Nota: As perguntas assinaladas com ******* são opcionais. Não fazem parte das AE de Matemática A

1. Seja $z = 2 - 3i$. Então:

1.1.

(A) $|z| = -1$ (B) $|z| = 5$ (C) $|z| = \sqrt{5}$ (D) $|z| = \sqrt{13}$

1.2.

(A) $\operatorname{Re}(z) = 2$ (B) $\operatorname{Re}(z) = -3$ (C) $\operatorname{Re}(z) = -2$ (D) $\operatorname{Re}(z) = 3$

1.3.

(A) $\operatorname{Im}(z) = 2$ (B) $\operatorname{Im}(z) = -3$ (C) $\operatorname{Im}(z) = -2$ (D) $\operatorname{Im}(z) = 3$

2. Qual dos seguintes números complexos é um imaginário puro?

(A) 2 (B) $2 + 2i$ (C) $2i$ (D) $2 - 2i$

3. Seja $z = x + yi$ um número complexo. Então:

3.1.

(A) $\overline{z} = x + yi$ (B) $\overline{z} = -x + yi$ (C) $\overline{z} = x - yi$ (D) $\overline{z} = -x - yi$

3.2.

(A) $-z = x + yi$ (B) $-z = -x + yi$ (C) $-z = x - yi$ (D) $-z = -z - yi$

4. Quais são as coordenadas do afixo de $-3 - 2i$ no plano complexo?

(A) $(-3, -2)$ (B) $(-2, -3)$ (C) $(3, 2)$ (D) $(2, 3)$

5. i^4 é igual a:

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-i$

6. i^{41} é igual a:

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-i$

7. i^{4n+2} $(n \in IN)$ é igual a:

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) $-i$

8. Quais são as raízes quadradas de $-2,25$ em $\mathbb{C}$?

(A) $-1,5i$ e $1,5$ (B) $-1,5$ e $1,5i$ (C) $-1,5i$ e $1,5i$ (D) $-1,5$ e $1,5$

9. Qual é o conjunto solução da equação $x^2 + 4 = 0$ em $\mathbb{C}$?

(A) $\{-2, 2\}$ (B) $\{-4, 4\}$ (C) $\{-2i, 2i\}$ (D) $\{-4i, 4i\}$

10. O número i não é solução de qual das seguintes equações em $\mathbb{C}$?

(A) $z^6 = z^{14}$ (B) $z = -\overline{z}$ (C) $\dfrac{z}{z} = 1$ (D) $z \times \overline{z} = 1$

11. Qual das expressões seguintes representa um número real?

(A) $e^{i\frac{\pi}{3}}$ (B) $3e^{i\frac{\pi}{3}}$ (C) $e^{i\frac{\pi}{2}}$ (D) $e^{i\pi}$

12. Qual das expressões seguintes representa um número imaginário puro?

(A) $e^{i\frac{\pi}{3}}$ (B) $3e^{i\frac{\pi}{3}}$ (C) $e^{i\frac{\pi}{2}}$ (D) $e^{i\pi}$

13. Seja $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. Qual é o argumento principal de z ?

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ (B) $-\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{7\pi}{4}$ (D) $-\dfrac{7\pi}{4}$

14. Considere o número complexo $w = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$. Uma das alternativas seguintes apresenta um número complexo igual a w . Qual?

(A) $-2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$ (B) $-2\left(\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3} + i\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$

(C) $3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$ (D) $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{3}\right)$

15. Seja $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

15.1. Então o conjugado de z é:

(A) $-2e^{i\frac{\pi}{3}}$ (B) $2 - e^{i\frac{\pi}{3}}$ (C) $2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ (D) $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

15.2. O simétrico de z é:

(A) $-2e^{i\frac{\pi}{3}}$ (B) $2 - e^{i\frac{\pi}{3}}$ (C) $2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ (D) $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

16. Considere os números complexos $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $w = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$. Então:

16.1. zw é igual a:

(A) $5e^{i\frac{7\pi}{12}}$ (B) $6e^{i\frac{7\pi}{12}}$ (C) $6e^{i\frac{\pi^2}{12}}$ (D) $6e^{i\frac{2\pi^2}{12}}$

16.2. $\dfrac{1}{z}$ é igual a:

(A) $\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ (B) $\dfrac{1}{2}e^{i\frac{3}{\pi}}$ (C) $2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ (D) $\dfrac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

16.3. $\dfrac{z}{w}$ é igual a:

(A) $\dfrac{4}{3}e^{\frac{4\pi}{3}i}$ (B) $\dfrac{2}{3}e^{\frac{\pi}{12}i}$ (C) $-e^{\frac{\pi}{12}i}$ (D) $\dfrac{2}{3}e^{-\frac{\pi}{12}i}$

17. $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ é uma raiz quarta de um número complexo z.

