



Funções Exponenciais e Funções Logarítmicas – Funções Logarítmicas 2

1. Recorrendo às regras de derivação, determina uma expressão analítica da derivada de cada uma das seguintes funções.

1.1 $f(x) = (e^x - x) \ln(x)$

1.2 $f(x) = \frac{\ln(x)+4}{e^x}$

1.3 $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$

1.4 $f(x) = \ln(\cos x^2)$

1.5 $f(x) = (\ln(\ln(x)))^2$

1.6 $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x}\right)$

1.7 $f(x) = 2^x + \log_2(x)$

1.8 $f(x) = \frac{3^{2x+1}}{\ln(3)}$

1.9 $f(x) = 3^{\log_2(x)}$

2. Calcula, em a , o limite das funções definidas pelas seguintes expressões, utilizando mudança de variável sempre que te parecer conveniente.

2.1 $f(x) = \frac{e^{-x}+e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^x+1}}, a = -\infty$ e $a = +\infty$

2.2 $f(x) = \frac{-x+1-\ln(x)}{x^2}, a = 0$ e $a = +\infty$

2.3 $f(x) = (x^2 - 1)e^{\frac{1}{x-1}}, a = 1$

2.4 $f(x) = \frac{4e^{3x}-e^{2x}}{2e^{3x}+3e^x-e^{-x}}, a = +\infty$ e $a = -\infty$

2.5 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(x), a = +\infty$

2.6 $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}+\ln(x)}, a = +\infty$ e $a = 0^+$

2.7 $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2+1}, a = +\infty$

2.8 $f(x) = \frac{2x-4}{\ln(x-1)}, a = 2$ e $a = +\infty$

2.9 $f(x) = \ln(x^2) - \ln(ex^2 + x), a = +\infty$ e $a = 0^+$

2.10 $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{e^{2x}}, a = +\infty$

2.11 $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{3x}\right), a = +\infty$

2.12 $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}, a = 0^+$ e $a = +\infty$

3. Seja f a função definida por $f(x) = x \log_3(x)$. Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f :

3.1 no ponto de abscissa 1 ;

3.2 que é paralela ao eixo das abscissas.

4. Estuda, quanto à monotonia, existência de extremos, sentido das concavidades do gráfico e existência de pontos de inflexão, as funções f definidas por:

4.1 $f(x) = x^2 \ln(x)$

4.2 $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

Soluções

1.1 $(e^x - 1) \ln(x) + \frac{e^x}{x} - 1$

1.2 $\frac{1-4x-x \ln(x)}{xe^x}$

1.3 $\frac{x^2+1}{x^3-x}$

1.5 $-2x \tan x^2$

1.6 $\frac{2 \ln(\ln(x))}{x \ln(x)}$

1.7 $\frac{x-1}{x}$

1.8 $2^x \ln(x) + \frac{1}{x \ln(2)}$

1.9 $2 \times 3^{2x+1}$

1.10 $\frac{3^{\log_2(x)} \log_2(3)}{x}$

2.1 $+\infty; 0$

2.2 $-\infty; 0$

2.3 Não existe

2.4 $2; 0$

2.5 0

2.6 $0; 1$

2.7 0

2.8 $2; +\infty$

2.9 $-1; +\infty$

2.10 0

2.11 $\frac{1}{3}$

2.12 $e^2; 1$

3.1 $y = \log_3(e) x - \log_3(e)$

3.2 $y = -\frac{\log_3(e)}{e}$

4.1 f é decrescente em $]0, \frac{\sqrt{e}}{e}]$ e é crescente em $[\frac{\sqrt{e}}{e}, +\infty[$; $f(\frac{\sqrt{e}}{e}) = -\frac{1}{2e}$ é mínimo; o gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]0, \frac{\sqrt{e}}{e}]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[\frac{\sqrt{e}}{e^2}, +\infty[$; o ponto de coordenadas $(\frac{\sqrt{e}}{e^2}, -\frac{3}{2e^3})$ é ponto de inflexão do gráfico.

4.2 f é decrescente em $]0, 1[$ e em $]1, e[$ e é crescente em $[e, +\infty[$; $f(e) = e$ é mínimo relativo; o gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]0, 1[$ e em $[e^2, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]1, e^2[$; o ponto de coordenadas $(e^2, \frac{e^2}{2})$ é ponto de inflexão do gráfico.