1. Determina sem recurso à calculadora:

1.1. $\dfrac{6!}{3\times 4!}=\dfrac{6\times 5\times 4!}{3\times 4!}=\dfrac{30}{3}=10$

1.2. $\dfrac{8!}{4!\times 3!}=\dfrac{8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{4!\times 3\times 2\times 1}=8\times 7\times 5=280$

1.3. $\dfrac{9!}{5!+6!}=\dfrac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{5!+6\times 5!}=\dfrac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{5!(1+6)}=9\times 8\times 6=432$

1.4. ${}^{7}C_4\times 3!=\dfrac{7!}{4!\times 3!}\times 3!=\dfrac{7\times 6\times 5\times 4!}{4!}=7\times 6\times 5=210$

1.5. ${}^{5}A_2\times 3!=\dfrac{5!}{3!}\times 3!=5!=120$

1.6. ${}^{6}C_4\times {}^{4}A_2=\dfrac{6!}{4!\times 2!}\times\dfrac{4!}{2!}=\dfrac{6!}{2\times 2}=\dfrac{720}{4}=180$

1.7. $\dfrac{{}^{5}A_3}{4!}=\dfrac{\frac{5!}{2!}}{4!}=\dfrac{5!}{2!\times 4!}=\dfrac{5\times 4!}{2!\times 4!}=\dfrac{5}{2}$

1.8. $\dfrac{{}^{5}C_3}{4!}=\dfrac{\frac{5!}{3!\times 2!}}{4!}=\dfrac{5\times 4!}{4!\times 3!\times 2!}=\dfrac{5}{3\times 2\times 2}=\dfrac{5}{12}$

2. Resolve as seguintes equações:

2.1. $\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{n!}=120 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+2)(n+1)n!+(n+1)n!}{n!}=120 \quad \wedge \left(\text{n}! \neq 0,\ \forall n \in IN_0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2+n+2n+2+n+1=120 \quad \wedge \left(\text{n}! \neq 0,\ \forall n \in IN_0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2+4n-117=0 \quad \wedge \left(\text{n}! \neq 0,\ \forall n \in IN_0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{-4 \pm \sqrt{16+4 \times 117}}{2} \quad \wedge \left(\text{n}! \neq 0,\ \forall n \in IN_0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=9 \vee n=-13 \quad \wedge \left(\text{n}! \neq 0,\ \forall n \in IN_0\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=9$

2.2. ${}^{n}A_2=342 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{(n-2)!}=342 \quad \wedge \left((n-2)! \neq 0,\ n \geq 2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=342 \quad \wedge \left((n-2)! \neq 0,\ n \geq 2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2-n-342=0 \quad \wedge \left((n-2)! \neq 0,\ n \geq 2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=\dfrac{1 \pm \sqrt{1+4 \times 342}}{2} \quad \wedge \left((n-2)! \neq 0,\ n \geq 2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=19 \vee n=-18 \quad \wedge \left((n-2)! \neq 0,\ n \geq 2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=19$

2.3. ${}^{n-1}A_3=3\ {}^{n-2}A_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n-1)!}{(n-4)!}=3\dfrac{(n-2)!}{(n-4)!} \quad \wedge \left((n-4)! \neq 0, n \geq 4\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (n-1)(n-2)!=3(n-2)! \quad \wedge \left((n-4)! \neq 0, n \geq 4\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n-1=3 \quad \wedge \left((n-4)! \neq 0, n \geq 4\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=4 \quad \wedge \left((n-4)! \neq 0, n \geq 4\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=4$

2.4. $^{n}C_2 = 136 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 136 \quad \wedge\left((n-2)! \neq 0, n \geq 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 136 \quad \wedge\left((n-2)! \neq 0, n \geq 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 272 = 0 \quad \wedge\left((n-2)! \neq 0, n \geq 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 272}}{2} \quad \wedge\left((n-2)! \neq 0, n \geq 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 17 \vee n = -16 \quad \wedge\left((n-2)! \neq 0, n \geq 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 17$$

2.5. $^{n-1}C_3 = 3\ ^{n-2}C_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} = 3\frac{(n-2)!}{2!\times(n-4)!} \quad \wedge\left((n-4)! \neq 0, n \geq 4\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)!}{3 \times 2!} = \frac{3(n-2)!}{2!} \quad \wedge\left((n-4)! \neq 0, n \geq 4\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{3} = 3 \quad \wedge\left((n-4)! \neq 0, n \geq 4\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 10$$

