



1. Resolve em \mathbb{R} , as seguintes equações:

a) $\log(1 - x) = 1$

b) $2 \log x = \log 2$

c) $3e^{x+1} = 2e^{-x}$

d) $\ln|x| = \ln 3$

e) $x - 2 = \log_{\frac{1}{2}} 2$

2. Justifica que, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tem: $10^{\frac{x}{2}} = e^{x \ln \sqrt{10}}$

3. Considera as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

3.1 Justifica que as funções f e g admitem inversa.

3.2 Representa cada uma das funções graficamente e, por transformação geométrica dos gráficos de f e de g , obtém os gráficos das funções inversas de f e de g .

3.3. Indica o domínio, o contradomínio, os pontos de interseção com os eixos coordenados e a monotonia de f^{-1} e de g^{-1} .

4. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $f(x) = a + b^{x+1}$.

Sabendo que $f(0) = 2$ e $f(1) = 8$, determina $f^{-1}(0)$.

5. Determina o domínio e os zeros, se existirem, das funções definidas por:

a) $f(x) = \log(3 - x)$

b) $f(x) = \ln(3^x - 3)$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}|x|$

d) $f(x) = \frac{\log_3(1-x^2)}{x}$

e) $f(x) = \log_3\left(\frac{1-x^2}{x}\right)$

6. Considera as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \ln x \text{ e } g(x) = x^2 - 1$$

Caracteriza:

a) $f \circ g$

b) $g \circ f$

7. Sabendo que cada uma das funções seguintes é bijetiva, caracteriza a sua função inversa.

a) $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{2}$

b) $g(x) = 2 \log(1 - x)$

8. Considera as funções f e g , de domínio \mathbb{R}^+ , definidas por:

$$f(x) = \log_4 x \text{ e } g(x) = \log_8 x^2$$

Mostra que $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \frac{4}{3}f(x)$

9. Seja f a função em \mathbb{R}^+ por $f(x) = \log_3(x^2) - \log_3\left(\frac{x}{9}\right)$

a) Mostra que $f(x) = 2 + \log_3 x$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

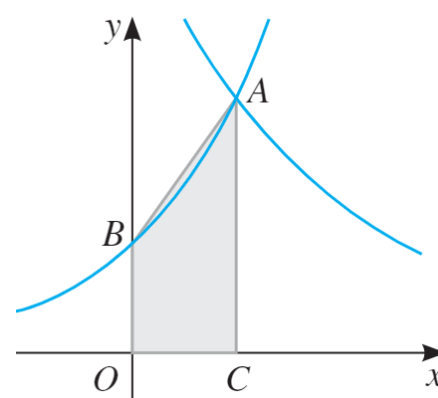
b) Determina a área do triângulo cujos vértices são a origem do referencial, o ponto do gráfico de f cuja ordenada é 1 e o ponto correspondente ao zero de f .

10. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy , um trapézio $[ABOC]$ e partes dos gráficos das funções de domínio \mathbb{R} , definidas por $f(x) = 2^{2-x}$ e $g(x) = 3^x$.

Como a figura sugere:

- o ponto O é a origem do referencial;
- o ponto A é a interseção dos gráficos de f e g ;
- o ponto B é a interseção do gráfico de g com o eixo das ordenadas;
- o ponto C tem a mesma abcissa de A e pertence ao eixo das abcissas.

Determina a área do trapézio $[ABOC]$, aproximada às centésimas.



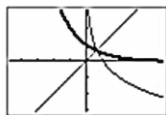
Soluções

1.a) C.S. = {9} 1.b) C.S. = {-3, 3} 1.c) C.S. = $\{\sqrt{2}\}$ 1.d) C.S. = {1} 1.e) C.S. = $\left\{\frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 2 - 1)\right\}$

3.2 Representando: f e f^{-1}



g e g^{-1}



3.3 $D_{f^{-1}} = D_{g^{-1}} = \mathbb{R}^+$; $D_{f^{-1}} = D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$; Interseção com o eixo das abcissas: $(1, 0)$; f^{-1} é crescente e g^{-1} é decrescente.

4. $f^{-1}(0) = 1$

5.a) Domínio: $]-\infty, 3[$; Zeros: 2 5.b) Domínio: $]1, +\infty[$; Zeros: $\log_3 4$ 5.c) Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; Zeros: -1 e 1

5.d) Domínio: $]-1, 1[\setminus \{0\}$; Zeros: \emptyset 5.e) Domínio: $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$; Zeros: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

6.a) $f \circ g:]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow \ln(x^2 - 1)$ 6.b) $g \circ f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow \ln^2 x - 1$

7.a) $f^{-1}:]-\frac{1}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$; $x \rightarrow \frac{\ln(2x+1)}{2}$ 7.b) $g^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 1[$; $x \rightarrow 1 - 10^{\frac{x}{2}}$

9. $A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{18}$

10. $A_{\text{trapézio}} \approx 1,29$