1. Uma caixa contém quatro bolas brancas e quatro bolas pretas, indistinguíveis ao tato.

Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Considera os seguintes acontecimentos:

B_1 : a bola retirada em primeiro lugar é branca

B_2 : a bola retirada em segundo lugar é branca

Qual o valor de $P(B_2|B_1)$?

$P(B_2|B_1)$ designa a probabilidade de a bola retirada em segundo lugar ser branca, sabendo que a bola retirada em primeiro lugar era branca. Ora, se foi retirada uma bola branca, aquando da segunda extração, restam apenas 7 bolas na caixa, das quais 3 são brancas, os casos possíveis são 7 e os favoráveis são 3, pelo que $P(B_2|B_1) = \frac{3}{7}$.

2. Extrai-se, ao acaso, uma bola de uma caixa que contém 12 bolas, numeradas de 1 a 12.

Considera os acontecimentos:

A : a bola extraída tem número par

B : a bola extraída tem um número superior a $\sqrt{50}$

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$?

$P(B|A)$ designa a probabilidade de o número saído ser maior que $\sqrt{50}$, sabendo que é par. Ora, se o número saído é par, temos 6 casos possíveis (2, 4, 6, 8, 10 e 12), e como $\sqrt{50} \approx 7,1$, desses 6 apenas 3 são maiores de que $\sqrt{50}$ (8, 10 e 12). Temos, assim, 6 casos possíveis e 3 casos favoráveis, pelo que $P(B|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3. Um saco contém um certo número de fichas brancas.

Lança-se um dado cúbico perfeito e colocam-se, no saco, tantas fichas azuis quantas o número saído nesse lançamento.

Em seguida, extrai-se, ao acaso, uma ficha do saco.

Considera os acontecimentos:

A : sair o número 4 no lançamento do dado

B : a ficha retirada do saco tem cor branca

Sabe-se que $P(B|A) = \frac{2}{3}$

Quantas fichas brancas estavam inicialmente no saco?

Designemos por x o número de fichas brancas que estavam inicialmente no saco. $P(B|A)$ designa a probabilidade de a ficha retirada do saco ser branca, sabendo que no lançamento do dado saiu o número 4. Ora, se no lançamento do dado saiu o número 4 significa que foram colocadas no saco 4 fichas azuis. O saco fica então com x bolas brancas e 4 azuis.

$P(B|A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{x+4} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x = 2x + 8 \Leftrightarrow x = 8$

O número de fichas brancas que estavam inicialmente no saco é 8.

4. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Seja A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ e $P(A \cup B) = 0{,}6$.

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0,6 = 0,3 + 0,4 - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1$$
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

5. A Ana e a Carla são duas irmãs que vivem na mesma casa.

A experiência evidencia que, em cada ano:

- a probabilidade de a Ana se constipar é 0,55 ;
- a probabilidade de a Carla se constipar é 0,45 ;
- a probabilidade de as duas irmãs não se constiparem é 0,4 .

Sabe-se que, no ano passado, a Carla se constipou.

Qual é a probabilidade de, no ano passado, a Ana também se ter constipado?

Designemos por A e B os acontecimentos:
A : o aluno escolhido é do sexo feminino
B : o aluno escolhido frequenta o ensino secundário
Sabe-se que $P(A) = 0,55$, $P(B) = 0,45$ e $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,25$.
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,25 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,25 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,25 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,75 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,75 \Leftrightarrow 0,55 + 0,45 - P(A \cap B) = 0,75 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,25$$
É pedida a $P(A|B)$.
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}25}{0{,}45} = \frac{5}{9}$$

6. Numa Caixa A existem seis bolas: três brancas, duas azuis e uma verde.

Numa caixa B existem 11 bolas. Algumas destas bolas são brancas, sendo as restantes azuis.

a) Realiza-se a seguinte experiência aleatória:

- extraem-se, a acaso, duas bolas da caixa A e colocam-se na caixa B;
- em seguida, extrai-se, ao acaso, uma bola da caixa B e observa-se a sua cor.