2.6. $^{n}C_2 + {}^{n}A_2 = 360 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 360 \quad \wedge\left((n-2)! \neq 0, n \geq 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 360 \quad \wedge\left((n-2)! \neq 0, n \geq 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n + 2n^2 - 2n - 720 = 0 \quad \wedge\left((n-2)! \neq 0, n \geq 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 3n - 720 = 0 \quad \wedge\left((n-2)! \neq 0, n \geq 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 3 \times 720}}{6} \quad \wedge\left((n-2)! \neq 0, n \geq 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 16 \vee n = -15 \quad \wedge\left((n-2)! \neq 0, n \geq 2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 16$$

3. Quantos são os divisores naturais de:

3.1. $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

Logo, o número de divisores naturais é $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$

3.2. $2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$

Logo, o número de divisores naturais é $3 \times 4 \times 3 = 36$

4. De quantos modos distintos se podem arrumar cinco automóveis numa garagem com oito lugares de estacionamento?

Como a ordem é relevante não se podem repetir: ${}^{8}A_5 = 6720$

5. De quantas formas diferentes se podem escolher três sabores de um gelado numa gelataria com dez sabores disponíveis?

Como a ordem dos gelados não é relevante: ${}^{10}C_3 = 120$

6. A turma da Beatriz tem 28 alunos, dos quais 12 são rapazes. De quantas maneiras diferentes pode resultar a eleição do delegado e do subdelegado de turma se:

6.1. o delegado for rapariga e o subdelegado for rapaz?

$16 \times 12 = 192$

6.2. o delegado e o subdelegado forem do mesmo sexo?

$16 \times 15 + 12 \times 11 = 372$

6.3. a Beatriz for eleita?

$1 \times 27 \times 2 = 54$

7. Um grupo de três homens e quatro mulheres vai posar para uma fotografia, colocando-se lado a lado. De quantas maneiras se podem colocar:

7.1. Se não houver restrições?

$^{7}A_{7} = 7! = 5040$

7.2. Se os homens ficarem todos juntos?

Podemos escolher a ordem dos homens de 3! maneiras diferentes e a ordem das mulheres de 4! maneiras diferentes.

Existem 5 possibilidades para colocar o grupo de homens.

Conforme o exemplo:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} H & H & H & M & M & M & M \\ M & H & H & H & M & M & M \\ M & M & H & H & H & M & M \\ M & M & M & H & H & H & M \\ M & M & M & M & H & H & H \end{array}\right\} \text{5 possibilidades}$$

Assim, $3! \times 4! \times 5 = 720$

7.3. Se os homens ficarem todos juntos e as mulheres também?

A ordem dos dois grupos pode ser escolhida de 2! maneiras diferentes.

Homem - Mulher ou Mulher - Homem

$2 \times 3! \times 4! = 288$

7.4. De forma a não haver duas mulheres juntas?

$M \quad H \quad M \quad H \quad M \quad H \quad M$

É a unica possibilidade existente para as mulheres não ficarem juntas.

No entanto existem 4! maneiras de escolher a ordem das mulheres e 3! maneiras diferentes de escolher a ordem dos homens.

Logo, $4! \times 3! = 144$

8. Uma orquestra possui no seu reportório nove sinfonias de Beethoven, vinte sinfonias de Mozart e oito sinfonias de Schubert.

8.1. Quantas apresentações diferentes se podem fazer se uma apresentação desta orquestra consistir numa sinfonia de Beethoven, seguida de uma de Mozart e, por fim, uma sinfonia de Schubert?

Existem 9 sinfonias de bethoven, 20 de Mozart e 8 de Schubert.

Logo, $9 \times 20 \times 8 = 1440$

8.2. Quantas apresentações diferentes se podem fazer se uma apresentação desta orquestra consistir numa sinfonia de cada um dos compositores, por qualquer ordem?

Neste caso a ordem interessa, logo temos 3! maneiras diferentes dos compositores serem escolhidos.

