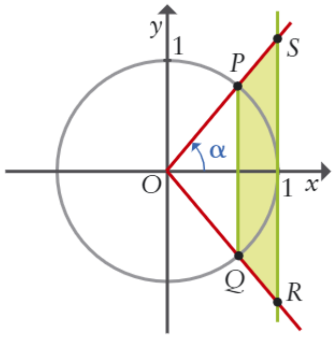
1. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy, circunferência trigonométrica e a reta de equação $x = 1$. Considera que um ponto P se desloca sobre a circunferência, no primeiro quadrante.

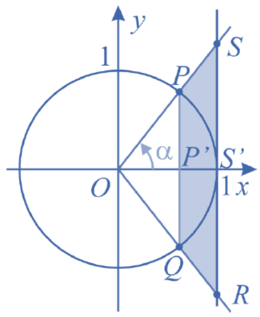


Para cada posição do ponto P:

- seja α a amplitude do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$;
- seja $f(\propto)$ a área do trapézio $[PQRS]$ (S é o ponto de interseção da reta OP com a reta de equação $x = 1$ e os pontos Q e R são, respetivamente, os simétricos dos pontos P e S em relação ao eixo Ox).

a) Mostra que $f(\propto) = (\tan \propto + \sin \propto)(1 - \cos \propto)$.

Designemos por P' e S' as projeções ortogonais de P e S respetivamente sobre o eixo $O\,x$.



$\overline{PP'} = \operatorname{sen}\alpha$; $\overline{SS'} = \operatorname{tg}\alpha$; $\overline{OP'} = \cos\alpha$, donde vem que $\overline{PQ} = 2\operatorname{sen}\alpha$; $\overline{SR} = 2\operatorname{tg}\alpha$ e $\overline{P'S'} = 1 - \cos\alpha$.

Comprimento da base maior $= \overline{SR}$

Comprimento da base menor $= \overline{PQ}$

Altura $= \overline{P'S'}$

$$f(\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha}{2} \times (1 - \cos\alpha) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{sen}\alpha) \times (1 - \cos\alpha)$$

b) Determina a área do trapézio, no caso em que a abcissa do ponto P é $\frac{1}{3}$.

Se a abcissa do ponto P é $\frac{1}{3}$, significa que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{8}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \left(\text{uma vez que } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

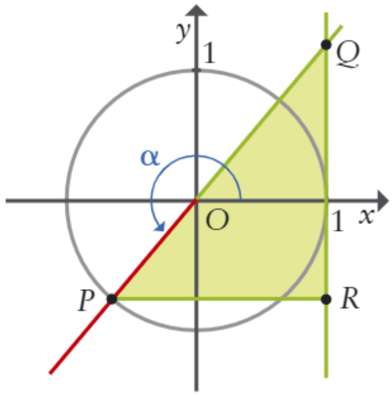
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$f(\alpha) = \left(2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{9}$$

2. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica e a reta de equação $x = 1$. Considera que um ponto P se desloca sobre a circunferência, no terceiro quadrante,

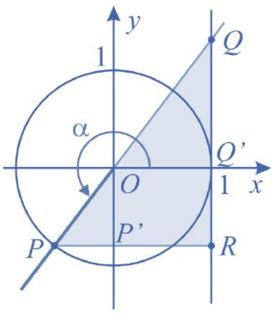
Para cada posição do P :

- seja α a amplitude do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\right)$;
- seja $f(\propto)$ a área do triângulo $[PQR]$ (Q é o ponto de interseção da reta OP com a reta de equação $x = 1$ e R é o ponto desta reta que tem ordenada igual à do ponto P).



a) Mostra que $f(\propto) = \frac{(1-\cos\propto)(\tan\propto-\sin\propto)}{2}$.

Designemos por P' e Q' as projeções ortogonais de P e Q sobre o eixo Oy e Ox, respetivamente.



$P(\cos\alpha , \operatorname{sen}\alpha)$

$\overline{PR} = \overline{PP'} + \overline{P'R} = |\cos\alpha| + 1 = 1 - \cos\alpha$, porque $\cos\alpha < 0$.

$\overline{QR} = \overline{QQ'} + \overline{Q'R} = |\operatorname{tg}\alpha| + |\operatorname{sen}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha$, porque $\operatorname{tg}\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha < 0$.

