Ficha de Trabalho 16 - Resolução

1. Seja f a função de domínio $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ definida por $f(x)=4^x$. Qual é o contradomínio de f?

(A) $[1,4]$ **(B)** $[1,8]$ **(C)** $[2,4]$ **(D)** $[2,8]$

4^x é uma função crescente

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \qquad 4^{3/2} = 4 \cdot 4^{1/2} = 4 \cdot 2 = 8$

$D'_f = [2, 8]$

D

2. Considere as funções f e g, de domínio IR , definidas por $f(x)=2^{-x}$ e $g(x)=3^{-x}$. Qual é o conjunto solução da inequação $f(x)<g(x)$?

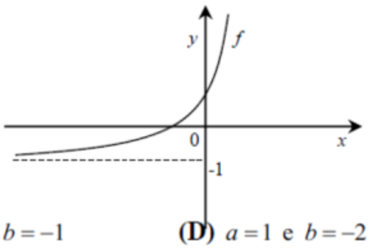
(A) Conjunto vazio **(B)** IR^- **(C)** IR^+ **(D)** IR

$2^{-x} < 3^{-x} \Leftrightarrow \frac{2^{-x}}{3^{-x}} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} < 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x} < \left(\frac{3}{2}\right)^{0} \Leftrightarrow x < 0$

B

3. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, o gráfico de uma função, de domínio IR, definida por: $f(x)=a+be^x$ está representado na figura ao lado.



Tal como a figura sugere:

- a reta de equação $y=-1$ é assíntota do gráfico de f
- o gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1.

Quais são os valores de a e de b?

(A) $a=-1$ e $b=2$ **(B)** $a=-1$ e $b=1$ **(C)** $a=1$ e $b=-1$ **(D)** $a=1$ e $b=-2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(a+be^x)=a$, como $y=-1$ é assíntota

então $a=-1$

$f(0)=-1+be^0=-1+b$

como $f(0)=1$ então $-1+b=1 \Leftrightarrow b=2$

$a=-1$ e $b=2$

A

4. Sabe-se que o ponto P(1,3) pertence ao gráfico da função $f(x)=2^{ax}-1,\ a\in IR$. Qual é o valor de a?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** −2

$f(1)=3 \Leftrightarrow 2^a-1=3 \Leftrightarrow 2^a=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^a=2^2 \Leftrightarrow a=2$

A

5. Na figura 1, está representada parte do gráfico da função f, de domínio IR, definida por $f(x)=e^x$.

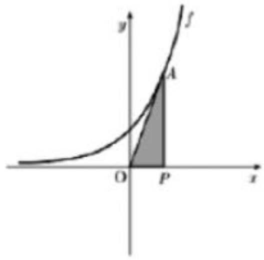


Fig. 1

Considere um ponto P a deslocar-se sobre o semieixo positivo das abcissas.

Seja A o ponto pertencente ao gráfico da função que tem a mesma abcissa que o ponto P.

Para cada posição do ponto P, define-se um triângulo [OAP].

Qual das expressões seguintes representa, em função de x (abcissa do ponto P), a área do triângulo [OAP]?

(A) xe^x **(B)** $\frac{xe^x}{2}$ **(C)** $\frac{x+e^x}{2}$ **(D)** e^x

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{PA}}{2} = \frac{x_P \times y_A}{2}$$

$$x_P = x$$

$$y_A = f(x) = e^x$$

$$A_{[OAP]} = \frac{x \cdot e^x}{2}$$

B

6. Sejam a e b dois números reais positivos. Qual das seguintes igualdades é equivalente a $\ln a = -\ln b$?

(A) $a+b=1$ **(B)** $\frac{a}{b}=1$ **(C)** $a\times b=1$ **(D)** $a-b=1$

$$\ln a = -\ln b \Leftrightarrow \ln a + \ln b = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln a \cdot b = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow a \cdot b = 1$$

C

7. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real positivo a, igual a $e^{2\ln a}$? (ln designa logaritmo de base e)

(A) $2a$ **(B)** $2+a$ **(C)** 2^a **(D)** a^2

$$e^{2\ln a} = e^{\ln a^2} = a^2$$

D

8. Sabe-se que $\log_2 a = \frac{1}{5}$. Qual é o valor de $\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right)$?

(A) 1 **(B)** -2 **(C)** -3 **(D)** -4

$$\log_2 a^5 - \log_2 8 = 5\log_2 a - \log_2 2^3 =$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{5} - 3 = 1 - 3 = -2$$

B

9. Seja $g: IR^+ \to IR$ a função definida por $g(x) = \log_2\left(2\times\sqrt[3]{x}\right)$. Indique qual das expressões seguintes também pode definir a função g.