$9 \times 20 \times 8 \times 3! = 8640$

8.3. Quantas apresentações se podem fazer se puderem ser escolhidas três quaisquer obras?

${}^{37}A_3 = 46\ 620$

9. Num congresso há dez professores de Física e Química, doze de Biologia e quinze de Matemática. Quantas comissões de cinco professores se podem formar:

9.1. se não houver restrições?

${}^{37}C_5 = 435\ 897$ (a ordem não é relevante)

9.2. com dois professores de Matemática, dois de Biologia e um de Física e Química?

A comissão é formada por:

2 professores de Matemática - ${}^{15}C_2$

2 professores de Biologia - ${}^{12}C_2$

1 professor de Física e Química - ${}^{10}C_1$

${}^{15}C_2 \times {}^{12}C_2 \times {}^{10}C_1 = 69\ 300$

9.3. com exatamente três professores de Matemática?

3 professores de Matemática: ${}^{15}C_3$

Como são exatamente 3 professores de Matemática, depois destes terem sido escolhidos temos que os retirar das restantes possibilidades, ou seja, 37-15=22, e as possibilidades são: ${}^{22}C_2$

${}^{15}C_3 \times {}^{22}C_2 = 105\ 105$

9.4. com, no máximo, dois professores de Biologia?

Existem 3 casos possíveis:

1.º não existem profesores de Biologia: ${}^{25}C_5$

2.º existe apenas um professore de Biologia: ${}^{25}C_4 \times {}^{12}C_1$

3.º existem dois professores de Biologia: ${}^{25}C_3 \times {}^{12}C_2$

${}^{25}C_5 + {}^{25}C_4 \times {}^{12}C_1 + {}^{25}C_3 \times {}^{12}C_2 = 356\ 730$

10. Considera o conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Quantos número de quatro algarismos diferentes é possível formar que sejam:

10.1. Superiores a 3000?

$\underbrace{\boxed{3,4,5,6,7,8,9}}_{\text{Algarismos superiores ou iguais a 3}}$ $\underbrace{\boxed{1,2,3,4,5,6,7,8,9}}_{\text{Todos, menos o anterior}}$ $\underbrace{\boxed{1,2,3,4,5,6,7,8,9}}_{\text{Todos menos os dois algarismos anteriores}}$ $\underbrace{\boxed{1,2,3,4,5,6,7,8,9}}_{\text{Todos menos os três algarisos colocados nos digitos anteriores}}$

7 8 7 6

$7 \times 8 \times 7 \times 6 = 2352$

10.2. Pares?

Para que um número seja par, o algarismo das unidades tem que ser par.

$\underbrace{\boxed{\text{Todos menos o algarismo das unidades}}}_{8}$ $\underbrace{\boxed{\text{Todos menos o algarismo das unidades e o algarismo dos milhares}}}_{7}$ $\underbrace{\boxed{\text{Todos menos o algarismo das unidades, o algarismo dos milhares e o das dezenas}}}_{6}$ $\underbrace{\boxed{\text{Algarismos Par}}}_{4}$

$8 \times 7 \times 6 \times 4 = 1344$

10.3. Múltiplos de 5?

Neste caso, para que um número seja múltiplo de 5, o algarismo das unidades tem que ser o 5.

$\boxed{\text{Dezenas de milhar}}$ $\boxed{\text{Milhares}}$ $\boxed{\text{Centenas}}$ $\boxed{\text{Unidades}}$

8 7 6 1

$8 \times 7 \times 6 \times 1 = 336$

10.4. Inferiores a 5840?

Seja x o número pretendido:

$4 \times 8 \times 76 = 1344$, $x < 5000$

$1 \times 6 \times 7 \times 6 = 252$, $5000 \leq x < 5800$

$1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 6 = 18$, $5800 \leq x < 5840$

Assim, $1344 + 252 + 18 = 1614$

11. Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA que têm:

11.1. as letras ES juntas por essa ordem?

$E \quad S \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$

$\square \quad E \quad S \quad \square \quad \square \quad \square$

$\square \quad \square \quad E \quad S \quad \square \quad \square$

$\square \quad \square \quad \square \quad E \quad S \quad \square$

$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad E \quad S$

$5 \times 4! = 120$

11.2. as letras ESC juntas por qualquer ordem?

Como as letras ESC podem permutar entre si, existem 3! possibilidades de as colocar.

Para as letras ESC ficarem agrupadas existem 4 possibilidades $(6 - 3 + 1) = 4$

e para as restantes três letras, existem 3! maneiras diferentes de as colocarmos.

