NÚMEROS COMPLEXOS – OPERAÇÕES – 1 **Resolução**

1. Determina os valores reais de p e q de modo que $(p+3i)(4+qi)=15+9i$

$$(p+3i)(4+qi)=15+9i \Leftrightarrow 4p-3q+(12+pq)i=15+9i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4p-3q=15 \\ 12+pq=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=\dfrac{15+3q}{4} \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 12+\dfrac{15+3q}{4}\times q=9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 48+15q+3q^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ 3q^2+15q+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ q=-1 \vee q=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=3 \vee q=\dfrac{3}{4} \\ q=-1 \vee q=-4 \end{cases}$$

$$(p=3 \wedge q=-1) \vee \left(p=\frac{3}{4} \wedge q=-4\right)$$

2. Calcula na forma $a+bi$, com $a,b \in \mathbb{R}$

2.1. $\left(\sqrt{3}-3i\right)^2$

$$\left(\sqrt{3}-3i\right)^2=3-6\sqrt{3}i+(3i)^2=3-6\sqrt{3}i-9=-6-6\sqrt{3}i$$

2.2. $(4+2i)^3$

$$(4+2i)^3={}^3C_0\times 4^3\times(2i)^0+{}^3C_1\times 4^2\times(2i)^1+{}^3C_2\times 4^1\times(2i)^2+$$
$$+{}^3C_3\times 4^0\times(2i)^3=$$
$$=64+3\times 16\times 2i+3\times 4\times 4i^2+8i^3=$$
$$=64+96i-48-8i=16+88i$$

3. Determina o número natural n, tal que $(2i)^n+(1+i)^{2n}=64i$

$$(2i)^n+(1+i)^{2n}=64i \Leftrightarrow (2i)^n+\left((1+i)^2\right)^n=64i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2i)^n+(1+2i-1)^n=64i \Leftrightarrow (2i)^n+(2i)^n=64i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\times(2i)^n=64i \Leftrightarrow 2\times 2^n\times i^n=64i \Leftrightarrow 2^{n+1}\times i^n=64i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{n+1}=64 \\ i^n=i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1=6 \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=5 \\ i^5=i \end{cases}$$

Assim, $n=5$.

4. Apresenta na forma algébrica o conjugado de:

4.1. $3-2i$

$$\overline{3-2i}=3+2i$$

4.2. $(2-i)(1-3i)$

$(2-i)(1-3i) = 2-3-(1+6)i = -1-7i$
$\bar{z} = -1+7i$

4.3. $i(3-i^{11}) - 2(\overline{1+2i})$

$z = i(3-i^{11}) - 2(\overline{1+2i}) = i(3+i) - 2(1-2i) =$
$= 3i + i^2 - 2 + 4i = 3i - 1 - 2 + 4i = -3 + 7i$
$\bar{z} = -3 - 7i$

5. A diferença entre um complexo e o seu conjugado é $4i$ e a soma entre eles é 10.

Determina o complexo na forma algébrica.

Seja $z = a + bi$ o complexo. $\bar{z} = a - bi$
Sabe-se que: $z - \bar{z} = 4i$ e $z + \bar{z} = 10$
Então:
$z - \bar{z} = 4i \Leftrightarrow a + bi - a + bi = 4i \Leftrightarrow 2bi = 4i \Leftrightarrow 2b = 4 \Leftrightarrow b = 2$
$z + \bar{z} = 10 \Leftrightarrow 4 + bi + a - bi = 10 \Leftrightarrow 2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$
$z = 5 + 2i$

6. Determina $|z|$ para:

6.1. $z = 2 - i$

$|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

6.2. $z = -5$

$|z| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

6.3. $z = \frac{1}{2}i$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

7. A soma de dois números complexos conjugados é 16 e a soma dos seus módulos é 20.

Determina-os

Seja $z = a + bi$ $\quad \bar{z} = a - bi$ $\quad |z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z + \bar{z} = 16 \Leftrightarrow a + bi + a - bi = 16 \Leftrightarrow 2a = 16 \Leftrightarrow a = 8$

$|z| + |\bar{z}| = |z| + |z| = 20 \Leftrightarrow |z| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{64 + b^2} = 10 \Leftrightarrow 64 + b^2 = 100 \Leftrightarrow b^2 = 36 \Leftrightarrow b = \pm 6$

$z = 8 - 6i$ e $\bar{z} = 8 + 6i$

8. Seja $z = 2 - 3i$

Determina a área e o perímetro do triângulo $[OAB]$ em que O é a origem do referencial, A o afixo de z e B o afixo de $\bar{z}$.