(A) $2+\log_2\left(\sqrt[3]{x}\right)$ **(B)** $2\log_2\left(\sqrt[3]{x}\right)$ **(C)** $\frac{3+\log_2 x}{3}$ **(D)** $\frac{1+\log_2 x}{2}$

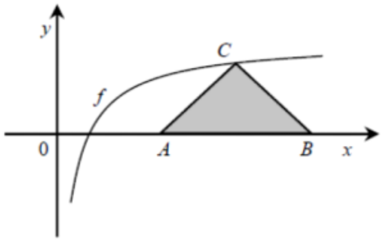
$$\log_2(2\times x^{1/3}) = \log_2 2 + \log_2 x^{1/3} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\log_2 x =$$

$$= \frac{3+\log_2 x}{3}$$

C

10. No referencial da figura está parte do gráfico de uma função f definida por $f(x)=\log_a x$ com $a>1$, e um triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o vértice C do triângulo pertence ao gráfico de f
- $A(a,0)$ e $B(2a,0)$
- $\overline{AC}=\overline{CB}$

As coordenadas do ponto C são:

(A) $\left(\frac{3a}{2}, 1+\log_a(1,5)\right)$ **(B)** $\left(\frac{3a}{2}; 1,5\right)$ **(C)** $\left(\log_a(1,5), \frac{3a}{2}\right)$ **(D)** $\left(\frac{3a}{2}, \log_a(1,5)\right)$

$A(a,0)$ $B(2a,0)$

$x_C = \frac{a+2a}{2} = \frac{3a}{2}$

$y_C = f(x_C) = \log_a \frac{3a}{2} =$

$= \log_a a + \log_a \frac{3}{2} =$

$= 1 + \log_a (1,5)$

A

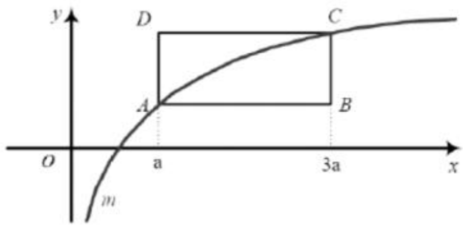
11. Indique o valor de $\frac{a}{a^{1-\log_a(2)}}$

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

$\frac{a}{a^1 \cdot a^{-\log_a 2}} = \frac{1}{a^{\log_a 2^{-1}}} = \frac{1}{2^{-1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

D

12. Na figura abaixo está parte da representação gráfica da função m, de domínio IR^+, definida por: $m(x) = \log_3 x$.



Os pontos A e C, que pertencem ao gráfico da função m, são vértices de um retângulo [ABCD], de lados paralelos aos eixos do referencial.
As abcissas A e C a e $3a$, respetivamente, sendo a um número real positivo.
Qual é a expressão que dá a área do retângulo [ABCD] em função de a?

(A) a **(B)** $2a$ **(C)** $2a\log_3(2a)$ **(D)** $\log_3(6a)$

$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC}$ $\overline{AB} = |x_C - x_A| = |3a - a| = 2a$

$\overline{BC} = |y_C - y_A| = |\log_3 3a - \log_3 a| = \left|\log_3 \frac{3a}{a}\right| = \log_3 3 = 1$

$A_{[ABCD]} = 2a \cdot 1 = 2a$ B

13. A expressão simplificada de $\log_a\left(\sqrt{\ln \sqrt[a]{e}}\right)$, com $a \in IN \setminus \{1\}$ é:

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $-\frac{1}{2}$ **(C)** $\log_a \sqrt{e}$ **(D)** nenhuma das anteriores

$\log_a\left(\sqrt{\ln \sqrt[a]{e}}\right) = \log_a\left(\sqrt{\ln e^{1/a}}\right) = \log_a \sqrt{\frac{1}{a} \ln e}$

$= \log_a \frac{1}{a}^{1/2} = \frac{1}{2} \log_a a^{-} = -\frac{1}{2} \log_a a = -\frac{1}{2}$

B

14. Sejam $a,b \in IR^+$ e $x,y \in IR^+$ tais que $a = \log_3 x$ e $b = \log_9 y$

14.1. A que é igual a expressão $\log_3\left(\frac{x^2}{y}\right)$?

(A) $2(a-b)$ **(B)** $a-b$ **(C)** $2a-b$ **(D)** $a-2b$

$$\log_3 x^2 - \log_3 y = 2\log_3 x - 2\log_9 y$$
$$= 2a - 2b = 2(a-b)$$

A

C. A.

$\log_3 y =$

$= \frac{\log_9 y}{\log_9 3} =$

$= \frac{\log_9 y}{\frac{1}{2}} = 2\log_9 y$

14.2. A que é igual a expressão 3^{2+2a}?

(A) $9+x^2$ **(B)** $9x^2$ **(C)** $3x^2$ **(D)** $9+2x$

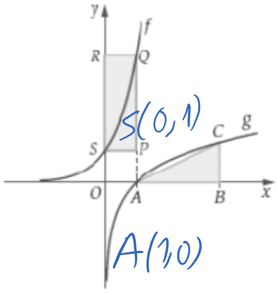
$$3^{2+2\log_3 x} = 3^2 \cdot 3^{2\log_3 x} = 9 \cdot 3^{\log_3 x^2} = 9x^2$$

B

15. Na figura estão representadas, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f de domínio IR definida por $f(x)=a^x$ (com $a>1$) e parte do gráfico da função g, definida em IR^+ por $g(x)=\ln x$.