Qual dos seguintes números não é uma raiz quarta de z?

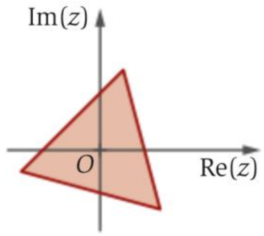
(A) $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ (B) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (C) $2e^{i\frac{11\pi}{6}}$ (D) $2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

18. Em qual das opções seguintes se apresentam duas raízes cúbicas de um mesmo número complexo?

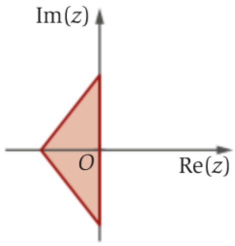
(A) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ e $e^{i\frac{\pi}{3}}$ (B) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ e $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ (C) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ e $e^{i\frac{7\pi}{6}}$ (D) $e^{i\frac{\pi}{6}}$ e $e^{i\frac{11\pi}{6}}$

19. Os vértices de um triângulo são os afixos, no plano complexo, das raízes cúbicas de um número complexo.
Em qual das seguintes figuras pode estar representado esse triângulo?

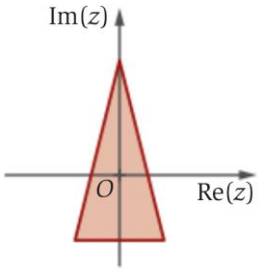
(A)



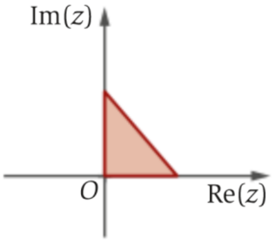
(B)



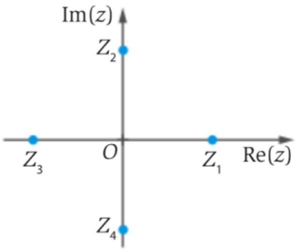
(C)



(D)



20. Seja z um número complexo não nulo. Sabe-se que o afixo de z pertence ao 2.º quadrante e está sobre a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes pares.
Na figura seguinte estão representados os afixos de quatro números complexos.



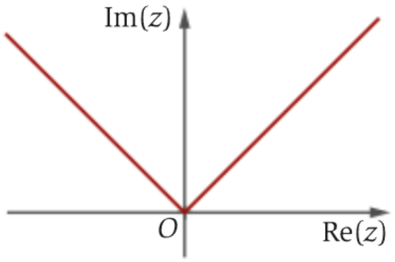
20.1. Qual dos pontos pode ser o afixo de $\frac{z}{\bar{z}}$?

(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

20.2. Qual dos pontos pode ser o afixo de $z \times \bar{z}$

(A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

21. Na figura estão representadas, no plano complexo, as bissetrizes dos 1.º e 2.º quadrantes.



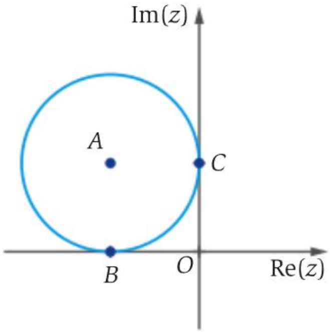
Qual das seguintes condições define o domínio plano referente à reunião das duas bissetrizes?

(A) $Arg(z) = \frac{\pi}{4} \vee Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ (B) $Arg(z) = \frac{\pi}{4} \wedge Arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{4} < Arg(z) < \frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{4} \leq Arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$

22. **

Na figura seguinte estão representados, no plano complexo, os pontos A, B e C, imagens dos números complexos $-1+i$, -1 e i respetivamente. Está também representada a circunferência de centro A e que passa em B e C.



