1. Completa cada uma das seguintes igualdades:

a) $15! = \_\_\_ \times 14!$ **b)** $16! \times \_\_\_ = 17!$ **c)** $\frac{5!}{5} = \_\_\_!$

$15! = 15 \times 14!$ $16! \times 17 = 17!$ $\frac{5!}{5} = \frac{5\times4!}{5} = 4!$

d) $\frac{9!}{8!} = \_\_\_$ **e)** $\frac{7!}{5!} = \_\_\_$

$\frac{9!}{8!} = \frac{9\times8!}{8!} = 9$ $\frac{7!}{5!} = \frac{7\times6\times5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

2. Resolve, em $\mathbb{N}$, as seguintes equações:

a) $\frac{n^2}{5!} = 1 + \frac{n^2}{6!}$

$\underset{(6)}{\frac{n^2}{5!}} = \underset{(6!)}{1} + \frac{n^2}{6!} \Leftrightarrow 6n^2 = 720 + n^2 \Leftrightarrow 5n^2 = 720 \Leftrightarrow n^2 = 144 \Leftrightarrow n = 12$

b) $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!} = 0{,}9$

$\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!} = 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{(n+1)\times n!-n!}{(n+1)\times n!+n!} = 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{n!\,(n+1-1)}{n!\,(n+1+1)} = 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{n}{n+2} = \frac{9}{10} \underset{(*)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 10n = 9n + 18 \Leftrightarrow n = 18$ $(*)$ O universo é $\mathbb{N}$

3. Utilizando o método de indução matemática, prova que, para qualquer número natural *n* , se tem:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}$

Para $n = 1$ tem-se: $\sum_{k=1}^{1} \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} \Leftrightarrow 0 = 0$, o que é verdade.

Hipótese de indução: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}$

Tese de indução: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

Demonstração: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} =$

$= 1 - \frac{n+1}{(n+)!} + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$

b) $(n+1)! \geq 2^n$

Para $n=1$ tem-se: $(1+1)! \geq 2^1 \Leftrightarrow 2 \geq 2$, o que é verdade.

Hipótese de indução: $(n+1)! \geq 2^n$

Tese de indução: $(n+2)! \geq 2^{n+1}$

Demonstração: $(n+1)! \geq 2^n \Rightarrow (n+2)\,(n+1)! \geq (n+2)\;2^n \Rightarrow (n+2)! \geq (n+2)\;2^n \Rightarrow$
$\Rightarrow (n+2)! \geq 2 \times\; 2^n \Rightarrow (n+2)! \geq 2^{n+1}$

4. O código de acesso a um determinado serviço de internet é constituído por cinco letras e dois algarismos. Admite que os dois algarismos estão sempre situados nas duas últimas posições.

Admite, ainda, que podem ser usadas as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos.

Determina quantos códigos diferentes se podem formar:

a) se não houver restrições;

Se não há restrições as letras e os números podem ser repetidos

$$26^5 \times 10^2 = 1\,188\,137\,600$$

b) não repetindo letras e não repetindo algarismos;

$$\underline{26}\ \underline{25}\ \underline{24}\ \underline{23}\ \underline{22}\ \underline{10}\ \underline{9}$$

$${}^{26}A_5 \times {}^{10}A_2$$

$$710\,424\,000$$

c) que não contenham vogais e em que os dois algarismos sejam iguais;

Existem 5 vogais $\rightarrow 21^5$

$\underline{0}\ \underline{0}$
$\underline{1}\ \underline{1}$
$\underline{2}\ \underline{2}$
$\underline{3}\ \underline{3}$
$\underline{4}\ \underline{4}$
$\underline{5}\ \underline{5}$
$\underline{6}\ \underline{6}$
$\underline{7}\ \underline{7}$
$\underline{8}\ \underline{8}$
$\underline{9}\ \underline{9}$
$\} 10 \times 1$

$21^5 \times 10 \times 1 = 40841010$

d) em que as três primeiras letras sejam vogais e apenas possam utilizados os algarismos 3, 5 e 7;

