



1. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $f'(1)$, sendo f definida por:

1.1. $f(x) = \frac{5x-2}{3}$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5x-2}{3} - \frac{5-2}{3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5x-2-3}{3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{3x-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)}{3(x-1)} = \frac{5}{3}$$

1.2. $f(x) = \frac{2x-1}{x}$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(1+h)-1}{1+h} - \frac{2-1}{1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1+2h}{1+h} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+2h-1-h}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1+h} = 1$$

2. Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g nos pontos indicados.

2.1. $g(x) = x^3 - x + 1$, no ponto de abcissa $x = 2$

$$g'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x + 1 - 8 + 2 - 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 6}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 3) = 4 + 4 + 3 = 11$$

Cálculo auxiliares:

	1	0	-1	-6
2		2	4	6
	1	2	3	0

$$x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$$

$(2, g(2))$ é o ponto de tangência, então, $g(2) = 2^3 - 2 + 1 = 7$, $(2, 7)$ pertence à equação reduzida.

Assim, $y = 11x + b \Rightarrow 7 = 22 + b \Leftrightarrow b = -15$

Portanto, $y = 11x - 15$ é a equação reduzida

2.2. $g(x) = \frac{x+2}{x}$, no ponto de ordenada $y=3$

Temos que descobrir a abcissa da função quando $y = 3 \Leftrightarrow g(x) = 3$

$$g(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = 3 \Leftrightarrow x+2 = 3x \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x \neq 0$$

Assim, $(1,3)$ é ponto de tangência

$$g'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1+h+2}{1+h} - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3+h}{1+h} - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3+h-3-3h}{1+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h(1+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{1+h} = \frac{-2}{1+0} = -2$$

$$y = -2x + b \Rightarrow \underset{(1,3)}{3} = -2 + b \Leftrightarrow b = 5$$

Logo, $t = -2x + 5$ é a equação reduzida

3. Observe o gráfico da função h

As retas tangentes à curva nos pontos de abcissa $x = -3$ e $x = 1$ são paralelas ao eixo Ox . Indique se são verdadeiras ou falsas as afirmações:

3.1. $h'(-3) = 0$

Verdadeira, porque a reta tangente à curva no ponto de abcissa $x = -3$ é paralela ao eixo Ox , ou seja, o declive da tangente é igual a zero.

3.2. $h'(2) > 0$

Falsa, porque, por observação do gráfico, todas as tangentes ao gráfico depois do ponto de abcissa $x = 1$, têm declive negativo, logo $h'(2) < 0$

3.3. $h'(4) = 0$

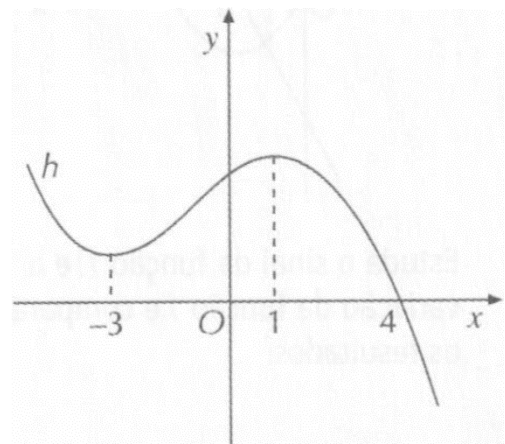
Falsa, justificação análoga à 3.2.

3.4. $h'(-4) < h(-4)$

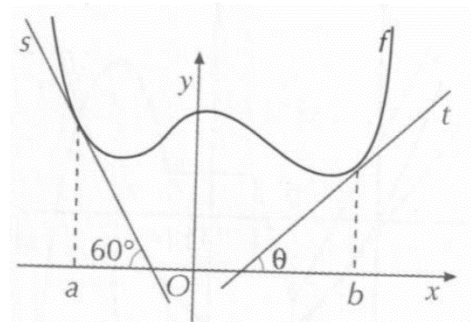
Verdadeira, porque, por observação do gráfico, $h'(-4) < 0$ e $h(-4) > 0$, logo $h'(-4) < h(-4)$

3.5. $h'(1) \times h'(3) < 0$

Falsa, porque, por observação do gráfico, $h'(1) = 0$ e $h'(3) < 0$, logo $h'(1) \times h'(3) = 0$



4. As retas s e t são tangentes ao gráfico de uma função f , respetivamente nos pontos de abcissa a e b , como sugere a figura.



- 4.1. Indique o valor de $f'(a)$

A derivada de f no ponto de abcissa a é igual ao declive da reta tangente, ou seja, $f'(a) = m$ e

$$m = \tan \alpha \Leftrightarrow m = \tan(180^\circ - 60^\circ) \Leftrightarrow m = \tan(120^\circ) \Leftrightarrow m = -\sqrt{3}$$

Logo $f'(a) = -\sqrt{3}$

- 4.2. Se $f'(b) = 0,8$, determine o valor de θ , aproximado às centésimas de grau

Seja $f'(b) = 0,8 \Rightarrow m = 0,8 \Leftrightarrow \tan \theta = 0,8 \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}(0,8) \Leftrightarrow \theta \approx 38,66$

5. Observa a figura. As retas r , s e t são tangentes ao gráfico da função f que se encontra representado graficamente.

A reta r é paralela ao eixo Ox . Complete:

