1. $g(x) = x f(x)$

$g'(x) = f(x) + x f'(x)$

$g''(x) = f'(x) + f'(x) + x f''(x) = 2f'(x) + x f''(x)$

2.1 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 5$

$f''(x) = 6x + 6$

C.A.

$6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	P.I.	$\cup$

$f(-1) = -1 + 3 + 5 + 1 = 8$

$(-1, 8)$ é P.I.

2.2 $g(x) = x^4 - 6x^2$

$D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = 4x^3 - 12x$

$g''(x) = 12x^2 - 12$

C.A.

$12x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

$+ \quad -1 \quad - \quad 1 \quad +$

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$
		$(-1, -5)$		$(1, -5)$	

$g(-1) = 1 - 6 = -5$

$g(1) = 1 - 6 = -5$

2.3 $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ $\quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$h'(x) = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3}}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$h''(x) = \frac{-2(x^2-1)^{\cancel{2}} + 2x \cdot 2 \cdot \cancel{(x^2-1)} \cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-2x^2+2+8x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{6x^2+2=0}_{\text{Impossível}} \land (x^2-1)^3 \neq 0$$
$$\land\ x \neq \pm 1$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$6x^2+2$	+	+	+	+	+
$(x^2-1)^3$	+	0	−	0	+
$h''(x)$	+	nd	−	nd	+
$h(x)$	$\cup$	nd	$\cap$	nd	$\cup$

h tem a concavidade virada para cima em $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

h tem a concavidade virada para baixo em $x \in]-1, 1[$

h não tem pontos de inflexão

2.4 $i(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ $D_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$i'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 + 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{x^4 + 2x}{x^4} = \frac{\cancel{x}(x^3 + 2)}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{x^3 + 2}{x^3}$$

$$i''(x) = \frac{(3x^2) \cdot x^3 - (x^3 + 2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{\cancel{3x^5} - \cancel{3x^5} - 6x^2}{x^6}$$

$$= \frac{-6}{x^4}$$

$$i''(x) \neq 0 \, , \; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$i''(x)$	$-$	nd	$-$
$i(x)$	$\cap$	nd	$\cap$

$i(x)$ tem a concavidade virada para baixo em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$i(x)$ não tem pontos de inflexão

2.5 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ $\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2\times 2\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

$$f''(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''	$+$	nd	$-$
f	$\cup$	nd	$\cap$

f tem a concavidade virada para cima em $x\in\,]-\infty,-1[$

f tem a concavidade virada para baixo em $x\in\,]-1,+\infty[$

f não tem pontos de inflexão

2.6 $k(x)=\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2$ $\quad D_k=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$$k'(x)=2\cdot\frac{x+2}{x-3}\cdot\frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{(2x+4)\cdot(x-3-x-2)}{(x-3)^3}=$$

$$=\frac{-10x-20}{(x-3)^3}$$

$$k''(x) = \frac{-10(x-3)^{\cancel{3}} - (-10x-20)\,3\,(x\cancel{-3})^{\cancel{2}}}{(x-3)^{\cancel{8}\,4}}$$

$$= \frac{-10x+30+30x+60}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{20x+90}{(x-3)^4} = \frac{10(2x+9)}{(x-3)^4}$$

$$k''(x)=0 \Leftrightarrow 10(2x+9)=0 \wedge (x-3)^4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{9}{2} \wedge x \neq 3$$

	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$		3	$+\infty$
$10(2x+9)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-3)^4$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
k''	$-$	0	$+$	n.d	$+$
k	$\cap$	P.I	$\cup$		$\cup$

$$k\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{9}$$

k tem a concavidade virada para cima em $x \in \left]-\frac{9}{2}, 3\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

k tem a concavidade virada para baixo em $x \in \left]-\infty, -\frac{9}{2}\right[$

k tem um ponto de inflexão $\left(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2.7 $l(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad D_l = \mathbb{R}$

$$l'(x) = \left(x^2+1\right)^{1/2\,\prime} = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-1/2} \cdot 2x$$
$$= x \cdot \left(x^2+1\right)^{-1/2}$$

$$l''(x) = \left(x^2+1\right)^{-1/2} - x \cdot \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-3/2} \cdot 2x$$
$$= \left(x^2+1\right)^{-1/2} - x^2\left(x^2+1\right)^{-3/2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} =$$
$$= \frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$x^2+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