Uma condição em variável complexa que define a circunferência pode ser:

(A) $|z+1| = |z-i|$ (B) $|z-1| = |z+i|$

(C) $|z+1-i| = 1$ (D) $|z-1+i| = 1$

23. **

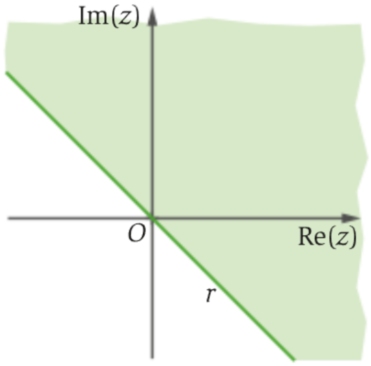
Qual das condições seguintes define o 1.º quadrante no plano complexo?

(A) $\text{Re}(z) > 0 \wedge \text{Im}(z) > 0$ (B) $\text{Re}(z) < 0 \wedge \text{Im}(z) < 0$

(C) $\text{Re}(z) > 0 \wedge \text{Im}(z) < 0$ (D) $\text{Re}(z) < 0 \wedge \text{Im}(z) > 0$

24. **

A reta r , representada na figura seguinte, contém as bissetrizes dos quadrantes pares.



Qual das seguintes condições pode definir o domínio plano que se representa com cor na imagem, incluindo a fronteira?

(A) $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Re}(z)$

(B) $\operatorname{Im}(z) \leq -\operatorname{Re}(z)$

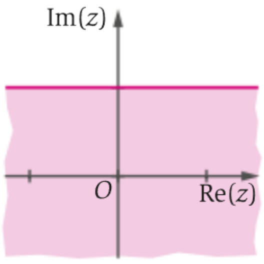
(C) $-\frac{\pi}{4} \leq Arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$

(D) $-\frac{\pi}{4} < Arg(z) < \frac{3\pi}{4}$

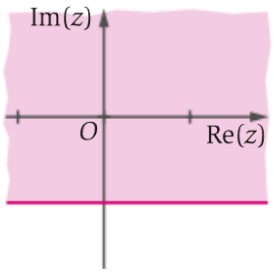
25. **

A condição $|z| \leq 1$ define um conjunto de pontos representados a cor numa das figuras seguintes. Qual?

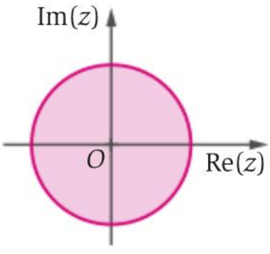
(A)



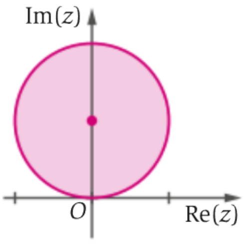
(B)



(C)



(D)



26. Seja $z = -3 + 2i$ um número complexo. Qual é o número complexo cujo afixo é transformado do afixo por uma:

26.1. rotação de centro na origem do referencial e angulo de amplitude $\frac{\pi}{2}$?

(A) $-3 + 2i$ (B) $-2 - 3i$ (C) $-2 + 3i$ (D) $-3 + 2i + \frac{\pi}{2}$

26.2. rotação de centro na origem do referencial e ângulo de amplitude $-\frac{\pi}{2}$ seguida de uma translação de vetor $\vec{u}(1,-1)$?

(A) $-3 - 2i$ (B) $3 + 2i$ (C) $3 - 2i$ (D) $-3 + 2i$

27. Seja $M(a,b)$ o afixo de um número complexo.

Quais são as coordenadas do transformado M por uma translação de vetor $\vec{u}(1,0)$ seguida por uma homotetia de razão 2 ?

(A) $(2a, 2b)$ (B) $(a+1, b+1)$ (B) $(2a+1, 2b+1)$ (D) $(2a+2, 2b)$

28. Considere os números complexos $z_1 = -1+i$ e $z_2 = 2+2i$

28.1. Represente z_1 e z_2 geometricamente

28.2. Escreva z_1 e z_2 na forma trigonométrica

28.3. Calcule $\frac{z_1 + \overline{z_2}}{z_1}$. Apresente o resultado na forma algébrica.

28.4. Calcule $\sqrt[4]{z_2^{\,3}}$ sem recorrer à calculadora. Apresente os resultados na forma trigonométrica.

29. Considere os números complexos definidos como se segue:

$$w_1 = \frac{1}{i} \quad \text{e} \quad w_2 = -\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) - i\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