Base: $[PR]$
Altura: $[QR]$

$$f(\alpha) = \frac{(1-\cos\alpha)\times(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}{2}$$

b) Para um certo $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, tem-se $\tan x = \frac{4}{3}$. Determina $f(x)$.

$$1 + \text{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{e} \quad \text{tg}\, x = \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[.$$

$$1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

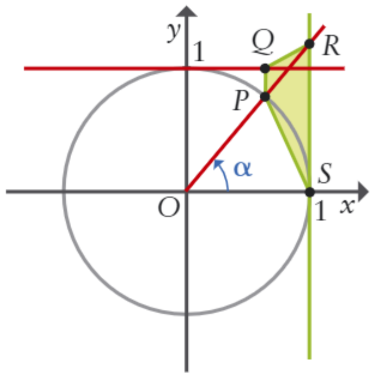
$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \cos x \times \text{tg}\, x$$

$$\text{sen}\, x = -\frac{3}{5} \times \frac{4}{3} = -\frac{4}{5}$$

$$f(x) = \frac{\left(1+\frac{3}{5}\right)\times\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{5}\right)}{2} = \frac{\frac{8}{5}\times\frac{32}{15}}{2} = \frac{128}{75}$$

3. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e a reta de equação $x = 1$. Considera que o ponto P se desloca sobre a circunferência, no primeiro quadrante.

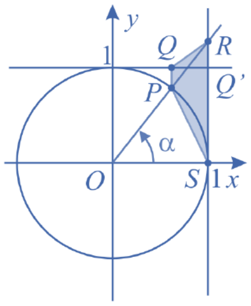


Para cada posição do ponto P:

- seja α a amplitude do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$;
- seja $f(\alpha)$ a área do trapézio $[PQRS]$ (Q é o ponto da reta de equação $y = 1$ que tem abcissa igual à do ponto P, R é o ponto de interseção OP com a reta de equação $x = 1$ e S é o ponto de coordenadas $(1, 0)$).

a) Mostra que $f(\alpha) = \frac{(1-\cos\alpha)(1+\tan\alpha-\sin\alpha)}{2}$

Designemos por Q' a projeção ortogonal de Q sobre a reta de equação $x = 1$.



$P(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$; $Q(\cos\alpha, 1)$; $R(1, \text{tg}\,\alpha)$; $S(1, 0)$; $Q'(1, 1)$

Uma vez que $0 < \text{sen}\,\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$ e $\text{tg}\,\alpha > 0$.

$\overline{RS} = \text{tg}\,\alpha$; $\overline{PQ} = 1 - \text{sen}\,\alpha$; $\overline{QQ'} = 1 - \cos\alpha$

Base maior: $[RS]$ Base menor: $[PQ]$ Altura: $[QQ']$

$$f(\alpha) = \frac{\text{tg}\,\alpha + 1 - \text{sen}\,\alpha}{2} \times (1 - \cos\alpha) = \frac{(1 + \text{tg}\,\alpha - \text{sen}\,\alpha)(1 - \cos\alpha)}{2}$$

b) Determina $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

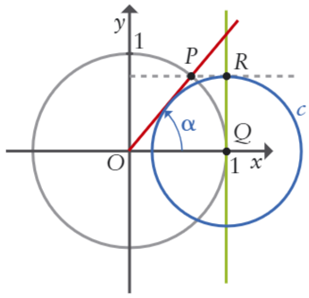
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\left(1 + \text{tg}\,\frac{\pi}{3} - \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\left(1 + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{2 + \sqrt{3}}{8}$$

4. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica e a reta de equação $x = 1$. Considera que um ponto P se desloca sobre a circunferência, no primeiro quadrante.

Para cada posição do ponto P :

- seja α a amplitude do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$;
- seja R o ponto de abcissa 1 que tem ordenada igual à de P ;
- seja c a circunferência de centro em $Q(1, 0)$ que passa pelo ponto R .



a) A circunferência c interseta a circunferência trigonométrica em dois pontos que têm a mesma abcissa. Determina essa abcissa, em função de α .