logo l tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

l não tem pontos de inflexão

2.8. $m(x) = \dfrac{3x}{x^2-9}$ $\qquad D_m = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

$$m'(x) = \frac{3(x^2-9) - 3x \cdot 2x}{(x^2-9)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 - 27 - 6x^2}{(x^2-9)^2} = \frac{-3x^2-27}{(x^2-9)^2}$$

$$m''(x) = \frac{-6x(x^2-9)^{\cancel{2}} - (-3x^2-27) \cdot 2 \cdot \cancel{(x^2-9)}\, 2x}{(x^2-9)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-6x^3 + 54x + 12x^3 + 108x}{(x^2-9)^3}$$

$$= \frac{6x^3 + 162x}{(x^2-9)^3}$$

$$m''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^3 + 162x = 0 \ \wedge \ (x^2-9)^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(6x^2+162) = 0 \ \wedge \ x \neq \pm 3$$

$$\Leftrightarrow \Big(x = 0 \ \vee \ \underbrace{6x^2+162=0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}}\Big) \ \wedge \ \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$6x^2+162$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x^2-9)^3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
m''	$-$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.	$+$
m	$\cap$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.	$\cup$

$m(0) = 0$

2.9 $n(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ $D_n = \mathbb{R}$

$$n'(x) = \frac{2x(x^2+4)-(x^2-4)2x}{(x^2+4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2} = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$n''(x) = \frac{16(x^2+4)^2 - 16x\cancel{(x^2+4)}\cdot 2\cdot 2x}{(x^2+4)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{16x^2+64-64x^2}{(x^2+4)^3} = \frac{64-48x^2}{(x^2+4)^3}$$

$n''(x)=0 \Leftrightarrow 64-48x^2=0 \wedge (x^2+4)^3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge D_{n''}$

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$64-8x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x^2+4)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
n''	$-$	0	$+$	0	$-$
n	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$

$n\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ / $n\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

n tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$

n tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

2.10 $O(x) = \dfrac{3x^3}{x^2-1}$ $\qquad D_O = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$O'(x) = \frac{9x^2(x^2-1) - 3x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{9x^4 - 9x^2 - 6x^4}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 - 9x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$O''(x) = \frac{(12x^3 - 18x)(x^2-1)^{\cancel{2}} - (3x^4 - 9x^2)\,2\,\cancel{(x^2-1)}\,2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(12x^3 - 18x)(x^2-1) - (3x^4 - 9x^2)\,4x}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{\cancel{12x^5} - 12x^3 - 18x^3 + 18x - \cancel{12x^5} + 36x^3}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{6x^3 + 18x}{(x^2-1)^3} = \frac{6x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$$O''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x^2+3) = 0 \wedge (x^2-1)^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{x^2+3=0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \wedge x \neq \pm 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$6x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x^2-1)^3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
O''	$-$	nd	$+$	0	$-$	nd	$+$
O	$\cap$	nd	$\cup$	PI	$\cap$	nd	$\cup$

$O(0) = 0$

O tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]0, 1[$

O tem a concavidade voltada para cima em $]-1, 0[$ e em $]1, +\infty[$

O tem um ponto de inflexão em $(0,0)$

2.11. $f(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty[$

$$f'(x) = (x-2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-3/2} = -\frac{1}{4}(x-2)^{-3/2}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{(x-2)^3}} = -\frac{1}{4(x-2)\sqrt{(x-2)}}$$

	-2	$+\infty$
-1	$-$	$-$
$x-2$	0	$+$
$\sqrt{x-2}$	0	$+$
f''	nd	$-$
f	0	$\cap$

f tem a concavidade voltada para baixo em $]-2, +\infty[$

f não tem pontos de inflexão

2.12 $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ $\qquad D_g = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{x+1} - x\,\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{2(x+1) - x}{2\sqrt{x+1}\,(x+1)} = \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$g''(x) = \frac{2(x+1)\sqrt{x+1} - (x+2)\left[2\sqrt{x+1} + 2(x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right]}{\left(2(x+1)\sqrt{x+1}\right)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)\sqrt{x+1} - (x+2)\left(\frac{4(x+1)+2x+2}{2\sqrt{x+1}}\right)}{4(x+1)^3}$$

