1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número $z_1 = (2-2i)^3$.

Sem recorrer à calculadora, escreva o número complexo z_1 na forma trigonométrica.

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -1+\sqrt{3}i$

2.1. Determine os números b e c para os quais z_1 é raiz do polinómio x^2+bx+c

2.2. Seja $z_2 = e^{i\alpha}$

Calcule o valor de α, pertencente ao intervalo $[-\pi, \pi[$, para o qual $\frac{z_1}{z_2}$ é um número inaginário puro de coeficiente negativo.

3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $w = \frac{\sqrt{2}i-\sqrt{2}}{-\sqrt{3}-i}$.

3.1. Sem recorrer à calculadora, mostre que $w = e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

3.2. Calcule o valor exato de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Sugestão: Comece por escrever w na forma algébrica, determinar os valores exatos de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ e $\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ e justificar que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}$

3.3. Determine o menor valor de $n \in IN$ para o qual o afixo de w^n, no plano complexo, se situa cobre o semieixo positivo Ox

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam os números:

$$z_1 = \sum_{k=0}^{30}\left(2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)}\right) \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{i^{74}-2i^{11}}{i-3}$$

4.1. Mostre que $z_1 = \sqrt{3}+i$

4.2. Escreva z_2 na forma trigonométrica

4.3. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $w^3 \times \overline{w} = {z_2}^4$. Apresente as soluções na forma algébrica.

5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam os números:

$$z_1 = 1 + 2ie^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{e} \quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

5.1. Determine, sem recorrer à calculadora, o número complexo $w = \frac{z_1}{z_2}$

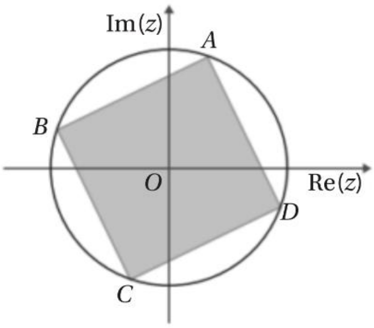
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

5.2. Considere o complexo $z = \overline{z_2}$

No plano complexo, sejam A e B os afixos de z e de z_2, respetivamente.

Determine o valor exato da medida do perímetro do triângulo $[AOB]$, em que O é a origem do referencial.

6. Considere o quadrado $[ABCD]$ cujo centro é a origem O do referencial o.n. representado ao lado.



Sabe-se que o ponto A é o afixo do número complexo $z_1 = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$

6.1. Determine as coordenadas dos restantes vértices do quadrado $[ABCD]$

6.2. Determine a medida da área da região do plano interior à circunferência circunscrita ao quadrado $[ABCD]$ e exterior ao mesmo.

7. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos, determine:

$$\frac{(2-i)^2 + 4e^{i\frac{\pi}{2}} + 3\sqrt{3}i}{3e^{i\frac{\pi}{12}}} + 8e^{i\frac{\pi}{4}}$$

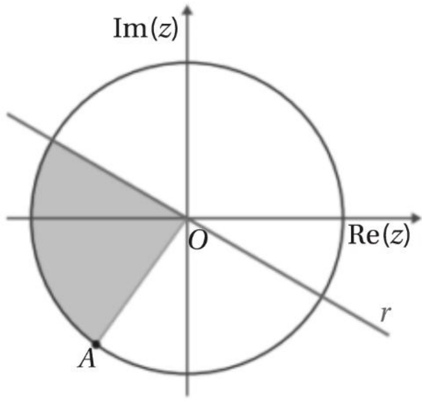
Apresente o resultado na forma algébrica

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números:

$$w_1 = i^{12n-9}\left(20\sqrt{3} - 20i\right) \quad \text{e} \quad w_2 = 2\sqrt[3]{5}e^{i\frac{10\pi}{9}}$$

Mostre que w_2 é uma raiz cúbica de w_1

9. No referencial da figura estão representados:
   - a circunferência de centro na origem O do referencial e raio igual a duas unidades;
   - a reta r que passa pela origem e tem inclinação igual a 150º ;



Mostre que o afixo do número complexo w tal que:

$$w=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{\dfrac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3+2}{-i}}$$

Se situa no interior da circunferência e sobre a reta r

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos.

10.1. Considere $z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e $z_2=3\sqrt{2}e^{i\theta}$, $\theta\in IR$

Determine $\dfrac{\sqrt{2}|z_1|}{z_1}-\dfrac{z_2\times\overline{z_2}}{\sqrt{2}i}$, apresente o resultado na forma algébrica

10.2. Seja $z=e^{i\alpha}$, $\alpha\in IR$

Mostre que $\left|z-z^3\right|=2|\operatorname{sen}\alpha|$, para todo $\alpha\in IR$

11. Em $\mathbb{C}$, conjuntos dos números complexos, considere:

$$z_1=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} \text{ e } z_2=3+4i$$

Determine:

11.1. Calcule $z_1+z_2{}^3$. Apresente o números na forma algébrica.

11.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3=z_1{}^2$

Apresente as soluções na forma trigonométrica.