29.1. Escreva w_1 e w_2 na forma trigonométrica

29.2. Mostre que $\frac{w_1 w_2}{\overline{w_1 w_2}}$ representa um imaginário puro

30. Sejam $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

30.1. Resolva a equação $z + z_1 |z_2| = 0$. Apresente o resultado na forma algébrica.

30.2. **

Represente, no plano complexo, a região definida pela condição

$$|z - z_1| \leq |z - z_2| \wedge |z - z_1| \leq 3$$

31. Sejam $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$ e $z_3 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

31.1. Determine $\frac{z_1 \times z_2 + 1}{z_3}$ sem recorrer à calculadora.

Apresente o resultado na forma algébrica

31.2. **

Represente, no plano complexo, a região definida pela condição

$$|z - z_1| \leq \sqrt{2} \wedge \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z_3)$$

32. Considere o número complexo $w = -2i$

32.1. Resolva a equação $z\left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = w + 1$ sem recorrer à calculadora.

Apresente o resultado na forma algébrica

32.2. No plano complexo, um dos vértices de um losango, com centro na origem do referencial, de perímetro $4\sqrt{5}$ é o afixo do número complexo $-2i$

Determine os números complexos cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango.

33. Calcule as raízes cúbicas de $\left(1 + \sqrt{3}i\right)^2$

34. Seja z_1 um número complexo, tal que

$$z_1 = i + \frac{3i + 1 - \sqrt{3}}{i}$$

Escreva z_1 na forma trigonométrica.

35. Seja $z = a + \sqrt{2}i$, com $a \in IR$. Mostre que $\dfrac{1-\overline{z}}{\overline{z}}$ não é um número real.

36. Seja $z_1 = 5i - 2$ um número complexo.

Resolva a equação $z + z_1 = -2$

Apresenta os elementos do conjunto solução na forma trigonométrica.

37. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $\dfrac{z_4}{4} - \sqrt{2}(1+i)z = 0$

Apresente os elementos do conjunto solução na forma trigonométrica.

38. Determine a parte real e a parte imaginária dos seguintes números complexos:

38.1. $-i(3+2i)^2$ **38.2.** $\dfrac{1}{1+3i}$ **38.3** $\dfrac{3+5i}{1+7i}$ **38.4** i^{191}

38.5. $\left(1-\sqrt{2}i\right)^3$

39. Determine o conjunto dos números complexos z tais que $\dfrac{z-1-i}{z+1+i}$ é um imaginário puro.

40. Considere os números naturais a , b , c e d , com $ac - bd \neq 0$

40.1. Determine números naturais α e β tais que $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = \left(\alpha^2+\beta^2\right)$

Sugestão: utilize a igualdade, para números complexos z e z' , $|zz'| = |z||z'|$

40.2. Utilize o resultado da alínea anterior e as igualdades $90 = 81 + 9$ e $68 = 64 + 4$, para escrever o número 6120 como soma dois quadrados.

41. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos:

41.1. $(1-i)^3$ **41.2.** $\left(1-i\sqrt{3}\right)^5$ **41.3.** $i\dfrac{(1-i)^2}{1+i\sqrt{3}}$

42. Apresente na forma algébrica o número complexo $\dfrac{i\left(1+\sqrt{3}i\right)^4}{\left(-1+i\right)^9}$

43. Considere o número complexo $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Calcule z^2 e deduza uma representação de z na forma trigonométrica

44. Seja $w = re^{i\theta}$ um número complexo, sendo, para $n \in IN$, $\theta \neq \dfrac{k\pi}{n}$ ou $\theta \neq \dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}$, para $k \in \mathbb{Z}$

Mostre que $\dfrac{w^n+\overline{w}^n}{w^n-\overline{w}^n}$ é um imaginário puro, seja qual for o número natural n

45. Seja $w = -\left(\dfrac{1}{i}\right)^{25} + \left(1-2i\right)^2$. Mostre que $\overline{w} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

46. Dado $\alpha \in IR$, considere um número complexo z tal que $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\alpha$

Mostre que, para todo o número natural n, $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos\left(n\alpha\right)$

47. Seja w um número complexo não nulo.

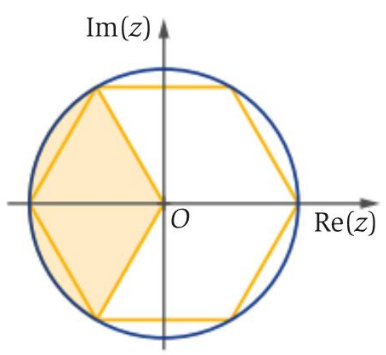
Mostre que o afixo do número complexo definido por $z=\left(w+\overline{w}\right)^2-\left(w-\overline{w}\right)^2$ pertence ao semieixo real positivo.