$4 \times 3! \times 3! = 144$

11.3. as vogais e as consoantes intercaladas?

Temos dois casos possíveis para intercalar as vogais e as consoantes

$\boxed{\text{Vogal}} \quad \boxed{\text{Consoante}} \quad \boxed{\text{Vogal}} \quad \boxed{\text{Consoante}} \quad \boxed{\text{Vogal}} \quad \boxed{\text{Consoante}}$

$\boxed{\text{Consoante}} \quad \boxed{\text{Vogal}} \quad \boxed{\text{Consoante}} \quad \boxed{\text{Vogal}} \quad \boxed{\text{Consoante}} \quad \boxed{\text{Vogal}}$

Como as três vogais podem permutar entre si, temos 3! possibilidades e como as consoantes podem permutar entre si, temos 3! possibilidades.

Assim, $2 \times 3! \times 3! = 72$

11.4. a letra E no primeiro lugar e a letra A no último lugar?

$E \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad A$

Como as letras do meio podem trocar entre si, temos 4! maneiras diferentes de as colocar.

Assim, $1 \times 4! \times 1 = 24$

12. Considera todos os números naturais com cinco algarismos.

Quantos desses números:

12.1. têm os algarismos todos diferentes e são pares?

Dois casos possíveis.

1.º termina com o algarismo 0

$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1 = 3024$

2.º termina com os 2 ou 4 ou 6 ou 8

$8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 4 = 10\,752$

$3024 + 10752 = 13776$

12.2. têm os algarismos todos diferentes e são maiores que $89\,000$?

Dois casos possíveis:

$1 \times 1 \times 8 \times 7 \times 6 = 336$, se $89\,000 \leq x < 90\,000$

$1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 1728$, se $90\,000 \leq x \leq 99\,999$

13. De quantas maneiras se podem sentar n pessoas em n cadeiras se:

13.1. a Alice e o Bruno ficarem juntos?

$2!(n-1)!$

13.2. a Alice e o Bruno ficarem separados?

$n! - 2! \times (n-1)! = n(n-1)! - 2!(n-1)! = (n-2)(n-1)!$

13.3. a Alice, o Bruno e a Carla ficarem juntos?

$3!(n-2)!$

13.4. a Alice, o Bruno e a Carla ficarem juntos e o Daniel e a Elsa ficarem também juntos?

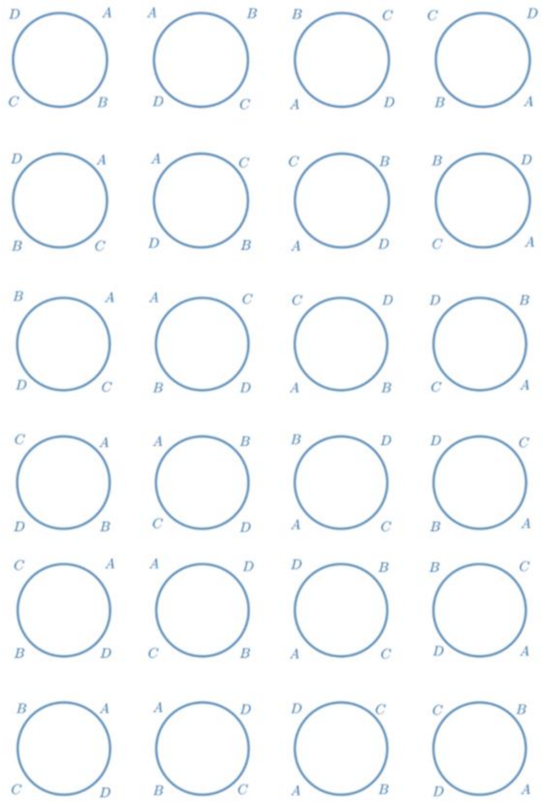
$3! \times 2! \times (n-3)!$

14. De quantos modos se podem sentar quatro casais numa mesa circular se:

Um dos processos de resolução é através das permutações circulares.

Vamos supor que só temos Mulheres, sendo A, B, C e D cada uma delas.

A figura seguinte corresponde à lista de todas permutações das quatro mulheres.



Como se pode observar, as permutações de cada uma das filas, é na realidade apenas uma, isto porque cada uma das mulheres não troca de lugar, o que existem são rotações.