$z = 2 - 3i$

$\bar{z} = 2 + 3i$

$\overline{AB} = |z - \bar{z}| = |2 - 3i - 2 - 3i| =$

$= |-6i| = 6$

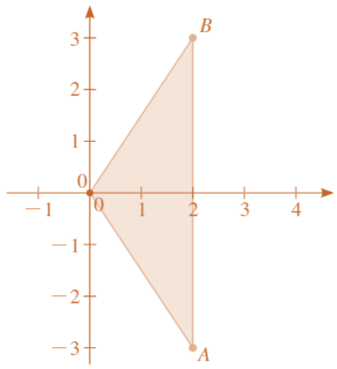
$\overline{AO} = \overline{BO} = |z| = |\bar{z}| = \sqrt{2^2 + 3^2} =$

$= \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$A_{[OAB]} = \dfrac{6 \times 2}{2} = 6$

$P_{[OAB]} = \overline{AO} + \overline{BO} + \overline{AB} =$

$= 2 \times \sqrt{13} + 6 = 2\sqrt{13} + 6$



9. Sejam z e w dois números complexos não nulos.

Sejam A e B os afixos de z e w , respetivamente.

Seja O a origem do referencial.

Supondo que B pertence à mediatriz do segmento de reta $[OA]$, prova que:

$$|z|^2 = 2Re(zw)$$

Como B pertence à mediatriz do segmento $[OA]$, então, $\overline{OB} = \overline{BA}$.

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$

$\overline{OB} = \overline{BA} \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c^2 + d^2 = c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2bd + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2ac + 2bd$

$|z|^2 = |a + bi|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 = 2ac + 2bd$

Por outro lado,

$zw = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - db = ac - db + (ad + bc)i$

$2Re(zw) = 2 \times (ac - db) = 2ac - 2bd$

10. Calcula e apresenta na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$:

10.1. $\frac{3+i}{2-3i}$

$$\frac{3+i}{2-3i} = \frac{(3+i)(2+3i)}{4+9} = \frac{6+9i+2i-3}{13} = \frac{3}{13} + \frac{11}{13}i$$

10.2. $\frac{1-i+i^{11}}{1+i}$

$$\frac{1-i+i^{11}}{i+1} = \frac{1-i+i^3}{i+1} = \frac{(1-2i)}{i+1} \times \frac{1-i}{1-i} =$$
$$= \frac{1-i-2i-2}{1+1} = \frac{-1-3i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

10.3. $\frac{3-i}{i(4+i)} - \frac{i^3(4-i)}{3-i}$

$$\frac{3-i}{i(4+i)} - \frac{i^3(4-i)}{3-i} = \frac{3-i}{4i-1} - \frac{-4i-1}{3-i} = \frac{3-i}{4i-1} + \frac{4i+1}{3-i} =$$
$$= \frac{(3-i)(4i+1)}{-16-1} + \frac{(4i+1)(3+i)}{9+1} =$$
$$= \frac{12i+3+4-i}{-17} + \frac{12i-4+3+i}{10} =$$
$$= \frac{-7-11i}{17} + \frac{-1+13i}{10} = -\frac{87}{170} + \frac{111}{170}i$$

11. Determina o conjunto dos números complexos z, tais que

$$w = \frac{2z-i}{2+iz}$$

é um número real.

Sugestão: *recorda que* $w = \bar{w}$

Seja $w = \frac{2z-i}{2+iz}$, então, w é real se $w = \overline{w}$.

Como $\overline{w} = \frac{2\overline{z}+i}{2-i\overline{z}}$, a igualdade é equivalente a $5z - 5\overline{z} = 4i|z|^2 + 4i$.

Se $z = x + yi$, a equação anterior é equivalente a $x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$,

que representa uma circunferência de centro em $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ e raio $\frac{3}{4}$.