Uma vez que P tem coordenadas $(\cos\alpha\,,\,\operatorname{sen}\alpha)$ com $\cos\alpha > 0$ e $\operatorname{sen}\alpha > 0$, vem que R tem coordenadas $(1\,,\,\operatorname{sen}\alpha)$.
A circunferência c tem centro no ponto Q de coordenadas $(1, 0)$ e passa pelo ponto R , logo o seu raio é $\overline{RQ} = \operatorname{sen}\alpha$.
Uma equação de c será então $(x-1)^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2\alpha$.

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2\alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 = \operatorname{sen}^2\alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 1 = \operatorname{sen}^2\alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x + 1 = \operatorname{sen}^2\alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 - \operatorname{sen}^2\alpha \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2 - \operatorname{sen}^2\alpha}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2 - \left(1 - \cos^2\alpha\right)}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 + \cos^2\alpha}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

A abcissa dos pontos de interseção é $\dfrac{1 + \cos^2\alpha}{2}$.

b) Prova que a reta OP é tangente à circunferência c .

$\overrightarrow{OP} = P - O = (\cos\alpha\,,\,\operatorname{sen}\alpha)$, o declive da reta OP é então $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$. A ordenada na origem é zero. Uma equação da reta OP será $y = \operatorname{tg}\alpha\, x + 0$.
Vejamos que a reta OP e a circunferência c se intersetam num e num só ponto.

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2\alpha \\ y = \operatorname{tg}\alpha\, x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + \operatorname{tg}^2\alpha\, x^2 = \operatorname{sen}^2\alpha \\ y = \operatorname{tg}\alpha\, x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\, x^2 - 2x + 1 - \operatorname{sen}^2\alpha = 0 \\ y = \operatorname{tg}\alpha\, x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\, x^2 - 2x + \cos^2\alpha = 0 \\ y = \operatorname{tg}\alpha\, x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \times \cos^2\alpha}}{\dfrac{2}{\cos^2\alpha}} \\ y = \operatorname{tg}\alpha\, x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{\dfrac{2}{\cos^2\alpha}} \\ y = \operatorname{tg}\alpha\, x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos^2\alpha \\ y = \operatorname{tg}\alpha\, x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos^2 \alpha \\ y = \operatorname{tg} \alpha \times \cos^2 \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos^2 \alpha \\ y = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \times \cos^2 \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos^2 \alpha \\ y = \operatorname{sen} \alpha \times \cos \alpha \end{cases}$$

Assim, o ponto de interseção da reta OP com a circunferência c é único e tem coordenadas $(\cos^2 \alpha , \operatorname{sen} \alpha \times \cos \alpha)$, pelo que a reta é tangente à circunferência.

5. Seja $f\colon \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2 - 4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

a) Determina o zero da função f.

$f(x) = 0 \ \wedge \ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$

$2 - 4\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \ \wedge \ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \ \wedge \ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}\right) \ \wedge \ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \pi + 2k\pi ,\ k \in \mathbb{Z}\right) \ \wedge \ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

b) Indica o contradomínio da função f.

Sejam f_1, f_2, f_3 e f_4 funções reais de variável real definidas da seguinte forma:

$f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) = \operatorname{sen} x$

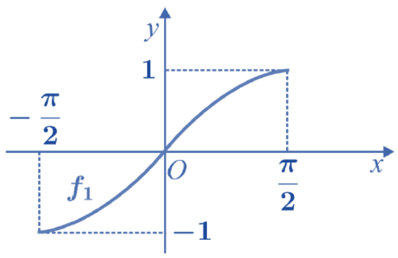
$f_2 : \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_2(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$f_3 : \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_3(x) = 4\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

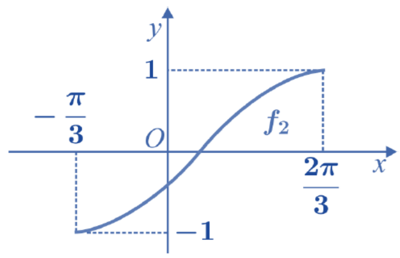
$f_4 : \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_4(x) = -4\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Seja $f : \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - 4\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