Verifique-se a primeira fila, a mulher A está sempre na mesma posição em relação às outras mulheres (à direita está a D, à frente está a C e à esquerda está a B) apenas existe uma rotação no sentido positivo de cada uma delas. Assim temos apenas 6 maneiras diferentes de elas se sentarem.

Se considerarmos apenas as 4 mulheres, percebemos que para cada permutação de 4 mulheres temos 4 sequências formadas pelas mesmas. Desta forma, neste o total de permutações circulares das 4 mulheres é $\frac{4!}{4} = \frac{4 \times 3!}{4} = 3! = 6$

Uma permutação circular de n objetos é cada uma das disposições possíveis quando dispomos os n objetos à volta de um círculo, considerando idênticas aquelas que coincidem por rotação.

O número de permutações circulares de n objetos distintos é $(n-1)!$

14.1. dois quaisquer homens não ficarem juntos?

Como dois quaisquer homens não podem ficar juntos, significa que:

Podemos ter grupos de 3 homens, 2 homens ou um homem sozinho.

${}^{3}A_3 \times 1 \times$

Vamos começar pela distribuição dos 4 homens que é uma permutação circular de 4, isto é, $(4-1)! = 3! = 6$. Como os homens não podem ficar juntos, colocamos uma mulher entre cada dois homens, e podemos fazer isso de 8! maneiras diferentes.

Logo, temos $7! \times 8! = 144$

14.2. cada homem ficar ao lado da sua namorada?

Como cada homem tem que ficar ao lado da sua namorada, temos que a namorada pode estar ao seu lado de duas formas distintas (à sua direita ou à sua esquerda). Neste caso temos arranjos com repetições. Cada casal sentado de duas maneiras diferentes ${}^{2}A'_4 = 2^4 = 16$, e temos uma permutação circular dos 4 casais, $(4-1)! = 3! = 6$

Logo ${}^{2}A'_4 \times 3! = 16 \times 6 = 96$

14.3. dois quaisquer homens não ficarem juntos e cada homem ficar ao lado da namorada?

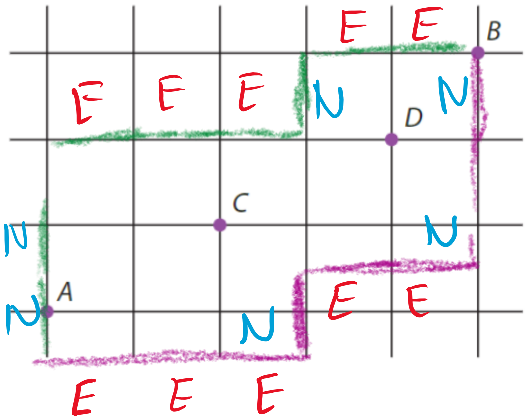
Queremos saber de quantas maneiras 4 casais se podem sentar à volta de uma mesa circular com 8 lugares, de modo que dois quaisquer homens não fiquem juntos e que cada homem fique com a namorada ao seu lado.

Como não se sentam juntos dois homens, concluímos que não se sentam juntas duas mulheres, percorrendo a mesa no sentido positivo ou negativo temos que há sempre casais ordenados da seguinte forma: Mulher – Homem ou Homem – Mulher. Como são 4 casais, podemos considerá-los com um único bloco a ser permutado circularmente à volta da mesa.

Logo, $2 \times (4-1)! = 2 \times 3! = 12$

15. A figura representa dez ruas que se cortam perpendicularmente, das quais seis são verticais. Só são possíveis deslocações para este e para norte.

Quantos caminhos existem entre A e B que:



Neste caso a ordem não é relevante.

15.1. não têm qualquer restrição?

1.º processo

O retângulo cuja diagonal é $[AB]$ está decomposto em 5×3 quadrículas.

Cada caminho para B tem um comprimento igual a 8 lados de quadrícula e pode ser definido por uma sequência de 5 letras **E** e 3 letras **N.**

Por exemplo, as sequências:

E E E N E E N N e **N N E E E N E E**

correspondem aos caminhos indicados na figura.