Admite que, no final da experiência, a probabilidade de sair uma bola azul é dupla da probabilidade de sair uma bola branca.

a_1) Justifica que uma das bolas que transitaram da caixa A para a caixa B foi a bola verde.

Ao extrair ao acaso uma bola da caixa B, a probabilidade de sair uma bola azul é dupla da probabilidade de sair uma bola branca. Portanto, o número de bola azuis é o dobro do número de bolas brancas. Assim, designando por b o número de bolas brancas, o número de bola azuis é $2b$. Portanto, o total de bolas azuis e bolas brancas é $3b$, ou seja, é um número múltiplo de 3. Se a bola verde não tivesse transitado da caixa A para a caixa B, as treze bolas que ficavam nesta caixa eram apenas bolas azuis e bolas brancas, o que é absurdo pois 13 não é múltiplo de 3. Logo, a bola verde foi uma das bolas que transitaram da caixa A para a caixa B.

a$_2$) Quantas bolas azuis ficaram na caixa B depois da transferência das duas bolas (da caixa A para a caixa B) ?

Pela alínea anterior concluímos que depois da transferência das duas bolas (da caixa A para a caixa B), a caixa B ficou com b bolas brancas, $2b$ bolas azuis e 1 bola verde, num total de 13 bolas.
$b+2b+1=13 \Leftrightarrow 3b=12 \Leftrightarrow b=4$
A caixa B ficou então com 4 bolas brancas e 8 bolas azuis.

b) Admite agora que se colocam 17 bolas num saco e, em seguida, se extraem ao acaso, sucessivamente se sem reposição, duas bolas do saco.

Sejam os acontecimentos:

X : a primeira bola retirada é branca

Y : a segunda bola retirada é branca

Sabe-se que $P(X|Y)=\frac{3}{8}$.

Determina o número de bolas brancas que estavam inicialmente da caixa B .

Inicialmente a caixa A tinha 6 bolas (3 brancas, 2 azuis e 1 verde) e a caixa B tinha 11 bolas (x brancas e $11-x$ azuis), portanto das 17 bolas que foram colocadas no saco, $x+3$ são brancas, $13-x$ são azuis e 1 é verde.
Como $P(Y|X)=\frac{3}{8}$, temos que $\frac{x+2}{16}=\frac{3}{8} \Leftrightarrow x+2=6 \Leftrightarrow x=4$.
Estavam inicialmente 4 bolas brancas na caixa B.

7. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A, B e C três acontecimentos ($A \subset E$, $B \subset E$ e $C \subset E$), todos com probabilidade não nula.
Sabe-se que $A \subset C$ e que os acontecimentos B e C são incompatíveis.
Prova que $P(A \cup B|C)=\frac{P(A)}{P(C)}$

Pelo facto de $A \subset C$, sabemos que $A \cap C = A$. Pelo facto de os acontecimentos B e C serem incompatíveis, sabemos que $B \cap C = \emptyset$.
$$P(A \cup B|C)=\frac{P((A\cup B)\cap C)}{P(C)}=\frac{P((A\cap C)\cup(B\cap C))}{P(C)}=\frac{P(A\cup\emptyset)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}$$

8. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Seja A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$.

Sabe-se que $P(A|B) = \frac{1}{2}$ e que $P(A \cup B = 3P(A \cap B)$.

Mostra que os acontecimentos A e B são equiprováveis.

$$\begin{cases} P(A|B) = \dfrac{1}{2} \\ P(A \cup B) = 3P(A \cap B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{2} \\ P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3P(A \cap B) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = \dfrac{1}{2}P(B) \\ P(A) + P(B) = 4P(A \cap B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = \dfrac{1}{2}P(B) \\ P(A) + P(B) = 2P(B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ P(A) = P(B) \end{cases}$$

Logo, os acontecimentos A e B são equiprováveis.

Soluções

1. $\frac{3}{7}$

2. $\frac{1}{2}$

3. 8

4. $\frac{1}{3}$

5. $\frac{8}{9}$

6.

a$_1$) 8 **a$_2$)** 4 **b)** 4