$$= \frac{2(x+1)\sqrt{x+1} - (x+2)\left(\frac{4x+4+2x+2}{2\sqrt{x+1}}\right)}{4(x+1)^3}$$

$$= \frac{2\cancel{(x+1)}\sqrt{x+1} - (x+2)\,\frac{6\cancel{(x+1)}}{2\sqrt{x+1}}}{4(x+1)^{\cancel{3}\,2}}$$

$$= \frac{4(x+1) - (x+2)6}{\cancel{8}\,(x+1)^2\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{2x+2-3x-6}{4(x+1)^2\sqrt{x+1}} = \frac{-x-4}{4(x+1)^2\sqrt{x+1}}$$

$g''(x) < 0,\ \forall x \in\,]-1, +\infty[$

g tem a concavidade voltada para baixo em $]-1, +\infty[$

3. **OPÇÃO A** é o gráfico que pode representar a função f.

OPÇÃO B não pode representar a função f porque a derivada da função é negativa em $]-\infty, 2[$

OPÇÃO C não pode representar a função, porque no ponto de abcissa 2 a derivada não é nula.

OPÇÃO D não pode representar a função porque não tem derivada finita no ponto de abcissa 4

4.1 $f'(x) \times f(x) < 0$

	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f' \times f$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

C.S $]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, 0[\cup]\frac{1}{2}, 1[\cup]\frac{3}{2}; 2[$

4.2 $f(x) \times f''(x) > 0$

x	$-\infty$	-1		0		1		2	$+\infty$
concavidade	$\cup$	$\cup$	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$	$\cup$	$\cup$
sinal f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
sinal f	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'' \times f$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$C.S =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

4.3 $f''(x) \times f'(x) \geq 0$

	$-\infty$	$-1/2$		0		$1/2$		1		$3/2$	$+\infty$
sinal f'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
sinal f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f' \times f''$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$CS = [-1/2, 0] \cup [1/2, 1] \cup [3/2, +\infty[$

5. $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{4x(x^2+1)-2x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{4(x^2+1)^{\cancel{2}}-4x\cdot 2\cancel{(x^2+1)}\,2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}\,3}}=$$

$$=\frac{4(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -12x^2+4=0 \wedge (x^2+1)^3\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \vee x=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
Sinal f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f'	$\searrow$	min	$\nearrow$	máx	$\searrow$

A função derivada tem um máximo relativo em $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1\right)^2}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{3}{9}+1\right)^2}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{12}{9}\right)^2}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{144}{81}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

então $m=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{4}x + b$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = 1/2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 3}{12} + b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{9}{12} + b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = b$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{8} = b$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{y = \frac{3\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}}$$

6. $a(t) = -5t^2 + 100t + 1500$

6.1 $a'(t) = -10t + 100$

$a'(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 100 = 0 \Leftrightarrow t = 10$

t	0		10	$+\infty$
a'	nd	$+$	0	$-$
a	nd	$\nearrow$	max	$\searrow$

$a(10) = -5(10)^2 + 100 \times 10 + 1500 = 2000$

Altura máxima é 2000 metros

6.2 $TMV_{[0,5]} = \frac{a(5) - a(0)}{5 - 0} = \frac{1875 - 1500}{5} = 75$

velocidade média nos primeiros 5 segundos foi 75 m/s

6.3 $a(t)=0 \Leftrightarrow -5t^2+100t+1500=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{-100\pm\sqrt{100^2-4\times1500\times(-5)}}{-10}$

$\Leftrightarrow t=30 \vee t=-10$

como $t\geq 0$, então $t=30$

$a'(t)=-10t+100$

$a'(30)=-10\times30+100=-200$

a velocidade do projétil quando atingir o solo foi 200 m/s

6.4 $\frac{a'(5)-a'(0)}{5-0}=\frac{50-100}{5}=-10$

a aceleração média nos primeiros 5 segundos foi 10 m/s

6.5 $a''(t)=-10$

$a''(5)=-10$

a aceleração no instante $t=5$ foi 10 m/s

7. $f(x) = x^3 + ax^2 - 2x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 2$