Na mesma figura estão também representados o triângulo [ABC] e o retângulo [PQRS] onde:

- Os pontos A e B pertencem ao eixo Ox e o ponto A pertence ao gráfico de g. O ponto B tem abcissa a;
- O ponto C pertence ao gráfico de g e tem a mesma abcissa do que B;
- Os pontos S e R pertencem ao eixo Oy e o ponto S pertence ao gráfico de f;
- O ponto Q pertence ao gráfico de f e tem a mesma abcissa do que P e A.



Qual é o valor de a de modo que a área do triângulo [ABC] seja igual à área do retângulo [PQRS]?

(A) 1 **(B)** e **(C)** e^2 **(D)** $\ln 2$

$A_{[PQRS]} = \overline{SP} \times \overline{PQ}$

$= a^1 - 1$

$\overline{SP} = 1$

$\overline{PQ} = a^1 - 1$

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$

$= \frac{(a-1)\ln a}{2}$

$\overline{AB} = a - 1$

$\overline{BC} = \ln a$

$(a-1) = \frac{(a-1)\ln a}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{2} = \frac{a-1}{a-1}$

$\Leftrightarrow \ln a = 2$

$\Leftrightarrow \ln a = \ln e^2$

$\Leftrightarrow a = e^2$

C

16. Seja [ABC] um triângulo retângulo em B, tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{AC} = c$.

Sabe-se que $\ln c - \ln b = a$. A que é igual a expressão $\ln\left(bc + c^2\right) + \ln\left(\frac{c}{b} - 1\right)$?

(A) $a + \ln a$ **(B)** $b + \ln a$ **(C)** $a + 2\ln a$ **(D)** $b + 2\ln a$

$\ln \frac{c}{b} = a$

$\ln (bc+c^2)(\frac{c}{b}-1) =$

C.A.

Como [ABC] é retângulo em B

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

$= \ln c(b+c)\left(\frac{c-b}{b}\right)$

$= \ln \frac{c}{b}(c+b)(c-b)$

$= \ln \frac{c}{b} + \ln (c^2-b^2)$

$= a + \ln a^2 = a + 2\ln a$

C

17. Seja a um número real tal que $\log_a 4 = 8$. Qual é o valor de $\log_{4a} \sqrt[4]{64}$?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

$\log_a 4 = 8 \Leftrightarrow a^8 = 4$

$\log_a x = y$

$a^y = x$

$\Leftrightarrow a = \sqrt[8]{4}$

$\Leftrightarrow a = 4^{1/8}$

$\log_{4 \cdot 4^{1/8}} (64^{1/4}) = \log_{4^{9/8}} (4^3)^{1/4} = \log_{4^{9/8}} (4^{3/4}) =$

$= \log_{4^{9/8}} (4^{9/8})^{2/3} = \frac{2}{3}$

C

18. Sejam a, b e c três números reais tal que $\log_{ab} a + 2\log_{ab}(bc) - \log_{ab} c = 2$.

Qual é o valor de $\log_a(ac^2)$?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5

$$\log_{ab} a + \log_{ab}(bc)^2 - \log_{ab} c = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{ab} \frac{a \cdot b^2 c^2}{c} = 2 \Leftrightarrow \log_{ab} ab^2c = 2$$

$$\Leftrightarrow (ab)^2 = ab^2c \Leftrightarrow a^2 = ac \Leftrightarrow a = c$$

$$\log_a(ac^2) = \log_a a a^2 = \log_a a^3 = 3$$

B

19. Sejam x e y dois números reais positivos tais que $4^{\log_{16} y - 2\log_4 x} = 3$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $y = 3x^2$ **(B)** $y = 9x^2$ **(C)** $y = 3x^4$ **(D)** $y = 9x^4$

$$4^{\log_{16} y - 2\log_4 x} = 3 \Leftrightarrow 4^{\log_{16} y} \cdot 4^{\log_4 x^{-2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow 4^{\log_4 y^{1/2}} \cdot x^{-2} = 3$$

$$\Leftrightarrow y^{1/2} \cdot x^{-2} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^{1/2} = 3x^2 \Leftrightarrow y = 9x^4$$

D

C.A.

$$\log_{16} y = \frac{\log_4 y}{\log_4 16} = \frac{\log_4 y}{2} = \log_4 y^{1/2}$$