



1. Considere a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por:

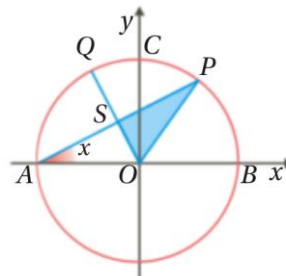
$$f(x) = \frac{1 - \sin(4x)}{2}$$

- 1.1. Determina o contradomínio de  $f$ .

- 1.2. Mostra que  $f$  é periódica de período  $\frac{\pi}{2}$ .

- 1.3. Sabendo que  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$  e que  $f(\pi + \alpha) \times f(\pi - \alpha) = \frac{4}{25}$ , determina  $f(\alpha)$ .

2. Na Figura está representado um referencial ortonormado  $Oxy$  e a circunferência trigonométrica que intersecta o eixo  $Ox$  nos pontos  $A$  e  $B$  ( $B$  com abcissa positiva) e o semieixo  $Oy$  no ponto  $C$ . O ponto  $P$  desloca-se sobre o arco  $CA$  de tal modo que  $OQ$  é sempre perpendicular a  $AP$ .



As semirretas  $\hat{A}P$  e  $\hat{O}Q$  intersectam-se no ponto  $S$ .

- 2.1 Para cada  $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ , seja  $g(x)$  a área do triângulo  $[OPS]$ .

Mostra que  $g(x) = \frac{1}{4} \sin(2x)$

- 2.2 Determina o contradomínio da função  $g$  e indica a área máxima do triângulo  $[OPS]$ .

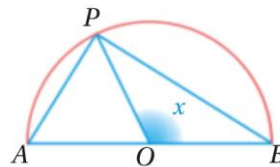
- 2.3 Sabendo que a abcissa do ponto  $P$  é  $\frac{5}{13}$ , determina a área do triângulo  $[OPS]$ .

3. Considera as funções  $f$  e  $g$  definidas em  $\mathbb{R}$  por:

$$f(x) = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{3} \sin(3x)$$

- 3.1 Prova que  $f$  é uma função periódica de período  $4\pi$ .
- 3.2 Prova que  $g$  é uma função periódica e indica o período mínimo.
- 3.3 Sabendo que  $f(\pi - 2\alpha) = 1$  e que  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ , determina  $g\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{3}\right)$ .

4. Um ponto  $P$  desloca-se sobre uma semicircunferência de diâmetro  $[AB]$ , centro  $O$  e raio 1. Seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $BOP$  ( $x \in ]0, \pi[$ ).



Seja  $f(x) = \overline{BP}$  e  $g(x) = \overline{AP}$ .

- 4.1 Justifica que o triângulo  $[ABP]$  é retângulo em  $P$ .
- 4.2 Justifica que  $f(x) = 2 \sin \frac{x}{2}$  e  $g(x) = 2 \cos \frac{x}{2}$ .
- 4.3 Sabendo que  $f(\pi - 2\alpha) = 1$  e  $\alpha \in ]0, \pi[$ , determina  $\overline{AP}$  para  $x = \alpha$ .
5. Considere a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = 1 - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2}{3}x\right)$
- 5.1. Determine o contradomínio da função  $f$ .
- 5.2. Escreva a expressão geral dos zeros de  $f$ .
- 5.3. Prove que  $f$  é periódica de período  $3\pi$ .

6. Considere as funções  $f, g, h, i, j, k$  e  $l$  definidas, respetivamente, por:

$$f(x) = 5 + 3 \operatorname{sen} x \quad g(x) = 1 - \operatorname{sen} 2x \quad h(x) = 3 - 6 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \quad i(x) = \frac{2}{3 + \cos x}$$

$$j(x) = 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad k(x) = 1 + \tan\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) \quad l(x) = 3 - 4 \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

6.1. Determine o domínio e o contradomínio de cada uma das funções.

6.2. Determine, caso existam, uma expressão geral dos zeros de cada uma das funções.

6.3. Mostre que:

6.3.1.  $g$  é periódica de período  $\pi$

6.3.2.  $h$  é periódica de período  $4\pi$

6.3.3.  $k$  é periódica de período  $\frac{\pi}{5}$

7. Determine, caso existam, os valores de  $x \in [-\pi, \pi[$ , tais que:

7.1.  $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

7.2.  $2 \operatorname{sen} 2x = -1$

7.3.  $3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3$

7.4.  $\operatorname{sen} x(1 - 2 \cos x) = 0$

7.5.  $2 \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x = 0$

7.6.  $2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$

8. Considere a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por

$$f(x) = \frac{1 - \operatorname{sen} 4x}{2}$$

8.5. Determine o contradomínio de  $f$

8.6. Mostre que  $f$  é periódica de período  $\frac{\pi}{2}$

8.7. Sabendo que  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$  e que  $f(\pi + \alpha) \times f(\pi - \alpha) = \frac{4}{25}$ , determine  $f(\alpha)$

9. Seja  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = \sin x$ .

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  os pontos tais que:

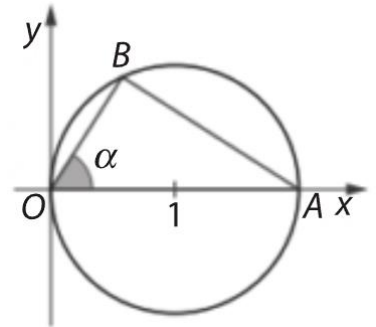
- $A$  e  $B$  pertencem ao gráfico da função  $f$  e têm a mesma ordenada, sendo  $A$  o de menor abcissa;
- $C$  é o ponto de interseção da mediatriz do segmento de reta  $[AB]$  com o eixo  $Ox$ ;
- o quadrilátero  $[OABC]$  é um paralelogramo.

Determine a área desse paralelogramo.

10. Na figura estão representados, num referencial o.n.  $Oxy$ , uma circunferência e um triângulo  $[OAB]$ .

Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro  $[OA]$ ;
- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(2, 0)$ ;
- o vértice  $O$  do triângulo  $[OAB]$  coincide com a origem do referencial;
- o ponto  $B$  desloca-se ao longo da semicircunferência superior.



Para cada posição do ponto  $B$ , seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $AOB$ , com  $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ .

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

10.5. Mostre que o perímetro do triângulo  $[OAB]$  é dado, em função de  $\alpha$ , por:

$$f(\alpha) = 2(1 + \cos \alpha + \sin \alpha)$$

10.6. Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, determine o valor de  $\alpha$ , em radianos, para o qual o perímetro do triângulo  $[OAB]$  é máximo.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Na sua resposta:

- apresente, num referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação;
- apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), arredondado(s) às centésimas.