1. Sabendo que $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{3}$ e que $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, calcula o valor exato de:

1.1. $\cos\alpha$ **1.2.** $\tan\alpha$

2. Determina o valor exato de $\tan\alpha - \operatorname{sen}\alpha$, sabendo que $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ e que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

3. Considera a função real de variável real f , definida por:

$$f(x) = 1 + 2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

3.1. Mostra que 2π é período de f .

3.2. Determina uma expressão dos zeros de f .

3.3. Determina os valores de x , pertencentes ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, tais que $f(x) = 2$

4. Resolve as seguintes equações:

4.1. $\cos x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$, em $[-2\pi, \pi]$ **4.2.** $\sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$, em IR

4.3. $\cos x = \operatorname{sen} x$, em IR **4.3.** $\operatorname{sen}^2 x + \cos x = 1$, em $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

5. Considera a função real de variável real f , definida por:

$$f(x) = 1 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

5.1. Determina o contradomínio da função f

5.2. Determina uma expressão dos zeros de f

6. Mostra que sempre que as expressões têm significado, se tem:

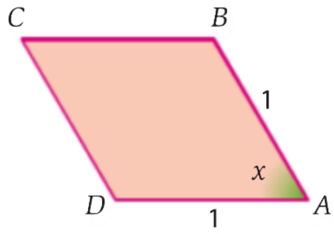
6.1. $(\cos\beta - \operatorname{sen}\beta)^2 = 2 - (\cos\beta + \sin\beta)^2$

6.2. $\frac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{sen}\alpha} = 1 - \operatorname{sen}\alpha$

6.3. $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta \times \cos\theta}$

6.4. $\frac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta} = \frac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$

7. O losango $[ABCD]$, representado na figura, tem lado unitário. O ângulo DAB tem amplitude de x radianos ($x \in]0, \pi[$).



7.1. Mostra que a área do losango é dada, em função de x, pela seguinte expressão analítica:

$$A(x) = \operatorname{sen} x$$

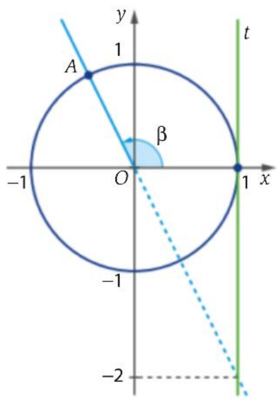
Sugestão: Na determinação da área do losango, considera-o um paralelogramo.

7.2. Considera $\overline{DB} = 2 - \sqrt{2}$

7.2.1 Determina $\cos x$

7.2.2 Calcula o valor exato da área do losango.

8. Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n. do plano:



- a circunferência trigonométrica;
- um ângulo, de amplitude β, que tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e por outro lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$;
- a reta t, de equação $x = 1$

Determina o valor exato da expressão

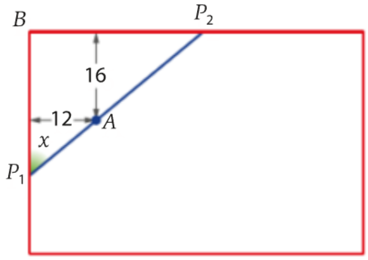
$$\cos^2 \beta - \tan \beta - \operatorname{sen} \beta$$

9. Mostra que, no seu domínio, são universais as seguintes condições:

9.1. $(1 - \operatorname{sen} \alpha)(1 + \operatorname{sen} \alpha) = \cos^2 \alpha$

9.2. $\frac{1}{\cos^2 \beta} - \cos^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \beta \left(\frac{1}{\cos^2 \beta} + 1 \right)$

10. Na figura está representado um lago artificial de forma retangular.



Pretende-se construir uma ponte, ligando duas margens do lago, entre os pontos P_1 e P_2 , tal como a figura ilustra.

A ponte tem um ponto de apoio A , situado a 12 m de uma das margens e a 16 m da outra.

Seja x a amplitude do ângulo P_2P_1B , considerando que a localização de P_1 e de P_2 pode variar.

10.1. Mostra que o comprimento da ponte, em metros, é dado por

$$C(x) = \frac{16 \operatorname{sen} x + 12 \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

10.2. Determina o comprimento da ponte para o qual se tem $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$

Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.

