1. Uma mercearia compra 35% dos seus legumes ao fornecedor A e os restantes ao fornecedor B.

Sabe-se que 9% dos legumes comprados ao fornecedor A estão impróprios para vender e 6% dos legumes comprados ao fornecedor B também estão impróprios para venda. O dono da mercearia pegou num legume ao acaso e verificou que estava em bom estado para ser vendido.

Qual é a probabilidade de esse legume ter sido comprado ao fornecedor B?

Sejam A e B os acontecimentos:

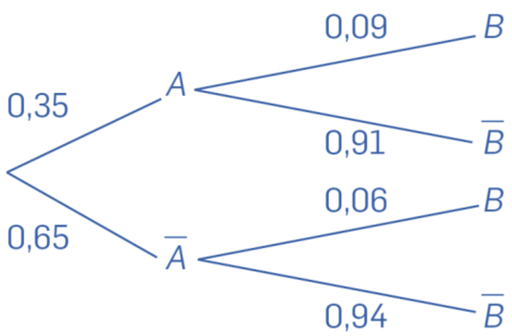
A: "Ser comprado ao fornecedor A."

B: "Estar impróprio para vender."

$P(A) = 0{,}35$

$P(B \mid A) = 0{,}09$

$P(B \mid \overline{A}) = 0{,}06$



$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} =$$

$$= \frac{0{,}65 \times 0{,}94}{0{,}35 \times 0{,}91 + 0{,}65 \times 0{,}84} =$$

$$= \frac{94}{143}$$

2. Sejam E um espaço finito, não vazio, P um probabilidade no conjunto $\wp(E)$ e A, B e C três acontecimentos, nenhum deles impossível, no espaço amostral E.

Mostra que $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|(A \cap B))$.

$$P(A) \times P(B \mid A) \times P(C \mid (A \cap B)) =$$

$$= P(A) \times \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \times \frac{P(C \cap (A \cap B))}{P(A \cap B)} =$$

$$= P(A \cap B) \times \frac{P(C \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} =$$

$$= P(A \cap B \cap C)$$

3. Sejam E um conjunto finito, não vazio, P uma probabilidade no conjunto $\wp(E)$ e A e B dois acontecimentos em E tais que:

- $P(A) = \frac{3}{4}$
- $P(B|A) = \frac{1}{5}$
- $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{4}{7}$

Determina $P(A \cap B), P(A \cup B), P(B)$ e $P(A|B)$

$$P(B \mid A) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{20}$$

$$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{6}{7}$$

$$P(A \cup B) = \frac{6}{7} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{7}$$

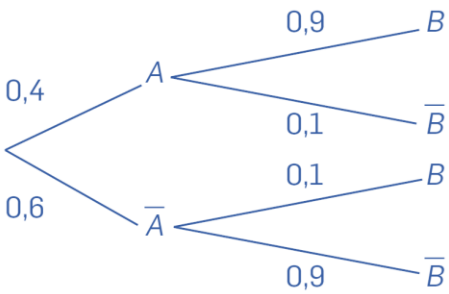
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} + P(B) - \frac{3}{20} = \frac{6}{7}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{36}{140} \Leftrightarrow P(B) = \frac{9}{35}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{35}} = \frac{7}{12}$$

4. O Bernardo e o Frederico estão a jogar *poker* com os amigos. O Bernardo tem um bom jogo e faz uma aposta. A probabilidade do Frederico ter um jogo melhor que o do Bernardo é 0,4. Se o Frederico tiver um jogo melhor, ele vai aumentar a aposta com probabilidade 0,9, mas se isso não acontecer ele não aumenta a aposta.
Se o Frederico aumentar a aposta, qual é a probabilidade de ele ter um jogo melhor que o do Bernardo?

Sejam A e B os acontecimentos:
A: "A Elsa tem um jogo melhor."
B: "A Elsa aumenta a aposta."



$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{0{,}4 \times 0{,}9}{0{,}4 \times 0{,}9 + 0{,}6 \times 0{,}1} =$$

$$= \frac{6}{7}$$

5. Uma fábrica tem três máquinas diferentes, A, B e C, que produzem o mesmo objeto. A máquina A e a máquina B produzem as mesmas quantidades, mas a máquina C produz o dobro da máquina A.

Dos objetos produzidos pelas máquinas A, B e C, 3%, 4% e 5%, respetivamente, apresentam algum defeito.

Sejam A, B, C e D os acontecimentos:

A: "Ser produzido pela máquina A."

B: "Ser produzido pela máquina B."

C: "Ser produzido pela máquina C."

D: "Apresentar defeito."

$P(A) = P(B)$

$P(C) = 2P(A)$

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(A) + 2P(A) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

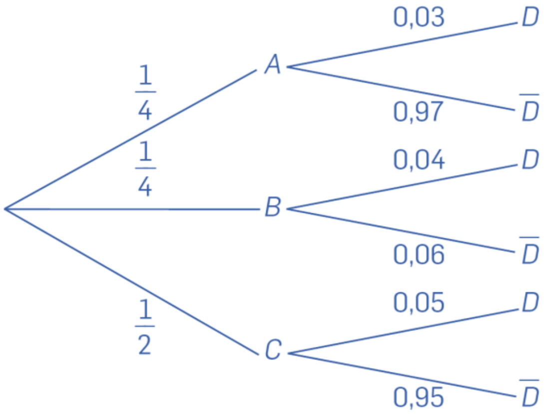
$P(B) = \frac{1}{4}$

$P(C) = \frac{1}{2}$

$P(D \mid A) = 0{,}03$

$P(D \mid B) = 0{,}04$

$P(D \mid C) = 0{,}05$



a) Determina a probabilidade de um objeto produzido por estas máquinas não ter defeitos.