12. Seja z um número complexo, tal que $|z| = 1$

Mostra que $\left|\frac{1}{z} + 1\right|^2 + \left|\frac{1}{z} - 1\right|^2 = 4$

Seja $z = a + bi$

Como $|z| = 1$ tem-se que $a^2 + b^2 = 1$

$\left|\frac{1}{\bar{z}} + 1\right|^2 = \left|\frac{z}{z\bar{z}} + 1\right|^2 = \left|\frac{z}{|z|^2} + 1\right|^2 = |z + 1|^2 = (a + 1)^2 + b^2$

Analogamente: $\left|\frac{1}{\bar{z}} - 1\right|^2 = (a - 1)^2 + b^2$

Então: $(a + 1)^2 + b^2 + (a - 1)^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2) + 2 = 2 \times 1 + 2 = 4$

13. Resolve, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações, apresentando o resultado na forma algébrica:

13.1. $z^2 + 4 = 0$

$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow z = -2i \vee z = 2i$

C.S. $= \{-2i, 2i\}$

13.2. $z^3 + 2z = 0$

$z^3 + 2z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = -2 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \pm\sqrt{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = -\sqrt{2}i \vee z = \sqrt{2}i$

C.S. $= \{-\sqrt{2}i, 0, \sqrt{2}i\}$

13.3. $(3 - i)z = 2 + 3i$

$(3 - i)z = 2 + 3i \Leftrightarrow z = \frac{2 + 3i}{3 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(2 + 3i)(3 + i)}{9 + 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{6 + 2i + 9i - 3}{10} \Leftrightarrow z = \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$

C.S. $= \left\{\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i\right\}$

13.4. $z + i\bar{z} = 1 - 4i$

$z + i\bar{z} = 1 - 4i$

Seja $z = x + yi$, com x, $y \in \mathbb{R}$.

$(x + yi) + i(x - yi) = 1 - 4i \Leftrightarrow x + yi + xi + y = 1 - 4i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + y) + (x + y)i = 1 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -4 \end{cases}$ Impossível

C.S. $= \varnothing$

13.5. $\frac{z+2i}{1-z} = -i + 1$

$\frac{z + 2i}{1 - z} = -i + 1 \Leftrightarrow \frac{z + 2i}{1 - z} = \frac{(-i + 1)(1 - z)}{1 - z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z + 2i = (-i + 1)(1 - z) \Leftrightarrow z + 2i = -i + zi + 1 - z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2z - zi = -3i + 1 \Leftrightarrow z(2 - i) = -3i + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{-3i + 1}{2 - i} \Leftrightarrow z = \frac{(-3i + 1)(2 + i)}{4 + 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{-6i + 3 + 2 + i}{5} \Leftrightarrow z = \frac{5 - 5i}{5} \Leftrightarrow z = 1 - i$

C.S. $= \{1 - i\}$

13.6. $(1 - 2i)z - i\bar{z} = 2$

$(1-2i)z - i\bar{z} = 2$

Seja $z = x + yi$, com x, $y \in \mathbb{R}$.

$(1-2i)(x+yi) - i(x-yi) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + yi - 2xi + 2y - ix - y = 2 \Leftrightarrow x + y + (-3x + y)i = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ -3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3x = 2 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

C.S. $= \left\{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right\}$

14. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considera a equação $z^3 - z + 6 = 0$

Sabendo ques esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número real -2, e que os afixos dessas três soluções são vértices de um triângulo, determina o perímetro desse triângulo,

Como -2 é zero do polinómio $z^3 - z + 6$, então, este é divisível por $z + 2$.

Aplicando a regra de Ruffini, tem-se:

	1	0	-1	6
-2		-2	4	-6
	1	-2	3	0

Então: $z^3 - z + 6 = (z+2)(z^2 - 2z + 3)$

$z^2 - 2z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}\,i}{2} \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{2}i$

C.S. $= \left\{-2, 1 - \sqrt{2}i, 1 + \sqrt{2}i\right\}$

Sejam A, B e C os vértices do triângulo, afixos de $-2, 1 - \sqrt{2}\,i$ e $1 + \sqrt{2}\,i$, respetivamente:

$\overline{AB} = |-2 - 1 + \sqrt{2}\,i| = |-3 + \sqrt{2}\,i| = \sqrt{9 + 2} = \sqrt{11}$

$\overline{AC} = |-2 - 1 + \sqrt{2}\,i| = |-3 - \sqrt{2}\,i| = \sqrt{9 + 2} = \sqrt{11}$

$\overline{BC} = |1 - \sqrt{2}\,i - 1 - \sqrt{2}\,i| = |-2\sqrt{2}\,i| = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$

$P_{[ABC]} = 2\sqrt{11} + 2\sqrt{2}$