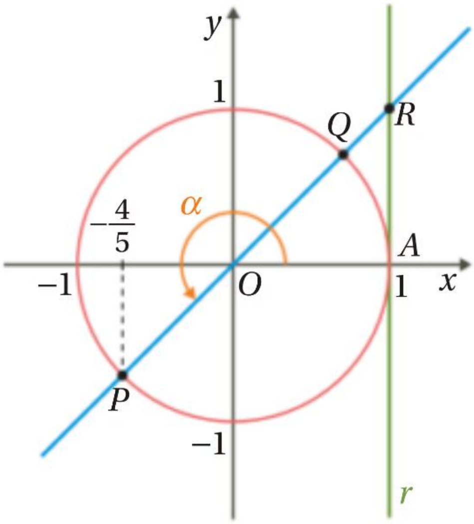
1. Na figura está representada a circunferência trigonométrica, num referencial o.n. $Oxy$ .
   Sabe-se que:
   - o ponto $A$ tem coordenadas $(1,0)$;
   - a reta $r$ é tangente à circunferência no ponto $A$ ;
   - $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
   - o ponto $R$ é a interseção da reta $r$ com a reta $PQ$ ;
   - o ângulo $AOP$ , designado por α, pertence ao 3.º quadrante;
   - o ponto $P$ tem abcissa igual a $-\frac{4}{5}$.

   Determine $\operatorname{sen}\alpha$ e $\tan\alpha$ .

2. Sabendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{5}$ e α pertence ao 2.º quadrante, determine $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$ .

3. Sabendo que $\tan\alpha = -\frac{3}{2}$ e $\alpha$ pertence ao 4.º quadrante, determine $\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$ .

4. Sabendo que $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{3}$ e que $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, calcule o valor exato de $\cos\alpha$ e de $\tan\alpha$ .

5. Prove as seguintes igualdades para α, tal que $\cos\alpha \neq 0$, $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$ e $\operatorname{sen}\beta \neq 0$ .

   5.1. $(\cos\beta - \operatorname{sen}\beta)^2 = 2 - (\cos\beta + \operatorname{sen}\beta)^2$

   5.2. $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{sen}^2\alpha} = 1 - \operatorname{sen}\alpha$

   5.3. $\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha \times \cos\alpha}$

5.4. $\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta}=\dfrac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$

5.5. $\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\operatorname{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha$

5.6. $\operatorname{sen}\alpha\times\cos\alpha\times\left(\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}\right)=1$

5.7. $\left(2-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1-\operatorname{sen}^2\alpha\right)=2\cos^2\alpha-1$

6. Sendo $x$ um ângulo agudo, mostre que:

6.1. $\dfrac{\cos^3 x-\cos x}{\operatorname{sen}^3 x-\operatorname{sen} x}=\tan x$

6.2. $\dfrac{\tan^2 x\times\cos x}{1+\dfrac{1}{\tan^2 x}}=\tan x\times\operatorname{sen}^3 x$

6.3. $\left(\tan^3 x+\tan x\right)\cos^3 x=\operatorname{sen} x$

6.4. $\dfrac{\operatorname{sen}^4 x-\operatorname{sen}^2 x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}+\cos^4 x=0$

6.5. $2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x$

6.6. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}+\dfrac{1}{\tan x}$

6.7. $\cos^4 x-\operatorname{sen}^4 x=1-2\operatorname{sen}^2 x$

6.8. $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-1=\dfrac{1}{\tan^2 x}$

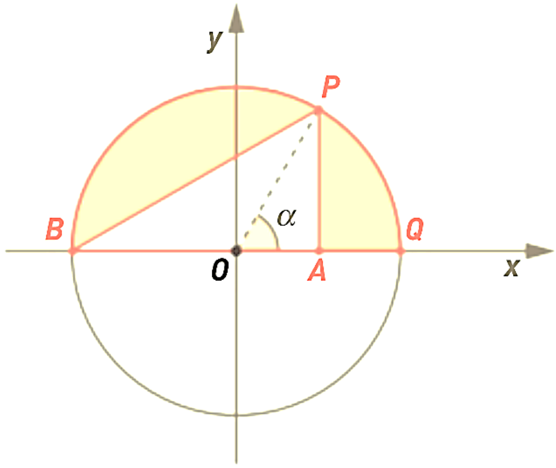
6.9. $\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}=\dfrac{2\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$ , com $\cos x \neq 0$ e $\operatorname{sen} x \neq -1$

6.10. $\operatorname{sen} x \tan x+\cos x=\dfrac{1}{\cos x}$ , com $\cos x \neq 0$

6.11. $(\operatorname{sen} x+\tan x)(1-\cos x)=\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}$ , com $\cos x \neq 0$

7. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxy$ , uma semicircunferência de centro $O$ e raio 1.
O ponto $P$ move-se ao longo da semicircunferência, a partir do ponto $Q$ , até $B$ .
Sabe-se que:

- $Q\hat{O}P=\alpha$ radianos;
- o ponto $A$ é a projeção ortogonal de $P$ sobre o eixo $Ox$ .



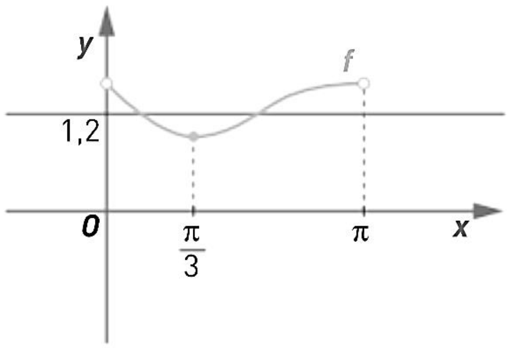

7.1. Determine a área colorida da figura para $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

7.2. Seja $f$ a função que a cada valor de $\alpha \in \left]0, \pi\right[$ faz corresponder a área da zona colorida da figura e que se encontra representada no referencial da figura seguinte.

7.2.1. Mostre que $f(\alpha)=\dfrac{\pi-\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$ .

7.2.2. O ponto correspondente ao mínimo da função tem abcissa $\dfrac{\pi}{3}$.

Determine a ordenada e interprete as coordenadas desse ponto no contexto apresentado.




7.2.3. Com recurso a uma calculadora gráfica, determine os valores aproximados às décimas das amplitudes de $\alpha$, em radianos, para os quais a área é de 1,2