1. Converta para radianos.

1.1. 120º

180° ——— π rad

120° ——— x rad

$$x = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

1.2. 135º

180° ——— π rad

135° ——— x rad

$$x = \frac{135\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$$

1.3. 150º

180° ——— π rad

150° ——— x rad

$$x = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$$

1.4. 200º

180° ——— π rad

200° ——— x rad

$$x = \frac{200\pi}{180} = \frac{10}{9}\pi$$

1.5. –70º

180° ——— π rad

-70° ——— x rad

$$x = \frac{-70\pi}{180} = -\frac{7\pi}{18}$$

1.6. -4500°

$$\begin{array}{r|l} 4500 & 360 \\ \underline{-4320} & 12 \\ 180 & \end{array}$$

180° ——— π rad

-180° ——— x rad

$$x = \frac{-180\pi}{180} = -\pi$$

2. Converta para graus:

2.1. $\frac{2\pi}{3}$ rad

180° ——— π rad

x° ——— $\frac{2}{3}\pi$ rad

$$x = \frac{180 \times \frac{2}{3}\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 120^{\circ}$$

2.2. $-\frac{5\pi}{3}$ rad

180° ——— π rad

x° ——— $-\frac{5}{3}\pi$ rad

$$x = \frac{180 \times \left(-\frac{5}{3}\right)\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = -300^{\circ}$$

2.3. $\frac{7\pi}{6}$ rad

$$180^{\circ} \text{ ——— } \pi \text{ rad}$$

$$x^{\circ} \text{ ——— } \frac{7}{6}\pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{180 \times \frac{7}{6}\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 210^{\circ}$$

2.4. $\frac{3\pi}{4}$ rad

$$180^{\circ} \text{ ——— } \pi \text{ rad}$$

$$x^{\circ} \text{ ——— } \frac{3}{4}\pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{180 \times \frac{3}{4}\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 135^{\circ}$$

2.5. $-\frac{5\pi}{4}$ rad

$$180^{\circ} \text{ ——— } \pi \text{ rad}$$

$$x^{\circ} \text{ ——— } -\frac{5}{4}\pi \text{ rad}$$

$$x = \frac{180 \times \left(-\frac{5}{4}\right)\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = -225^{\circ}$$

2.6. 1 rad com aproximação às décimas do grau.

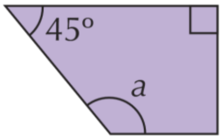
$$180^{\circ} \text{ ——— } \pi \text{ rad}$$

$$x^{\circ} \text{ ——— } 1 \text{ rad}$$

$$x = \frac{180 \times 1}{\pi} \approx 57{,}3^{\circ}$$

3. Exprima a amplitude, em radianos, de todos os ângulos assinalados nas figuras.

3.1. Trapézio retângulo



$a = 360 - 45 - 2 \times 90 = 135$

180° ——— π rad

135° ——— x rad

$$x = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

180° ——— π rad

45° ——— x rad

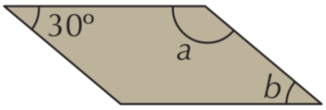
$$x = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$$

180° ——— π rad

90° ——— x rad

$$x = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$$

3.2. Paralelogramo



$b = 30$

180° ——— π rad

30° ——— x rad

$$x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

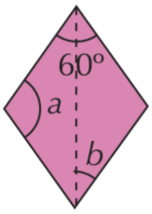
$2a = 360 - 60 \Leftrightarrow 2a = 300 \Leftrightarrow a = 150$

180° ——— π rad

150° ——— x rad

$$x = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$$

3.3. Losango



$b = 30$

180° ——— π rad

30° ——— x rad

$$x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$2a = 360 - 120 \Leftrightarrow 2a = 240 \Leftrightarrow a = 120$

180° ——— π rad

120° ——— x rad

$$x = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

4. Considere, numa circunferência, um ângulo ao centro com 3 radianos de amplitude que determina um arco de circunferência com 4,5 cm de comprimento. Qual é o raio da circunferência?