48. Considere o número $w = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$

48.1. Mostre que $w^2 \times e^{i\frac{4\pi}{3}}$ é um número real.

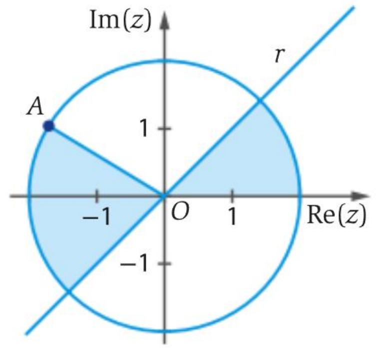
48.2. **

O afixo de w é um dos vértices de um hexágono regular, com centro na origem do referencial representado na figura ao lado. Defina, por meio de um condição em $\mathbb{C}$, a região sombreada, incluindo a fronteira.



49. Na figura ao lado estão representadas:

- a circunferência de centro na origem do referencial e raio 2 ;
- a reta r , que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares;
- o ponto A é o afixo de uma das raízes cúbicas de $8i$



49.1. Mostre que o afixo do número complexo $w = \dfrac{(1+i)^4}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$ se situa no interior da circunferência e pertence à reta r .

49.2. **

Defina, por uma condição em $\mathbb{C}$, a região sombreada (incluindo a fronteira) .

50. Considere os números complexos z e w , definidos como se segue:

50.1. Determine p , para que $|z \times w| \leq 10$

50.2. Determine t , para que:

a) o afixo de $z \times w$ pertença ao 3.º quadrante

b) $\dfrac{z}{w}$ seja um imaginário puro e $\text{Im}\left(\dfrac{z}{w}\right) < 0$

51. Seja $z = a + bi,\ a, b \in IR$. Considere, no plano de Argand o retângulo formado pelos afixos $z,\ \bar{z},\ -z$ e $-\bar{z}$.

Mostre que a área do retângulo é dada por $4|ab|$.

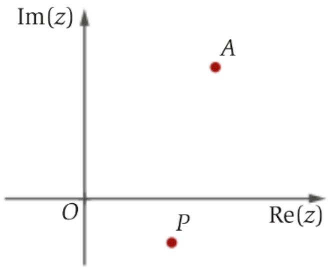
52. Considere os números complexos z e w , tais que $z = 3i,\ \text{Re}(w) > 0,\ \text{Im}(w) < 0$ e $|\text{Im}(w)| < |\text{Im}(z)|$

Indique o quadrante em que se encontra o afixo de:

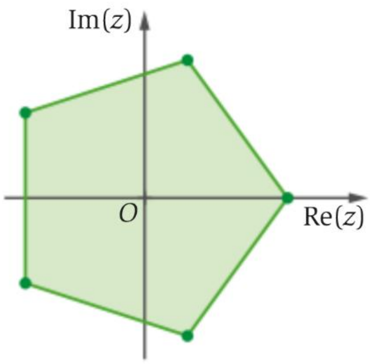
52.1. $z + w$ 52.2. $z - w$ 52.3. $z + \text{Re}(w)$ 52.4. $\bar{z} + w$

53. Na figura ao lado estão representados os pontos A e P, que são afixos dos números complexos $3+3$ e $2-i$ respetivamente.
O ponto A é um vértice de um quadrado, com centro no ponto P.

Determine os números complexos cujos afixos são os restantes vértices do quadrado. Escreva-os na forma algébrica.



54. Na figura ao lado está representado um pentágono regular, com centro na origem do referencial.
Um dos vértices do pentágono é um ponto do semieixo real positivo, imagem geométrica do número complexo $z=3$



54.1. Escreva, na forma trigonométrica, os números complexos, cujos afixos são os vértices do pentágono.

54.2. **
Defina, por uma condição em varável complexa, a circunferência que circunscreve o pentágono.

54.3. Considere o número complexo w, cujo afixo é a interseção do semieixo imaginário negativo com um lado do pentágono.
Justifique que o afixo de w^5 pertence ao semieixo imaginário negativo, enquanto a imagem geométrica de w^4 pertence ao semieixo real positivo.