$\underline{V_0}\ \underline{V_0}\ \underline{V_0}\ \underbrace{\underline{\quad}\ \underline{\quad}}_{\text{Alfabeto}}\ \underline{3,5,7}\ \underline{3,5,7}$

$5^3 \times 26^2 \times 3^2$

$760\,500$

e) que não contenham consoantes e em que as letras sejam todas diferentes;

5 4 3 2 1 _ _

0 0
1 1
2 2
3 3
4 4
5 5
6 6
7 7
8 8
9 9

$5!$

10^2

$5! \times 10^2 = 12\,000$

f) em que a soma dos dois algarismos sejam um número ímpar maior do que 12.

_ _ _ _ _

26^3

8 5 = 13
7 6 = 13
9 4 = 13
7 8 = 15
9 6 = 15
8 9 = 17

$6 \times 2 = 12$

$26^3 \times 6 \times 2 = 14\,257\,6512$

5. Seja M o conjunto dos números naturais maiores do que 1000 e menores do que 5666.

a) Quantos elementos de M têm os algarismos todos diferentes?

1º algarismo inferior a 5 $\quad \underline{\ \ }\ \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{7}$

1, 2, 3, 4 → 4 $\qquad {}^9A_3$

$4\times{}^9A_3$

1º algarismo igual a 5 e segundo inferior a 5

$\underline{5}\ \underline{\ \ }\ \underline{8}\ \underline{7}$

0, 1, 2, 3, 4 → 5 $\qquad {}^8A_2$

$1\times5\times{}^8A_2$

números da forma $\underline{5}\ \underline{6}\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$

4, 3, 2, 1, 0 → 5 $\qquad$ 4, 3, 2, 1, 0 $\qquad$ ~~5~~ ~~6~~ 7 8 9 → 7 (-1)

$4\times{}^9A_3+1\times5\times{}^8A_2+5\times7=2331$

b) Quantos elementos de M não têm dois algarismos consecutivos iguais?

$4\times{}^9A_3$ → 1º algarismo inferior a 5

$+$

5×9^2 → 1º " igual a 5 e segundo inferior a 5

$+$

5×9 → números da forma 56 _ _

$+$

9 → números da forma 563 _

$=3375$

c) Quantos elementos de *M* são capicuas?

$4 \times 10 \times 1 \times 1$ → Primeiro algarismo inferior a 5

$+$

$6 \times 1 \times 1$ → Primeiro algarismo igual a 5 e segundo inferior ou igual a 5

$+$

1×1 → números na forma 5 6 _ _

$= 47$

6. Numa paragem de um autocarro estão 12 pessoas: seis homens e seis mulheres. Dois dos homens são idosos. Para um autocarro que apenas tem 10 lugares sentados disponíveis.
Os idosos são as primeiras pessoas a entrar e vão sentar-se. Seguidamente, sentam-se as seis mulheres. Finalmente, sentam-se mais dois homens.
De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados os dez lugares sentados, respeitando estas condições?

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Idosos → 2 $\quad {}^{10}A_2$ → Formas de sentar os idosos

Mulheres → 6 $\quad {}^{8}A_6$ → Formas de sentar as mulheres

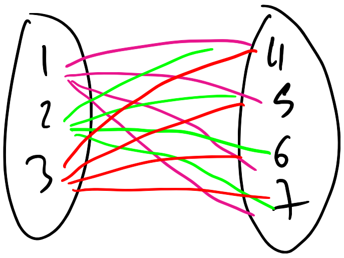
Homens não idosos → 4 $\quad {}^{4}A_2$ → Formas de sentar os homens

$${}^{10}A_2 \times {}^{8}A_6 \times {}^{4}A_2 = 21\,772\,800$$

7. Sejam A e B os conjuntos $A = \{1\,,2\,,3\}$ e $B = \{4\,,5\,,6\,,7\}$.

a) Quantas funções tem o conjunto A por domínio e o conjunto B por conjunto de chegada?

$4 \times 4 \times 4$



$4 \times 4 \times 4 = 64$

b) Quantas funções, de entre as da alínea anterior, são injetivas?