Portanto o número de caminhos é dado por:

${}^{8}C_{5} = 56$ (*escolha do lugar das letras* E *na sequência*)

ou

${}^{8}C_{3} = 56$ (*escolha do lugar das letras* N *na sequência*)

2.º processo

Como o caminho de A para B tem um comprimento igual a 8 lados de quadrícula, temos 8! maneiras diferentes de fazer o caminho, e temos uma sequência com cinco letras E e três letras N.

Logo existem $\dfrac{8!}{5!3!} = 56$ caminhos possíveis entre A e B

15.2. passam por C?

${}^{3}C_{2} \times {}^{5}C_{3} = 30$

15.3. não passam por C?

${}^{8}C_{5} - {}^{3}C_{2} \times {}^{5}C_{3} = 26$

15.4. passam por C e por D?

${}^{3}C_{2} \times {}^{3}C_{2} \times 2 = 18$

15.5. não passam por C ou não passam por D?

${}^{8}C_{5} - {}^{3}C_{2} \times {}^{3}C_{2} \times 2 = 38$

15.6. passam por C ou por D?

${}^{3}C_{2} \times {}^{5}C_{3} + {}^{6}C_{4} \times 2 - {}^{3}C_{2} \times {}^{3}C_{2} \times 2 = 42$

15.7. não passam por C nem por D?

${}^{8}C_{5} - \left({}^{3}C_{2} \times {}^{5}C_{3} \times {}^{6}C_{4} \times 2 - {}^{3}C_{2} \times {}^{3}C_{2} \times 2 \right) = 14$

16. Lançou-se um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e um dado octaédrico, com as faces numeradas de 1 a 8, e registaram-se os números das faces que ficaram voltadas para cima.
Quantos são os resultados possíveis para esta experiência?

$6 \times 8 = 48$

17. Considera os conjuntos $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $C = \{2, 4, 8\}$
Em referencial o.n. $Oxyz$, considera os pontos tais que as abcissas pertencem ao conjunto A, as ordenadas pertencem ao conjunto B e as cotas pertencem ao conjunto C

Quantos são esses pontos?

$4 \times 5 \times 3 = 60$

18. Um saco contém sete cartões, numerados de 1 a 7. Extrai-se um cartão do saco, regista-se o algarismo nele inscrito e repõe-se o cartão no saco. Efetua-se este procedimento três vezes. Os três algarismos registados formam um número. A primeira extração corresponde ao algarismo das centenas, a segunda ao das dezenas e a terceira ao das unidades.

18.1. Quantos números é possível formar?

Como existe reposição dos cartões, ${}^7A'_3 = 7^3 = 343$

18.2. Dos números que é possível formar, determina quantos:

18.2.1. têm exatamente dois algarismos pares;

Para o algarismo ímpar temos 3 posições possíveis (nas centenas, nas dezenas ou nas unidades) e como existem 4 algarismos ímpares $(1, 3, 5, 7)$ temos 4 hipóteses de escolher um.

Como existem 3 algarismos pares $(2, 4, 6)$ para cada uma das duas posições existem 3 possibilidades de escolher um.

Assim, $3 \times 4 \times 3 \times 3 = 108$

18.2.2. são ímpares.

Como existem 4 algarismos ímpares $(1, 3, 5, 7)$

Temos $7 \times 7 \times 4 = 196$

19. Seis jovens, a Ana, a Carla, o Frederico, a Beatriz, o Bernardo e a Filipa vão concorrer a um sorteio de seis viagens, a saber, a Barcelona, Berlim, Londres, Madrid, Paris e Roma.
Supondo que cada jovem vai ganhar uma viagem, de quantas maneiras diferentes pode resultar este sorteio?

Como não existe repetição e o número de jovens é igual ao número de viagens,

temos uma permutação $P_6 = {}^6A_6 = 6! = 720$

20. Oito atletas vão fazer uma corrida.
De quantas maneiras diferentes se poderão colocar três deles no pódio

${}^8A_3 = 336$

21. Com os algarismos 2, 3, 5 e 7, quantos números naturais se podem escrever que tenham no máximo quatro algarismos, nunca repetindo algarismos em cada número?