54.4. Os vértices do pentágono são os afixos das raízes de índice n de um número complexo c. Indique o valor de n e determine c.

55. Considere o número complexo $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, cujo afixo é um vértice de um quadrado com centro na origem do referencial.

55.1. Represente o quadrado no plano complexo. Comece por determinar as coordenadas do vértice do correspondente a $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

55.2. Determine os números complexos que definem os outros três vértices do quadrado.
Represente-os na forma trigonométrica e na forma algébrica.

55.3. Determine a medida do lado e medida da diagonal do quadrado.

55.4. Para um qualquer número complexo $z = re^{i\theta}$, apresente na forma trigonométrica os outros números complexos cujos afixos, com afixo de z, sejam os vértices de um quadrado centrado na origem do referencial.

56. Calcule as raízes quadradas do número complexo $-8+6i$

57. Considere os números complexos $z_1 = 2\cos\frac{\pi}{6} - 2i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}$ e $z_2 = 8i$

57.1. Escreva z_1 na forma trigonométrica

57.2. Mostre que z_1 é uma raiz cúbica de z_2

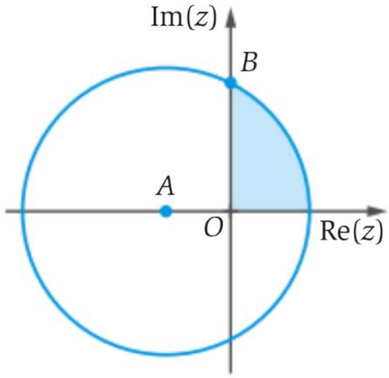
57.3. Seja $z_3 = i^2 z_1$

Escreva $|z_3|$ em função de $|z_1|$ e $Arg(z_3)$ em função de $Arg(z_1)$

58. Justifique que a condição $|z-ai| = |z-a|$ define o mesmo lugar geométrico que a condição $|z+ai| = |z-a|$, com a real.

59. Mostre que $Arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |z| = 1$

60. Na figura seguinte está representada a circunferência de centro no ponto A e raio $\overline{AB}$. A e B são os afixos dos números complexos $e^{i\pi}$ e $e^{i\frac{\pi}{2}}$, respetivamente.



60.1. Mostre que o afixo do número complexo $1+i$ pertence à circunferência

60.2. **
Defina, por uma condição em variável complexa, a região sombreada na figura, incluindo a fronteira.

60.3. Seja C o afico do número complexo $2ie^{i\frac{\pi}{2}}$.
Justifique que C não pertence à circunferência.

61. Considere o número complexo $w=2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

61.1. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $|w|z^3-w=0$

61.2.

61.3. **
Represente graficamente, no plano complexo, o conjunto definido por:

$$|z-w|\leq 2 \wedge -\frac{3\pi}{4}\leq Arg(z-w)\leq -\frac{\pi}{4}$$

62. Considere o conjunto dos números complexos definido como se segue:

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)<0\wedge \operatorname{Re}\left(iz-\frac{1}{2}\right)\geq 1\right\}$$

Mostre que os afixos dos números complexos do conjunto A pertencem a um semiplano.

63. Considere o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.

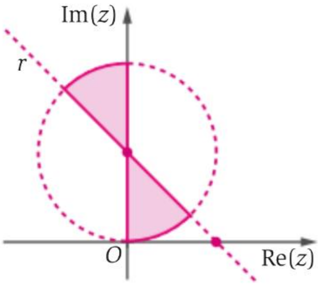
63.1. Seja $w \in \mathbb{C}:\ w = \frac{2}{\sqrt{3}-i} + i^{43}$

Represente w na forma trigonométrica e mostra que w^{12} é um número real.

63.2. ***

Na figura representa-se a figura que passa na origem do referencial e tem centro no afixo de $2i$. Representa-se, também, a reta r, que passa pelo centro da circunferência e interseta o eixo real em 2.

Apresente uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina a região sombreada, incluindo .



