Soluções Ficha 14 (E.M.)

1. B 2. D 3. B 4. C 5. A

6. C 7. D 8. D 9. B 10. A

11. C 12. A

13. $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ $D_{f'} = \mathbb{R}$

$$f''(x) = \left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)' = \left(-2x(x^2+1)^{-2}\right)' =$$

$$= (-2x)' \times (x^2+1)^{-2} + (-2x) \times \left((x^2+1)^{-2}\right)'$$

$$= \frac{-2}{(x^2+1)^2} - 2x \times (-2) \times (x^2+1)^{-3} \times 2x$$

$$= \frac{-2}{\underset{(x^2+1)}{(x^2+1)^2}} + \frac{8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

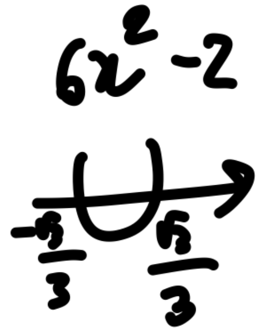
$$D_{f''} = \underset{=\mathbb{R}}{D_{f'}} \cap \{x : \underbrace{(x^2+1)^3 \neq 0}_{\text{c. universal}}\}$$

Achar os zeros da 2ª derivada e tabela de sinais ($D_{f''} = \mathbb{R}$)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 2 = 0 \wedge \underbrace{(x^2+1)^3 \neq 0}_{\text{c. universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$6x^2-2$		+	0	−	0	+	
$(x^2+1)^3$		+	+	+	+	+	
f''		+	0	−	0	+	
f		∪	$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ P.I.	∩	$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ P.I.	∪	



Resposta: f tem concavidade voltada para cima em $\left]-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right[$ e concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Tem 2 pontos de inflexão

$$P_1 \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \text{ e } P_2 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

14. $g''(x) = \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)' = \left[\left(x^2+x+1\right)^{1/2}\right]' =$

$= \frac{1}{2} \times \left(x^2+x+1\right)^{-1/2} \times (2x+1) =$

$= \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

$D_{g''} = D_g \cap \{x \in \mathbb{R}: 2\sqrt{x^2+x+1} \neq 0 \wedge \overbrace{x^2+x+1 \geq 0}^{\text{c. universal}}\}$

c. universal

C.A.

$\underbrace{x^2+x+1=0}_{\text{c. impossível}} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

x^2+x+1

$\boxed{D_{g''} = \mathbb{R}}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+1=0 \wedge \underbrace{2\sqrt{x^2+x+1} \neq 0}_{\text{c. universal em } \mathbb{R}}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	
$2\sqrt{x^2+x+1}$		$+$	$+$	$+$	
g''		$-$	0	$+$	
g		$\cap$	$g(-\frac{1}{2})$ P.I.	$\cup$	

Resposta: g tem conc. volt. para cima em $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ e voltada para baixo em $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. Ponto de Inflexão $\left(-\frac{1}{2}; g\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

estava erro no enunciado

15.1. $\lim_{x \to 3} \frac{-x^2-2x+15}{2-f(x)}$

Dados da questão
$f(3)=2$
pois o gráfico de f passa no ponto $(3;2)$

$\lim_{x \to 3} \frac{-x^2-2x+5}{-(f(x)-f(3))}$

Começa a ter "parecenças" com taxas de variação instantâneas $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$-x^2-2x+5$
Vamos ver se 3 é raíz do polinómio

	-1	-2	15
3		-3	-15
	-1	-5	0

$-x^2-2x+15 =$
$= (x-3)(-x-5)$

$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(-x-5)}{-(f(x)-f(3))}$

Assim, já aparece o "$x-a$" em fator
$x \to a$
$x-a \to 0$

Bom, então

$\lim_{x \to 3} \frac{-x^2-2x+15}{2-f(x)} =$

por exemplo

$= \lim_{x \to 3} \left(-1 \times \frac{(x-3)(-x-5)}{f(x)-f(3)} \right) =$

limite no real

$= \lim_{x \to 3} \left((x+5) \times \frac{1}{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}} \right) =$

$f'(3)$

$$= \lim_{x\to 3}(x+5) \times \lim_{x\to 3} \frac{1}{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}}$$

$$= 8 \times \frac{\lim_{x\to 3} 1}{\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}} = 8 \times \frac{1}{f'(3)}$$

$$f'(3) = \frac{3^2-5}{(3-1)^2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$= 8 \times 1 = 8$$

15.2. $f''(x) = \left(\frac{x^2-5}{(x-1)^2}\right)' =$

$$= \frac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)\times 1 \times (x^2-5)}{\left((x-1)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2x(x-1)^2 - 2(x^2-5)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2\cancel{(x-1)}\left[x(x-1)-(x^2-5)\right]}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - 2x - \cancel{2x^2} + 10}{(x-1)^3} = \frac{-2x+10}{(x-1)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x+10 = 0 \wedge (x-1)^3 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 5 \wedge x \neq 1$

x		1		5		$+\infty$
$-2x+10$	Não definida	ss	$+$	0	$-$	
$(x-1)^3$		ss	$+$	$+$	$+$	
f''		ss	$+$	0	$-$	
f			$\cup$	$f(5)$ P.I.	$\cap$	

enunciado $D_f =]1;+\infty[$

f tem concavidade voltada para cima em $]1;5]$ e para baixo em $[5;+\infty[$

Ponto de inflexão $(5; f(5))$

15.3. $(g \times f)'(3) = 0 \wedge g'(3) \neq 0$

$(g' \times f + f' \times g)(3) = 0 \wedge g'(3) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g'(3) \times f(3) + f'(3) \times g(3) = 0 \wedge g'(3) \neq 0$

$\Leftrightarrow g'(3) \times 2 + 1 \times g(3) = 0 \wedge g'(3) \neq 0$ $\quad \begin{cases} f(3) = 2 \\ f'(3) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -2g'(3) = +g(3)$

Reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 3 tem declive $g'(3)$ e passa em $(3; g(3))$

Interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto

$y = g'(3)x + b \xrightarrow{(3;g(3))} g(3) = 3 \times g'(3) + b$

$\Leftrightarrow -2g'(3) = 3g'(3) + b \Leftrightarrow b = -5g'(3)$

$y = g'(3)x - 5g'(3)$

Interseção com o eixo das abcissas é quando $y = 0$

Vem $0 = g'(3)x - 5g'(3) \Leftrightarrow 5g'(3) = g'(3)x$

$\underset{g'(3) \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{5\cancel{g'(3)}}{\cancel{g'(3)}} \Leftrightarrow x = 5$ c.q.d.