$f''(x) = 6x - 2a$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 2a = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a}{3}$

logo, $-\frac{a}{3} = 1 \Leftrightarrow a = -3$

9.1 f é contínua em $]-\infty, 2[$, porque é a soma de uma função de expoente racional com uma constante

f é contínua em $]2, 5[$ porque é uma função racional, não definida em $x=1$ e $x=5$.

f é contínua em $]5, +\infty[$ por se tratar de uma função racional não definida em $x=-4 \vee x=4$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(\sqrt{2-x} + \frac{4}{3} \right) = \frac{4}{3} = f(2)$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{-2x}{(x-1)(x-5)} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

f é contínua em $x=2$

$$\lim_{x\to5^-} f(x) = \lim_{x\to5^-} \frac{-2x}{(x-1)(x-5)} = \frac{-10}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to5^+} f(x) = \lim_{x\to5^+} \frac{x}{x^2-16} = \frac{5}{9} = f(5)$$

como $\lim_{x\to5^-} f(x) \neq \lim_{x\to5^+} f(x)$

a função não é contínua em $x=5$

Portanto f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{5\}$

9.3 $f(x) = x^3 \Leftrightarrow f(x) - x^3 = 0$

Seja $g(x) = f(x) - x^3$

como f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{5\}$

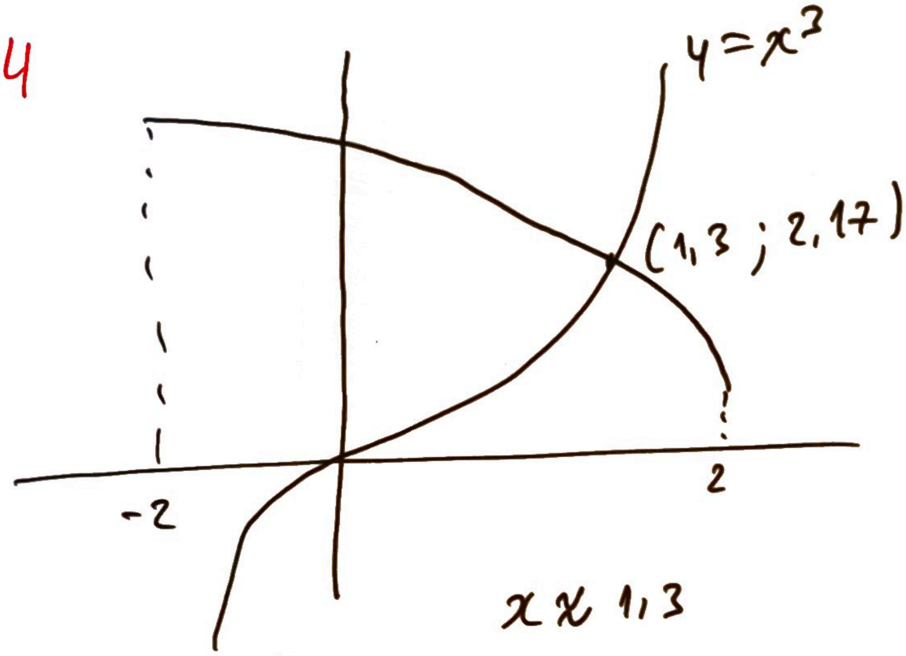
em particular f é contínua em $[-2,2]$, assim g é contínua em $[-2,2]$ por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.

$$g(-2) = f(-2) - (-2)^3 = \frac{34}{3}$$

$$g(2) = f(2) - 2^3 = -\frac{20}{3}$$

$g(-2)\times g(2) < 0$, então pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, a função g tem pelo menos um zero no intervalo $]-2,2[$, isto é, $f(x) = x^3$ tem uma solução em $]-2,2[$

9.4



$x \approx 1,3$

9.5 $x \in \,]5,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{x^2-16-x\cdot 2x}{(x^2-16)^2}=\frac{-x^2-16}{(x^2-16)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2-16)^{\cancel{2}}-(-x^2-16)\,2\cancel{(x^2-16)}\,2x}{(x^2-16)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{-2x(x^2-16)+(x^2+16)4x}{(x^2-16)^3}$$

$$=\frac{2x^3+96x}{(x^2-16)^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x+96x=0 \wedge (x^2-16)^3\neq 0$