64. No plano de Argand, identifique o lugar geométrico dos afixos dos números complexos que satisfazem as condições seguintes:

64.1. $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$

64.2. $\operatorname{Re}(z) = 3$

64.3. $\operatorname{Re}(z) = 0$

64.4. $\operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)$

64.5. $\operatorname{Im}(z) = -2$

64.6. $|z| = 4$

65. ***

Represente as regiões do plano definidas pelas seguintes condições:

65.1. $|z| \leq 2$

65.2. $|z-1-i| = |z+i|$

65.3. $-\pi < Arg(z) < \frac{\pi}{2} \wedge |z+1| \leq 3$

65.4. $0 \leq Arg(z-1) < \frac{\pi}{4} \wedge \left|z - \frac{1}{2}\right| < 2$

65.5. $|z-1| < |z-i|$

65.6. $|z-3-i| \geq |z-i| \wedge \left|z - \frac{1}{2} - i\right| \geq 2$

65.7. $-\frac{\pi}{3} \leq Arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) < \frac{\pi}{3} \vee |z+1-i| \leq 2$

66. Considere os números complexos $z_1 = 3\sqrt{2}(1+i)$, $z_2 = 3\sqrt{2}i$ e $z_3 = 3\sqrt{2}(1-i)$ cujos afixos são, respetivamente, os pontos M_1, M_2 e M_3

66.1. Represente os pontos M_1, M_2 e M_3 no plano complexo

66.2. Mostre que o quadrilátero $[OM_1M_2M_3]$ é um trapézio retângulo

67. Determine o conjunto dos afixos dos números complexos z que verificam a condição $\left|\frac{z-1-i}{z+1+i}\right| = 1$

68. Dado um número complexo z , considere os pontos M_1, M_2 e M_3 , afixos, respetivamente dos números complexos z, z^2 e z^3

68.1. Determine para que valores de z os pontos M_1, M_2 e M_3 são distintos dois a dois

68.2. Determine para que valores de z o triângulo é retângulo em M_2

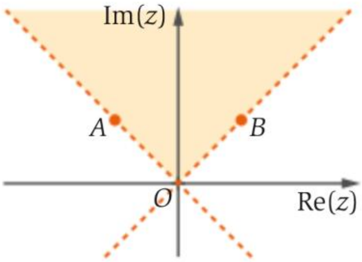
69. Determine o conjunto dos valores do número complexo z para os quais os pontos M_1, M_2 e M_3 , afixos, respetivamente, dos números complexos $1+i$, $1-z$ e $1+iz$ são colineares.

70. Mostre que a condição $|z-2i| = 3|z+3|$ define no plano complexo, uma circunferência de centro no afixo do número complexo $-\frac{27}{8} - \frac{1}{4}i$ e de raio $\frac{\sqrt{117}}{8}$

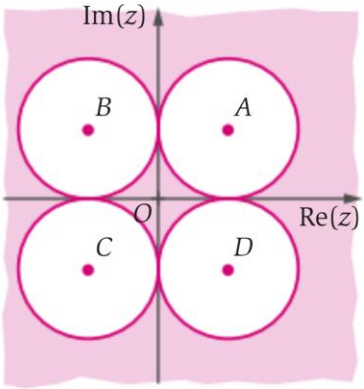
71. ***

Defina por uma condição, em variável complexa, as regiões do plano complexo representadas a sombreado em cada uma das alíneas seguintes, tendo em conta as informações anexas.

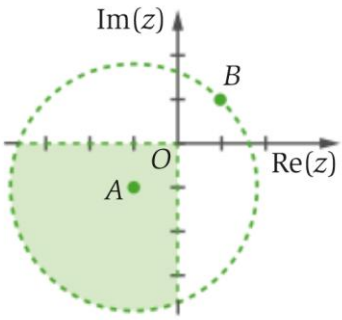
71.1. A e B pertencem às retas que contêm as bissetrizes dos quadrantes



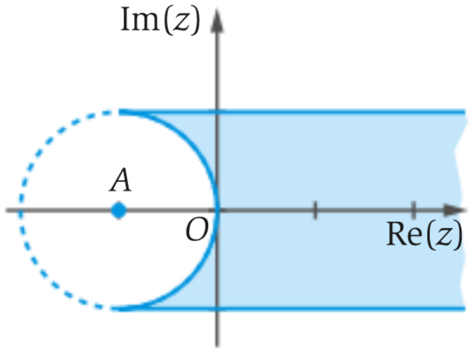
71.2. A , B , C e D são os afixos, respetivamente, dos números complexos $1+i$, $1+i$, $-1-i$ e $1-i$