Uma função é injetiva se $\forall a,b \in D_f : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{2}$$

$${}^{4}A_{3} = 24$$

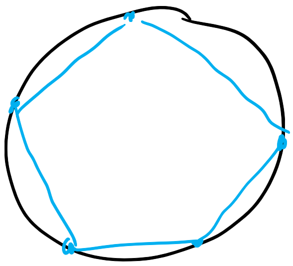
8. Cada equipa de futebol é constituída por doze jogadores: seis efetivos e seis suplentes.
O treinador de uma certa equipa vai escolher os seis efetivos para iniciar um jogo.
Quantas escolhas diferentes pode fazer?

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

$$^{12}C_6 = \frac{12!}{6!\,(12-6)!} = 924$$

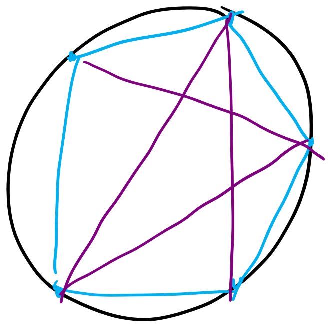
9. Considera cinco pontos pertencentes a uma circunferência.

a) Quantas cordas existem com extremos nestes pontos?



$$^{5}C_2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\times4\times\cancel{3!}}{2!\times\cancel{3!}} = \frac{20}{2} = 10$$

b) Quantos triângulos existem com vértices nestes pontos?



$$^{5}C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

$$= \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

10. A Maria vai organizar um lanche. Para isso, vai a uma pastelaria onde se vendem 14 tipos de diferentes bolos.

a) Se a Maria comprar seis bolos diferentes, quantas escolhas pode fazer?

$$^{14}C_6 = 3003$$

b) A maria optou por comprar seis bolos iguais. Vai dispô-los num prato dividido em dez setores, cada um com a sua cor. De quantas maneiras diferentes pode a Maria dispor os seis bolos no prato?

$$^{10}C_6 = 210$$

11. A direção de uma coletividade tem de se fazer representar por três dos seus sete membros, numa cerimónia oficial. Os sete membros da direção são a Ana, a Sofia, a Lurdes, o Mário, o Agostinho, o Paulo e o Artur.

a) Quantas comissões diferentes poderão ser constituídas?

$$^{7}C_3 = 35$$

b) Quantas comissões diferentes poderão ser constituídas em qua a Ana esteja incluída?

7 − Ana = 6 Sobram dois lugares

$^{6}C_{2} = 15$

c) Quantas comissões diferentes poderão ser constituídas em qua a Ana e o Artur não estejam simultaneamente?

5 Ana Artur

$^{7}C_{3} - 5 = 30$

d) Quantas comissões poderão ser constituídas, de tal modo que os dois sexos estejam representados?

Só rapazes $^{4}C_3$

Só raparigas $^{3}C_3$

$$^{7}C_3 - {^{4}C_3} - {^{3}C_3} = 30$$

12. O João tem uma caixa para guardar lápis e canetas. A caixa está dividida em dez compartimentos diferentes. Cada compartimento só pode ser ocupado por um único lápis ou por uma única caneta.

O João vai guardar cinco lápis, todos iguais, e cinco canetas, todas diferentes.

Quantas disposições diferentes poderão ocorrer?

C LC
C LC
C LC
C LC
C LC

$^{10}A_5 \rightarrow$ Canetas

$^{5}C_5 \rightarrow$ lápis

$$^{10}A_5 \times {^{5}C_5} = 30240$$

13. Cada chave do Euromilhões é constituída por cinco números (de entre os números naturais de 1 a 50) e por dois números, as estrelas (de entre os números naturais de 1 a 12).

Quantas chaves diferentes poderão ocorrer?

1 a 50 → cinco números

$$^{50}C_5$$

1 a 12 → duas estrelas

$$^{12}C_2$$

$$^{50}C_5 \times {}^{12}C_2 = 139\,838\,160$$