11. Admite que a temperatura da água de um lago, em graus Celsius, pode ser dada, aproximadamente, por:

$$f(t) = 17 + 4\cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right)$$

Onde t designa o tempo, em horas, decorrido entre os zeros e as vinte e quatro horas de um determinado dia.

(Considera que o argumento da função cosseno está expresso em radianos)

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, determina:

11.1. Os intervalos onde a função é crescente e decrescente.

11.2. A que horas é que a temperatura é máxima e qual é o valor desse máximo.

11.3. A que horas é que a temperatura é mínima e qual o valor desse mínimo.

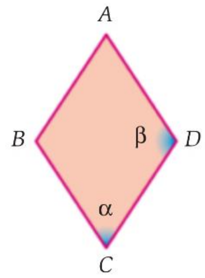
11.4. As melhores horas para se tomar banho, admitindo que um banho só é realmente bom se a temperatura da água não for inferior a 19 graus Celsius.

Nota: em todas as respostas, apresenta um esboço do gráfico da calculadora e assinala todos os pontos relevantes para a tua resposta.

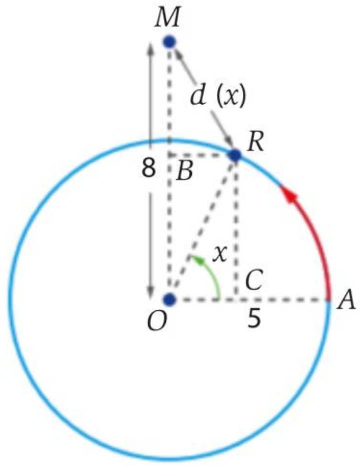
12. Na figura, está representado o losango $[ABCD]$.

Sabendo que $\cos \beta = -0,8$, determina:

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) + \tan(\pi + \alpha)$$



13. A Rita foi andar de carrossel. O esquema abaixo representa a situação a seguir descrita.



Em cada volta, que se inicia no ponto A, a Rita descreve uma circunferência com 5 metros de raio, centrada no ponto O , rodando no sentido indicado na figura.

A mãe da Rita ficou a observá-la de um ponto M , situado à distância de 8 metros de O e tal que o ângulo AOM é reto.

Para cada posição R da Rita, fica determinado um ângulo de amplitude $\boldsymbol{x}$, medida em radianos, que tem como lado origem a semirreta $\dot{O}A$ e como lado extremidade a semirreta $\dot{O}R$.

13.1. Mostra que, para cada valor de x, a distância $d(x)$, da Rita à mãe, é dada, em metros, por:

$$d(x) = \sqrt{89 - 80 \operatorname{sen} x}$$

13.2. Calcula $d\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e justifica o valor obtido, no contexto do problema.

13.3. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determina para que valores de x se tem $d(x) = 7$.

Sugestão: Começa por elevar ambos os membros da equação ao quadrado.

Soluções

1.1 $\frac{1}{3}$

1.2 $\frac{1}{3}$

2. $-\frac{5\sqrt{15}}{4}$

3.2 $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3.3 $\frac{13\pi}{12}, \frac{29\pi}{12}$

4.1. $s = \left\{-\frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$

4.2. $x = \frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{5\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

4.3. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4.4. $s = \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}$

5.1. $D'_f = [-1, 3]$

5.2. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

7.2.1 $\cos x = -2 + 2\sqrt{2}$

7.2.2 $\operatorname{sen} s = \sqrt{-11 + 8\sqrt{2}}$

8. $\frac{11-2\sqrt{5}}{5}$

10.2 39,6 m

11.1. Crescente entre as 5 e as 17 horas.

Decrescente entre as 0 e as 5 horas e entre as 17 e as 24 horas

11.2. Temperatura máxima é de 21º C e ocorre às 17 horas.

11.3. Temperatura mínima é de 13º C e ocorre às 5 horas.

11.4. A temperatura é superior a 19ºC entre as 13 e as 21 horas.

12. $\frac{27}{20}$

12.2. 3 m . O ponto R fica sobre OM , pelo que $\overline{RM}$ é a diferença entre 8 m e 5 m (raio).

12.3. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$