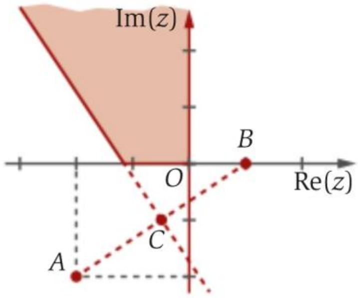
71.3. A e B são os afixos dos números complexos $-1-i$ e $1+i$, respetivamente, a circunferência tem centro em $A(-1,-1)$ e $B(1,1)$



71.4. A é o afixo do número real $a=-1$

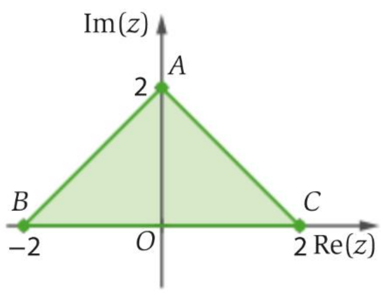


71.5. A e B são os afixos dos números complexos $-2-2i$ e 1. A reta representada é a mediatriz de $[AB]$

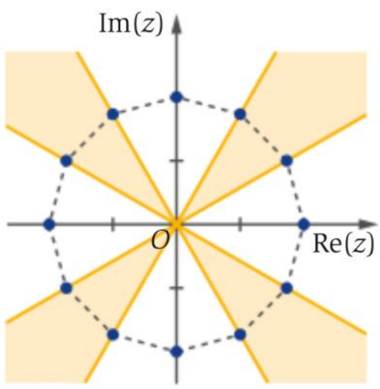


71.6. A, B e C são os afixos dos números complexos a, b e c tais que:

- $a=2i$
- $|a|=|b|$
- $\text{Re}(c)=-\text{Re}(b)$



71.7. Os pontos assinalados na figura são os vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial.



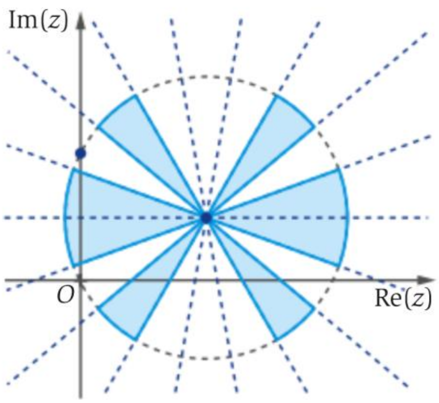
72. Considere um determinado ponto M , afixo de um número complexo z e o ponto A , afixo do número complexo $z_A = 1+i$

72.1. Mostre que o afixo de $i(z-1-i)+1+i$ é a imagem de M pela rotação de centro A e de ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2}$

72.2. Dado $\theta \in IR$, propõe uma expressão para o número complexo cujo afixo é a imagem de M pela rotação de centro A e de ângulo de amplitude θ

73. ***

Na figura seguinte está representada a circunferência de centro no afixo do número complexo $2+i$ e que passa na imagem geométrica do número complexo $2i$



A partir do centro da circunferência, traçaram-se 18 semirretas (duas das quais paralelas ao eixo real) que definiram 18 setores iguais. Sombrearam-se oito desses setores.

73.1. Escreva uma condição, em variável complexa, que defina a circunferência.

73.2. Defina, por uma condição em variável complexa, o conjunto das 18 semirretas, sem usares a conjunção de condições.

73.3. Escreva uma condição em $\mathbb{C}$, defina a região sombreada.

74. Num plano munido de um referencial cartesiano de origem O, considere as seguintes transformações:

- f: rotação de centro O e ângulo de amplitude $-\frac{\pi}{2}$
- g: translação de vetor $\vec{u}(1,2)$
- h: translação de vetor $\vec{v}(-2,1)$

Mostre que $f \circ h = g \circ f$

75. Fixado um plano munido de um referencial ortonormado, considere um pentágono regular inscrito numa circunferência de centro $A(2,2)$

75.1. Sabendo que um dos vértices do pentágono é a origem O, determine as coordenadas dos restantes vértices.

75.2. Indique uma equação cujas soluções sejam os números complexos cujos afixos são os vértices do pentágono.

76. Mostre que $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

Sugestão: Comece por mostrar que a equação $z^7=1$ e tenha em consideração que a soma de todas as raízes é nula.