$\Leftrightarrow x(2x^2+96)=0 \wedge x\neq \pm 4$

$\Leftrightarrow x=0 \vee \underbrace{2x^2+96=0}_{\text{Impossível}}$

$\Leftrightarrow x=0 \quad (0 \notin \,]5,+\infty[$

$f''(x)>0,\ \forall x\in\,]5,+\infty[$ f tem a concavidade voltada para cima

10. Pelo Teorema de Pitágoras

$4^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 16 = 2\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 8$

$\overline{BC}^2 = \overline{OC}^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{OC}^2 = 8 - 4 \Leftrightarrow \overline{OC}^2 = 4$

$\overline{OC} = 2$

Assim a reta BC contém os pontos de coordenadas $(0,2)$ e $(2,0)$

$m = \frac{2-0}{0-2} = -1$

a equação da reta BC é $y = -x + 2$

Seja $x \in]0,2[$

O comprimento de cada um dos retângulos que se podem construir nas condições pedidas é $2x$ e a altura é $-x+2$

$A(x) = 2x(-x+2) = -2x^2 + 4x$

$A'(x) = -4x + 4$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		2
A'	nd	+	0	−	nd
A	nd	↗	max	↘	

$\overline{DE} = 2 \times 1 = 2$ e $\overline{EF} = -1 + 2 = 1$

O comprimento é 2 e a altura é 1

11. $P(x, \sqrt{x})$, $x \in \mathbb{R}_0^+$ $\quad A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$$\overline{AP} = \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2} = \sqrt{x^2-3x+\frac{9}{4}+x}$$

$$= \sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}$$

$$\left(\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}\right)' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}}$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}} = 0 \Leftrightarrow x=1 \wedge x^2-2x+\frac{9}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$x^2-2x+\frac{9}{4}=0$
Impossível

x	0		1	$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$
$\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}$	$+$	$+$	$+$	$+$
		$-$	0	$+$
		$\searrow$	min	$\nearrow$

A distância de P a A é mínima quando $P(1,1)$

12. Seja $x \in]0,2[$

O comprimento de cada retângulo é $2x$

A condição que define a circunferência é $x^2+y^2=4$

Como $y>0$, então $y=\sqrt{4-x^2}$

a altura de cada retângulo é $\sqrt{4-x^2}$.

A área de cada um dos retângulos é $A(x)=2x\sqrt{4-x^2}$

$$A'(x)=2\sqrt{4-x^2}+2x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=$$

$$=2\sqrt{4-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}}=$$

$$=\frac{2\cdot(4-x^2)-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\frac{8-4x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

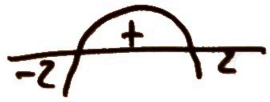
$$A'(x)=0 \Leftrightarrow 8-4x^2=0 \wedge 4-x^2>0$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2}$$

C.A.

$4-x^2=0$

$x=\pm 2$



Como $x \in]0,2[$ então $x=\sqrt{2}$

x	0		$\sqrt{2}$		2
A'	nd	$+$	0	$-$	nd
A	nd	$\nearrow$	max	$\searrow$	nd

$2x = 2\sqrt{2}$

$y = \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$

Assim, o comprimento do retângulo de área máxima é $2\sqrt{2}$ e a sua altura é $\sqrt{2}$

13. Seja r o raio da base e h a altura do cone.

Pelo Teorema de Pitágoras

$(\sqrt{3})^2 = r^2 + h^2 \Leftrightarrow r^2 = 3 - h^2$

Volume do cone é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$

Assim $V(h) = \frac{\pi(3-h^2)}{3} \times h = \frac{\pi}{3}(3h - h^3)$

$V'(h) = \frac{\pi}{3}(3 - 3h^2)$

$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(3 - 3h^2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - 3h^2 = 0$

$\Leftrightarrow h^2 = 1 \Leftrightarrow h = \pm 1$

como $h > 0$ então $h = 1$

x	0		1	$+\infty$
V'	nd	$+$	0	$-$
V	nd	$\nearrow$	máx	$\searrow$

logo a altura do cone de volume máximo é 1.

$r^2 = 3 - 1^2 \Leftrightarrow r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}$, $r>0$

O raio do cone é $\sqrt{2}$ e a altura é 1

$V = \frac{1}{3} \times \pi \cdot (\sqrt{2})^2 \times 1 = \frac{2\pi}{3}$

Volume máximo é $\frac{2\pi}{3}$