Com um algarismo: 1 possibilidade

Com dois algarismos: ${}^4A_2$ possibilidades

Com três algarismos: ${}^4A_3$ possibilidades

Com quatro algarismos: ${}^4A_4$ possibilidades

$1 + {}^4A_2 + {}^4A_3 + {}^4A_4 = 64$

22. A Lurdes quer arrumar doze livros de aventuras numa prateleira de uma estante, que tem o tamanho exato para o efeito. Desses doze livros, cinco são da coleção *Uma Aventura*, de Ana Maria Magalhães e Isabel Alçada, quatro são da coleção *Os Cinco*, de Enid Blyton, e os restantes três são de uma coleção de Júlio Verne.
Determina de quantas maneiras diferentes podem os doze livros ficar dispostos na prateleira, se:

22.1. não houver restrições;

$P_{12} = {}^{12}A_{12} = 12! = 479\ 001\ 600$

22.2 na extremidade esquerda ficar um livro de Júlio Verne;

Como existem 3 livros de Júlio Verne temos 3 maneiras diferentes de, na extremidade esquerda, termos um livro de Júlio Verne.

Assim, $3 \times {}^{11}A_{11} = 3 \times 11! = 119\ 750\ 400$

22.2. na extremidade esquerda ficar com um livro de Júlio Verne e na extremidade direita ficar um livro de Enid Blyton;

Existem três livros de Júilo Verne e quatro livros de Enid Blyton.

Logo, $3 \times 4 \times {}^{10}A_{10} = 12 \times 10! = 43\ 545\ 600$

22.3. os dois livros do meio forem ambos da coleção *Uma Aventura*;

Para os livros do meio temos $5 \times 4 = 20$ maneiras de os arrumar.

Para os restantes livros $10!$

Assim, $20 \times 10! = 72\ 576\ 000$

22.4. os quatro livros do meio forem os da coleção *Os Cinco*;

Sendo os quatro livros do meio da coleção *OsCinco* temos $4!$ maneiras de os arrumar.

Para os restantes livros temos $8!$ maneiras de os arrumar.

Logo, $4! \times 8! = 967\ 680$

22.5. os livros de cada coleção ficarem juntos;

Para a ordenação das coleções temos $3!$ possibilidades

Para a coleção de livros *Uma Aventura* temos $5!$ maneiras de os arrumar

Para a coleção de livros *Os Cinco* temos $4!$ maneiras de os arrumar

Para a coleção de livros de Júlio Verne temos $3!$ maneiras de os arrumar

Logo, $3! \times 5! \times 4! \times 3! = 103\ 680$

22.6. os livros de Júlio Verne ficarem juntos;

Temos 12-3+1=10 possibilidades de arrumar os livros de Júlio Verne ficarem juntos.

Para os livros de Júlio Verne temos $3!$ maneiras de os arrumar.

Para os restantes livros temos $9!$ possibilidades.

Assim, $10 \times 3! \times 9! = 21\ 772\ 800$

22.7. o livro *Os Cinco na Ilha do Tesouro* não ficar ao lado do livro *Uma Aventura em Lisboa*;

$12! - 11 \times 10! \times 2 = 399\ 168\ 000$

22.8. os dois livros do meio forem de coleções diferentes

A sem restrições $(12!)$ vamos retirar:

Os dois do meio serem da coleção *Uma Aventura* $5 \times 4 \times 10!$

Os dois do meio serem da coleção *Os Cinco* $4 \times 3 \times 10!$

Os dois do meio serem da coleção de Júlio Verne $3 \times 2 \times 10!$

Assim, $12! - 5 \times 4 \times 10! - 4 \times 3 \times 10! - 3 \times 2 \times 10! = 341\ 107\ 200$

23. Seja $P = \{2 , 3 , 5 , 7\}$. Considera o conjunto A dos números naturais compreendidos entre 10 a 1000 cujos algarismos pertencem ao conjunto P .

23.1. Determina o cardinal de A .

$4^2 \left(\text{números de dois algarismos} \right) + 4^3 \left(\text{números de três algarismos} \right) = 80$

23.2. Determina quantos elementos de A têm os algarismos todos diferentes.

${}^4A_2 + {}^4A_3 = 36$

23.3. De entre os elementos de A considerados na alínea anterior, determina quantos são múltiplos de 2 ou de 5.

$2 \times \left(3 \times 1 + 3 \times 2 \times 1 \right) = 18$

23.4. Determina quantos elementos do conjunto A têm dois ou três algarismos iguais

$\left(4^2 + 4^3 \right) - \left({}^4A_2 + {}^4A_3 \right) = 44$