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = 1 - \sqrt{2}i \quad \text{e} \quad w = \frac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}, \quad b \in IR \quad \text{e} \quad n \in IN$$

Determine:

12.1. O valor de b para o qual w é um imaginário puro.

12.2. Os valores reais de x e y que verificam a condição: $\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x + yi = z_1$

13. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = e^{i\theta}$, com $\theta \in IR$

Mostre que $\operatorname{sen}(n\theta) = \dfrac{w^n - w^{-n}}{2i}$, para todo $\theta \in IR$ e $n \in IN$

14. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \frac{\cos\alpha + i\operatorname{sen}(-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha + i\cos(-\alpha)} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{\left[i^{4n+1} \times \left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5 - 1\right]^2}{2i^{10}}$$

14.1. Prove que z_1 é um imaginário puro de coeficiente negativo.

14.2. Sem utilizar a calculadora prove que $z_2 = z_1$

15. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$w_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad w_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{e} \quad w_3 = \frac{i}{1-i} - i^{24n+2}$$

Determine:

15.1. w_3 na forma trigonométrica, sem recorrer à calculadora.

15.2. O menor valor de $n \in IN$, tal que $\left(i^3 w_2\right)^n + 1 = 0$

15.3. $z = \dfrac{\overline{w_1}}{w_1 + 1}$. Apresente z na forma trigonométrica.

16. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \sqrt{3}+i, \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{5}} \quad \text{e} \quad z_3 = 3+i$$

16.1. Resolva a equação $z^4 + z \times z_1 = 0$. Apresente as soluções na forma trigonométrica.

16.2. Mostre que $\left|z_2 + z_3\right|^2 = 11 + 6\cos\frac{\pi}{5} + 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5}$

16.3. Determine o número complexo $w = \dfrac{1-z_2^{\,10}}{z_1 - i^5}$. Apresente o resultado na forma trigonométrica.

16.4. Determine o menor valor de $n \in IN$ para o qual $\left(z_1 \times z_2\right)^n$ é um número real positivo.

17. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 7+24i$ e $z_2 = i$

17.1. Calcule as raízes quadradas do complexo z_1

17.2. Resolva a equação $z^3 - z^2 i + 16(z-i) = 0,$ sabend que z_2 é solução

18. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = |z_1|e^{i\theta}, \text{ sendo } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\quad , \quad z_2 = |z_2|e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{e} \quad z_3 = 2\sqrt{3}e^{i\beta}, \quad \beta \in IR$$

18.1. Justifique que o afixo $z_1^{\,3}$ não pode pertencer ao terceiro quadrante

18.2. Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{z_3 \times \overline{z_3}}{8} + \left(\dfrac{z_2}{|z_2|}\right)^9$

19. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos considere:

$$z_1 = 1+2i \quad \text{e} \quad z_2 = 4 - \sqrt{3}i + i^{4n+2018}$$

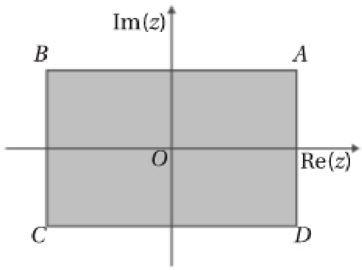
19.1. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $\left(z_1\right)^3 = zi + 2z$

Apresente a(s) solução(ões) na forma algébrica

19.2. Sabe-se que z_2 é uma das raízes cúbicas de um certo complexo w . Determine w .

Apresente o resultado na forma algébrica

20. Na figura está representado, num referencial o.n., o retângulo [$ABCD$] cujo centro é a origem do referencial.



Seja z um número complexo cujo afixo é o ponto A

Admita que o módulo de z é ρ e um argumento de z é θ

Escreva, em função de ρ e θ, na forma trigonométrica, os números complexos cujos afixos são os restantes vértices do retângulo.

21. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{3} - i$ e $z_2 = -2i$

21.1. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $|z| \times z^2 = z_1{}^3$

Apresente as soluções na forma trigonométrica.

21.2. Seja w o inverso de $z_1 \times z_2$

Determine w

Apresente o resultado na forma trigonométrica

22. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $\frac{w}{z_1} = 2 + 2i$

Determine o valor exato do módulo e de um argumento de w

23. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação:

$$\frac{2z + 3i\left(\bar{z} + 2\right)}{1 + i} = 13 + 4i$$

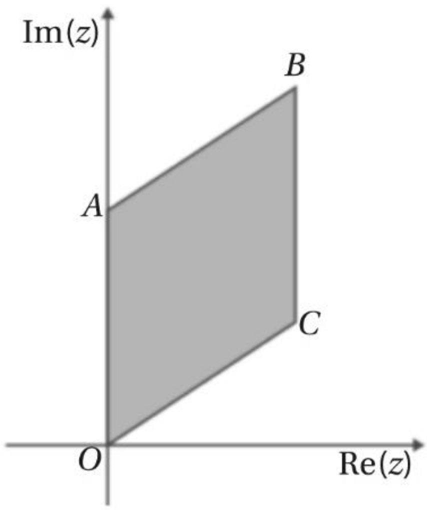
Apresente o resultado na forma algébrica

24. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z + 2i = iz + k,\ \ k \in IR$ e $\frac{w}{z} = 2 + 2i$

Sabendo que $\operatorname{Im}(w) = 8$, determine o valor real de k

25. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, mostre que $|z+w|^2 - |z-\overline{w}|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z)\times \mathrm{Re}(w)$

26. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:



26.1. Determine z e w na forma trigonométrica.

26.2. No referencial o.n. da figura ao lado está representado o quadrilátero $[OABC]$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A é o afixo de z;
- A é o afixo de $z+w$
- C é o afixo de w

Prove que $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1+\sqrt{2}$