- 5.1. $f'(2)$

$$f'(2) = \tan(120^\circ) = -\sqrt{3}$$

- 5.2. $f'(8)$

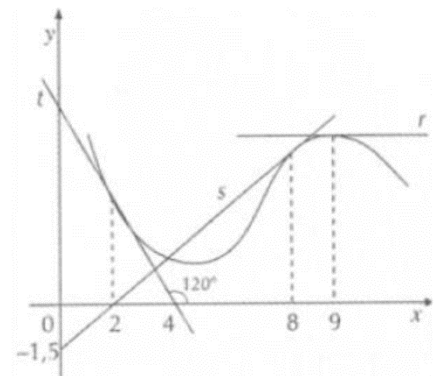
$f'(8)$ é igual ao declive da reta s

$$m_s = \frac{-\frac{3}{2} - 0}{0 - 2} = \frac{3}{4}$$

$$f'(8) = \frac{3}{4}$$

- 5.3. $f'(9)$

O declive da reta r é igual a zero, logo $f'(9) = 0$



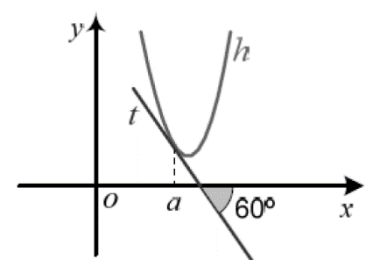
6. A reta t é tangente ao gráfico da função h que se encontra representada graficamente no referencial da figura.

O valor de $h'(a)$, derivada de h no ponto de abcissa a , é:

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$
 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

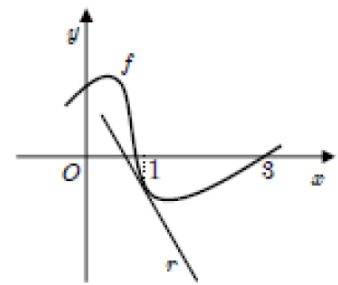
$$h'(a) = \tan(180^\circ - 60^\circ) = \tan(120^\circ) = -\sqrt{3}$$

OPÇÃO: B



7. Na figura estão representados:

- parte do gráfico de uma função f , derivável em \mathbb{R} ;
- uma reta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1



Qual pode ser o valor de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$?

- (A) 1 (B) $f(0)$ (C) $f(3)$ (D) $\frac{1}{f(1)}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ é a derivada da função no ponto de abcissa 1, ou seja, é o declive da reta r

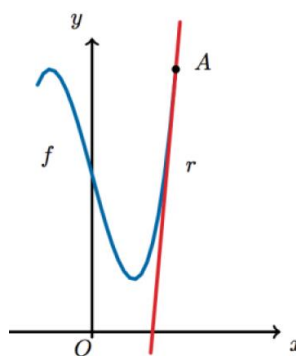
Logo, por observação do gráfico, o declive da reta r é negativo.

Assim, como $1 > 0$, $f(0) > 0$ e $f(3) = 0$ temos que (A), (B) e (C) não são opções possíveis.

Como $f(1) < 0$ então $\frac{1}{f(1)} < 0$, logo a opção (D) pode ser um valor possível

OPÇÃO: D

8. Na figura ao lado está representada, num referencial o.n. Oxy , parte do gráfico de uma função f , contínua de domínio \mathbb{R} . Tal como a figura sugere a reta r de equação $y = 5x - 5$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $A(2,5)$



Qual o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - f^2(2)}{x - 2}$?

- (A) 50 (B) 25 (C) 20 (D) 10

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - f^2(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - f(2))(f(x) + f(2))}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \underbrace{\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}}_{\substack{\text{Por definição de derivada} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \text{ é igual ao} \\ \text{declive da reta tangente.}}} \times \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + f(2)) =$$

$$= 5 \times (f(2) + f(2)) = 5 \times (5 + 5) = 50$$

OPÇÃO: A

9. Seja f uma função real de variável real da qual se sabe que a reta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa 3 tem inclinação 45°

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{9 - x^2}$

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $-\frac{1}{6}$ (C) 1 (D) -1

Como a reta tangente ao gráfico tem inclinação de 45° , então, $m = \tan(45^\circ) = 1$, e como a reta é tangente ao gráfico no ponto de abcissa 3, significa que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{9 - x^2} &= \lim_{h \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(3-x)(3+x)} = \lim_{h \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{3-x} \times \frac{1}{x+3} = \lim_{h \rightarrow 3} \underbrace{\frac{f(x) - f(3)}{-(x-3)}}_{\text{Definição de derivada}} \times \lim_{h \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \\ &= -1 \times \frac{1}{3+3} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

OPÇÃO: B

10. Seja f uma função cuja derivada no ponto de abcissa 2 é igual a 3. Indique o valor de

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^3 + x^2 - 6x}$$

- (A) 3 (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{3}{10}$ (D) não existe

Temos que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$, então

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^3 + x^2 - 6x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x^2 + x - 6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x+3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x(x+3)} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \\ &= \frac{1}{10} \times 3 = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares: $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$

OPÇÃO: C

11. Seja f uma função tal que $f'(3) = 2$. Então, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - x - 6}$ é:

- (A) 2 (B) $\frac{2}{5}$ (C) 1 (D) 0

Temos $f'(3) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$, então

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{2}{5}$$

Cálculos auxiliares: $x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

OPÇÃO: B