1.º Processo

$P_{\odot} = 2\pi r$

$$\begin{array}{ccc} 3 & \text{——} & 4{,}5 \\ 2\pi & \text{——} & P_{\odot} \end{array}$$

$P_{\odot} = \frac{4{,}5 \times 2\pi}{3} \Leftrightarrow P_{\odot} = 3\pi$

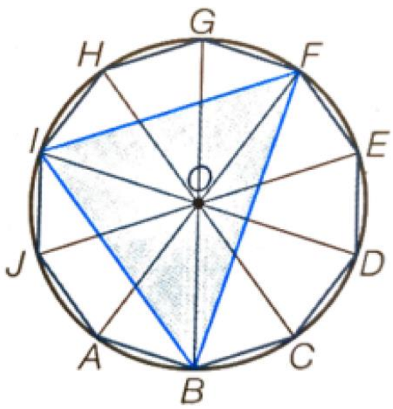
$P_{\odot} = 2\pi r \Leftrightarrow 3\pi = 2\pi r \Leftrightarrow r = \frac{3\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$

2.º Processo

Recorrendo à fórmula do comprimento de um arco de circunferência, que consta do formulário de exame: αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

$\alpha r = 4{,}5 \Leftrightarrow 3r = 4{,}5 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$

5. Na figura está representado um decágono regular, inscrito numa circunferência de centro O e 4 cm de raio.



Cada ângulo tem amplitude: $\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

5.1. Determine o lado extremidade do ângulo cujo lado origem é a semirreta $\dot{O}C$ e cuja amplitude em radianos é:

5.1.1. $-\frac{\pi}{5}$ $\quad \dot{O}B$

5.1.2. $\frac{6}{5}\pi$ $\quad \dot{O}I$

5.1.3. $\frac{212}{5}\pi$ $\quad \frac{212}{5}\pi = 42\frac{2}{5}\pi \longrightarrow \dot{O}E$

5.1.4. $-\frac{371}{5}\pi$ $\quad -\frac{371}{5}\pi = -74\frac{1}{5}\pi \longrightarrow \dot{O}B$

5.1.5. 2952° $\quad \frac{2952 \times \pi}{180} = \frac{82}{5}\pi = 16\frac{2}{5}\pi \longrightarrow \dot{O}E$

5.1.6. -1008° $\quad -\frac{1008 \times \pi}{180} = -\frac{28}{5}\pi = -5\frac{3}{5}\pi \longrightarrow \dot{O}J$

5.2. Determine a amplitude, em radianos, dos ângulos internos do triângulo $[IBF]$.

$$BF = \frac{4}{5}\pi \Rightarrow B\hat{I}F = \frac{\frac{4}{5}\pi}{2} = \frac{2}{5}\pi$$

$$IB = IF = \frac{3}{5}\pi \Rightarrow I\hat{F}B = I\hat{B}F = \frac{\frac{3}{5}\pi}{2} = \frac{3}{10}\pi$$

5.3. Determine o perímetro do triângulo $[IBF]$, com aproximação às décimas.
Se efetuar arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

Seja M o ponto médio de $[BF]$, como $B\hat{O}F = \frac{4}{5}\pi$, então, $B\hat{O}M = \frac{B\hat{O}F}{2} = \frac{\frac{4}{5}\pi}{2} = \frac{2}{5}\pi$

$[BOM]$ é retângulo, logo, $\operatorname{sen}\left(B\hat{O}M\right) = \frac{\overline{BM}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\overline{BM}}{4} \Leftrightarrow \overline{BM} = 4\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Assim, $\overline{BF} = 2\overline{BM} = 8\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) \approx 7{,}608$

Seja, N o ponto médio de $[IB]$, como $I\hat{O}B = \frac{3}{5}\pi$, então, $I\hat{O}N = \frac{I\hat{O}B}{2} = \frac{3\pi}{10}$

$[ION]$ é retângulo, assim, $\operatorname{sen}\left(I\hat{O}N\right) = \frac{\overline{IN}}{\overline{IO}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{\overline{IN}}{4} \Leftrightarrow \overline{IN} = 4\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