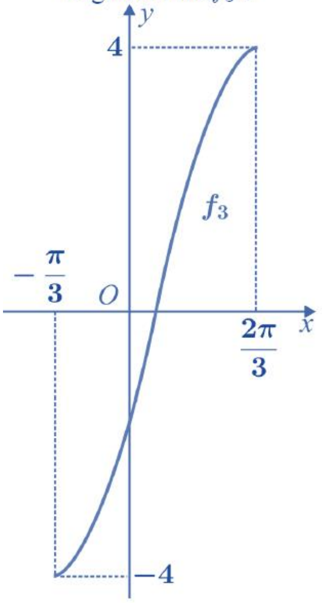
Sabemos que o gráfico de f_1 é



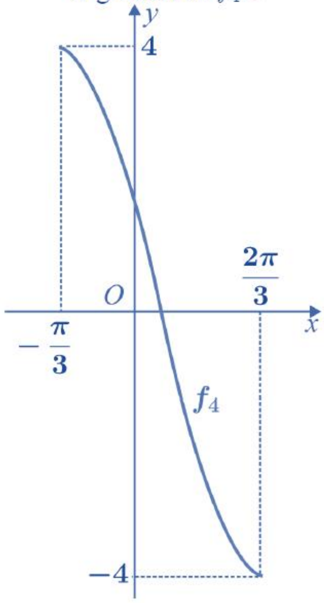
Então o gráfico de f_2 é



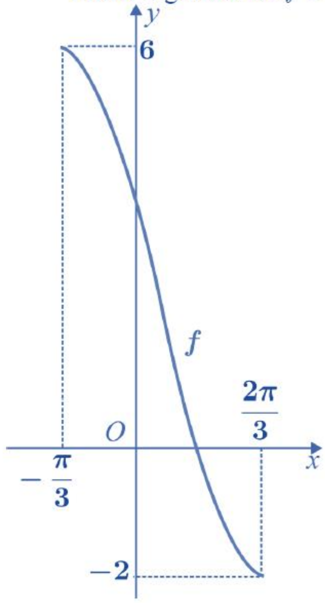
O gráfico de f_3 é



O gráfico de f_4 é



Então o gráfico de f é



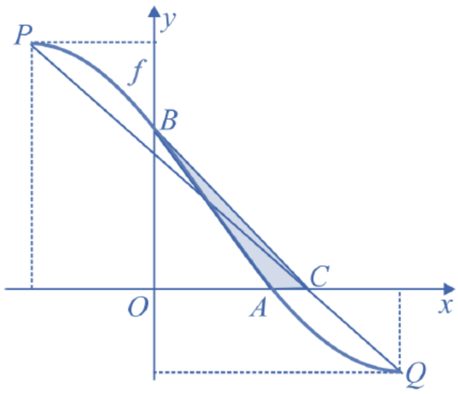
O contradomínio de f é então o intervalo $[-2, 6]$

c) Sejam A e B os pontos de interseção do gráfico da função f com os eixos Ox e Oy , respetivamente.
Sejam P e Q os pontos do gráfico da função f de ordenada máxima e mínima, respetivamente. Seja C o ponto de interseção da reta PQ com o eixo Ox .
Determina a área do triângulo $[ABC]$.

Na alínea a) vimos que o zero de f era $\frac{\pi}{3}$, logo $A\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$.

$f(0) = 2 - 4\operatorname{sen}\left(0 - \frac{\pi}{6}\right) = 2 + 4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 + 4 \times \frac{1}{2} = 4$, logo $B(0, 4)$.

Como foi visto na alínea b), $P\left(-\frac{\pi}{3}, 6\right)$ e $Q\left(\frac{2\pi}{3}, -2\right)$.



Base: $[AC]$ Altura: $[OB]$

Comecemos por escrever uma equação da reta PQ :

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(\frac{2\pi}{3}, -2\right) - \left(-\frac{\pi}{3}, 6\right) = (\pi, -8)$, logo $m = -\frac{8}{\pi}$.

$y = -\frac{8}{\pi}x + b$

Considerando o ponto $P\left(-\frac{\pi}{3}, 6\right)$ vem:

$$6 = -\frac{8}{\pi}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + b \Leftrightarrow b = 6 - \frac{8}{3} \Leftrightarrow b = \frac{10}{3}$$

Uma equação da reta será $y = -\frac{8}{\pi}x + \frac{10}{3}$.

$0 = -\frac{8}{\pi}x + \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{8}{\pi}x = \frac{10}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{8}{\pi}} \Leftrightarrow x = \frac{10\pi}{24} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12}$

$C\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$. Então, $\overline{AC} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$ e $\overline{OB} = 4$.

$A = \frac{\frac{\pi}{12} \times 4}{2} = \frac{\pi}{6}$