$$P(\overline{D}) = \frac{1}{4} \times 0{,}97 + \frac{1}{4} \times 0{,}96 + \frac{1}{2} \times 0{,}95 = \frac{383}{400}$$

b) Determina a probabilidade de um objeto ter sido produzido pela máquina *A*, se não tiver qualquer defeito.

$$P(A \mid \overline{D}) = \frac{\frac{1}{4} \times 0{,}97}{\frac{1}{4} \times 0{,}97 + \frac{1}{4} \times 0{,}96 + \frac{1}{2} \times 0{,}95} =$$

$$= \frac{97}{383}$$

c) Averigua se os acontecimentos A : "ser produzido pela máquina A" e D : "ter defeito", são independentes.

$$P(D) = \frac{1}{4} \times 0{,}03 + \frac{1}{4} \times 0{,}04 + \frac{1}{2} \times 0{,}05 = \frac{17}{400}$$

$$P(A) \times P(D) = \frac{1}{4} \times \frac{17}{400} = \frac{17}{1600}$$

$$P(A \cap D) = \frac{1}{4} \times 0{,}03 = \frac{3}{400}$$

Como $P(A) \times P(D) \neq P(A \cap D)$, então os acontecimentos A e D não são acontecimentos independentes.

6. De um baralho de cartas, selecionaram-se seis cartas de copas (2, 3, 4, 5, 6, e 7). Retirou-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, três cartas deste conjunto.

Qual é a probabilidade de a carta com o número 2 ser retirada pelo menos uma vez, se a soma dos números saídos tiver sido 10?

7. O André, a Bárbara e a Catarina estão a tirar a carta de condução. A probabilidade de cada um deles passar no exame de condução é $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{3}$, respetivamente.

Determina a probabilidade de:

Sejam A, B e C os acontecimentos:

A: "O André passa no exame de condução."

B: "A Bárbara passa no exame de condução."

C: "A Catarina passa no exame de condução."

a) os três passarem no exame de condução;

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) =$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{4}{9}$$

b) apenas as raparigas passarem no exame de condução;

$$P(\overline{A}\cap B\cap C)=P(\overline{A})\times P(B)\times P(C)=$$
$$=\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}=$$
$$=\frac{1}{9}$$

c) pelo menos um deles passar no exame de condução;

$$1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1-P(\overline{A})\times P(\overline{B})\times P(\overline{C})=$$
$$=1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=$$
$$=\frac{89}{90}$$

d) exatamente dois deles passarem no exame de condução.

$$P(\overline{A}\cap B\cap C)+P(A\cap\overline{B}\cap C)+P(A\cap B\cap\overline{C})=$$
$$=\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}=$$
$$=\frac{19}{45}$$

8. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado duas vezes.

Determina a probabilidade de a soma dos números obtidos ser superior a 7, se:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

a) o primeiro número que saiu foi 4;

$$P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

b) o primeiro número que saiu foi maior que 3;

$$P=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

c) o primeiro número que saiu foi 1;

$$P=0$$

d) o primeiro número que saiu foi menor que 5.

$$P=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

9. Prova, dados um conjunto finito, não vazio, E, uma probabilidade P em $\wp(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \wp(E)$, com $P(A) \neq 0$, que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A) \times P(B|A)$

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) =$$

$$= 1 - P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= 1 - P(A) \times P(B \mid A)$$

10. Dados um conjunto finito, não vazio, E, uma probabilidade P no conjunto $\wp(E)$ e três acontecimentos A, B e $C \in \wp(E)$, com $P(B) > 0$, prova que:

a) $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= 1 - P(A \mid B)$$

b) $P[(A \cup C)|B] = P(A|B) + P(C|B) - P[(A \cap C)|B]$

$$P[(A \cup C) \mid B] =$$

$$= \frac{P[(A \cup C) \cap B)]}{P(B)} =$$

$$= \frac{P[(A \cap B) \cup (C \cap B)]}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B) - P[(A \cap B) \cap (C \cap B)]}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)} - \frac{P[(A \cap C) \cap B)]}{P(B)} =$$

$$= P(A \mid B) + P(C \mid B) - P[(A \cap C) \mid B]$$

11. Seja $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sabe-se que $P(\{a\}) = P(\{b\}) = \frac{1}{8}$ e que os restantes elementos de E são equiprováveis. Sejam A, B e C os acontecimentos $A = \{a, c, d\}$, $B = \{a, c, e\}$ e $c = \{a, d, e\}$. Mostra que $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$, mas os acontecimentos dados não são independentes dois a dois.

$$P(\{a\}) = P(\{b\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(\{c\}) = P(\{d\}) = P(\{e\}) = P(\{f\}) = \frac{1 - 2 \times \frac{1}{8}}{4} = \frac{3}{16}$$

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{a\}) = \frac{1}{8}$$

Logo, $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$.

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(\{a, c\}) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$$

Como $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$, os acontecimentos A e B não são independentes.

$$P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap C) = P(\{a, d\}) =$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{16} =$$
$$= \frac{5}{16}$$

Como $P(A) \times P(C) \neq P(A \cap C)$, os acontecimentos A e C não são independentes.