$\overline{IB} = 2\overline{IN} = 8\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 6{,}472$

$\overline{IB} = \overline{IF}$

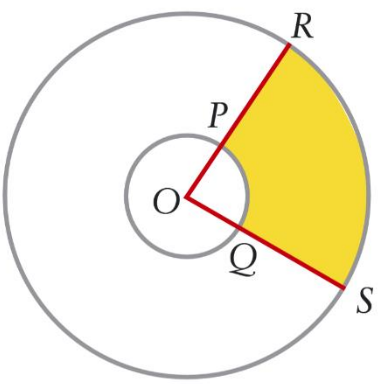
$\therefore\ P_{[IFB]} = 2\overline{IB} + \overline{BF} = 2 \times 6{,}742 + 7{,}608 \approx 20{,}6$

6. Na figura estão representadas duas circunferências de centro O e raios 2 e 6.

Os pontos P e Q pertencem à circunferência de raio 2 e os pontos R e S pertencem à circunferência de raio 6.

O ponto R pertence à semirreta $\dot{O}P$ e o ponto S pertence à semirreta $\dot{O}Q$. O ângulo POQ tem amplitude 1,5 radianos.

Calcule o perímetro e a área da região colorida.



$$P_{\substack{\text{Região}\\\text{Colorida}}} = \overline{PR} + \overline{QS} + \text{comprimento de } PQ + \text{ comprimento de } RS =$$

$$= (6-2) + (6-2) + 2\times 1{,}5 + 6\times 1{,}5 = 20$$

$$A_{\substack{\text{Região}\\\text{Colorida}}} = \text{ área setor circular } ORS - \text{ área do setor circular } OPQ =$$

$$= \frac{1{,}5\times 6^2}{2} - \frac{1{,}5\times 2^2}{2} = 24$$

7. A figura 1 representa uma fotografia de uma roda gigante com 8 m de raio, estando esquematizada na figura 2.

Figura 1

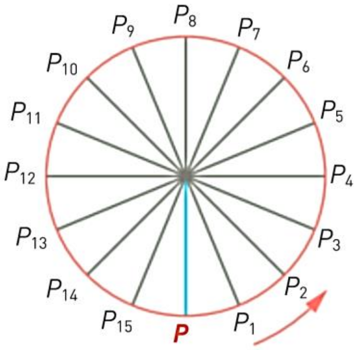


Figura 2

Tal como é sugerida no esquema, a circunferência está dividida em 16 arcos iguais e roda no sentido positivo.

No esquema, a posição do Pedro corresponde a um ponto. Admite que o Pedro parte do ponto P , dá no máximo uma volta completa ou para num dos pontos assinalados da figura 2.

7.1. Se o Pedro descrever um arco com 12π m de comprimento, qual é a amplitude, em radianos, desse arco?

Como o radio da circunferência é 8 m, então, $P_{\odot} = 2 \times 8 \times \pi = 16\pi$

Como o perímetro de uma circunferência corresponde a uma volta, isto é, 2π

Então:

16π m —— 2π rad

12π m —— x

$$x = \frac{12\pi \times 2\pi}{16\pi} = \frac{24\pi}{16} = \frac{3\pi}{2}$$

7.2. Admita que a amplitude do arco descrito pelo Pedro é 135º.

Determine:

7.2.1. o comprimento do arco;

O perímetro da circunferência é 16π

16π m —— 360º

x m —— 135º

$$x = \frac{16\pi \times 135^{\circ}}{360^{\circ}} = 6\pi$$

7.2.2. a amplitude do arco em radianos.

