3^{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{x} - 1 + 3^{x+1+x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{x} + 3^{2x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^{x} - 1 = 0$$

Seja $y = 3^{x}$

$$3y^2 + 2y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \vee y = -1$$

$$3^{x} = \frac{1}{3} \vee \underbrace{3^{x} = -1}_{\text{Impossível}} \Leftrightarrow$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ 3^{x} > 0$

$$\Leftrightarrow 3^{x} = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

$$C.S. = \{-1\}$$