180º —— π

135º —— x

$$x = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

7.3. Indique o ponto onde o Pedro irá parar se descrever um arco cuja amplitude é:

A circunferência está dividida em 16 arcos iguais, isto é, a amplitude de cada um desses arcos é em graus $\frac{360^\circ}{16}=22,5^\circ$ e em radianos $\begin{array}{ccc} 180^\circ & \text{——} & \pi \\ 22,5^\circ & \text{——} & x \end{array}$, $x=\frac{22,5\pi}{180}=\frac{\pi}{8}$

7.3.1. 45°

$45^\circ=2\times 22,5^\circ$, assim, irá parar no ponto P_2

7.3.2. $\frac{5\pi}{8}$ rad

P_5

7.3.3. $\frac{5\pi}{4}$ rad

$\frac{5\pi}{4}=\frac{10\pi}{8}$, corresponde ao ponto P_{10}

7.4. Admita que o Pedro parou no ponto P_{11}. Determine:

7.4.1. a amplitude, em radianos, do arco descrito pelo Pedro;

Se o Pedro parou no P_{11} , então a amplitude em radianos do arco é $\frac{11\pi}{8}$

7.4.2. a amplitude, em graus, do arco que falta descrever para que o Pedro complete uma volta.

P_{11} corresponde, em graus, ao arco $11\times 22,5=247,5^\circ$

Portanto o que falta para completar uma volta é $360^\circ-247,5^\circ=112,5^\circ$

7.5. Considere a seguinte afirmação: "O arco descrito pelo Pedro tem amplitude superior a 200° e inferior a $\frac{7\pi}{6}$ rad.

Indique, em graus e em radianos, a amplitude do arco descrito pelo Pedro.

$220^\circ\div 22,5\approx 8,9$ e $\frac{7\pi}{6}\div\frac{\pi}{8}\approx 8,9$, assim o ponto é P_9

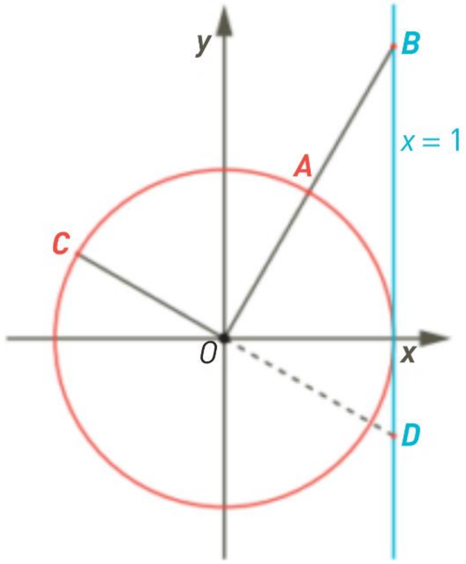
Em graus, $9\times 22,5^\circ=202,5^\circ$

Em radianos, $9\times\frac{\pi}{8}=\frac{9\pi}{8}$

8. Na figura, num referencial o.n. Oxy , estão representados o círculo trigonométrico e a reta de equação $x=1$.

Sabe-se que:

- $\dot{O}A$ é o lado extremidade do ângulo de amplitude $\frac{7\pi}{3}$;
- $\dot{O}C$ é o lado extremidade do ângulo de amplitude $\frac{41\pi}{6}$



8.1. Determine em cada caso, com α e k, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ e $k \in IN_0$, de modo que:

8.1.1. $\frac{7\pi}{3}=\alpha+2k\pi$;

$$\frac{7\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2\pi$$

$$\therefore \alpha=\frac{\pi}{3} \text{ e } k=1$$

8.1.2. $\frac{41\pi}{6}=\alpha+2k\pi$

$$\frac{41\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+\frac{36\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+6\pi=\frac{5\pi}{6}+2\times3\times\pi$$

$$\therefore \alpha=\frac{5\pi}{6} \text{ e } k=3$$

8.2. Determine as coordenadas dos pontos A, B, C e D.

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3}=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \ ; \ \cos\frac{7\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3} \text{ e } \tan\frac{7\pi}{3}=\tan\frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen}\frac{41\pi}{6}=\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} \ ; \ \cos\frac{41\pi}{6}=\cos\frac{5\pi}{6} \text{ e } \tan\frac{41\pi}{6}=\tan\frac{5\pi}{6}$$

$$A\left(\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$B\left(1, \tan\frac{\pi}{3}\right)=\left(1,\sqrt{3}\right)$$

$$C\left(\cos\frac{5\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$D\left(1,\tan\frac{5\pi}{6}\right)=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$