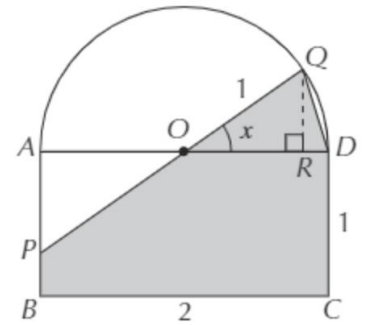




1. Na figura estão representados:

- um retângulo $[ABCD]$, em que $\overline{DC} = 1$ e $\overline{BC} = 2$;
- o ponto O , ponto médio do segmento $[AD]$;
- uma semicircunferência do centro no ponto O e raio 1.



Considere que o ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[AB]$, nunca coincidindo com A , mas podendo coincidir com B . Para cada posição do ponto P , seja Q o ponto de interseção da reta PO com a semicircunferência.

Seja x a amplitude, em radianos, do ângulo DOQ ($x \in]0, \frac{\pi}{4}[$).

Resolva os dois itens **sem recorrer à calculadora**.

1.1. Mostre que a área do polígono $[BCDQP]$, representado a sombreado, é dada, em função de x por

$$2 - \frac{\tan x}{2} + \frac{\sin x}{2}.$$

A área do polígono $[BCDQP]$ é igual à área do triângulo $[ODQ]$ com a área do pentágono $[ODCBP]$

$$A_{[ODQ]} = \frac{\overline{OD} \times \overline{QR}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\overline{QR}}{1} \Leftrightarrow \overline{QR} = \sin x \text{ e } \overline{OD} = 1$$

$$A_{[ODQ]} = \frac{1 \times \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$$

A área do pentágono $[ODCBP]$ é igual à diferença entre a área do retângulo $[ABCD]$ e a área do triângulo $[OAP]$.

$$A_{[ODCBP]} = A_{[ABCD]} - A_{[OAP]}$$

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{AO} \times \overline{AP}}{2} \quad ; \quad \tan x = \frac{\overline{AP}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \tan x$$

$$A_{[OAP]} = \frac{1 \times \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$$

$$A_{[ABCD]} = 2 \times 1 = 2$$

$$A_{[ODCBP]} = A_{[ABCD]} - A_{[OAP]} = 2 - \frac{\tan x}{2}$$

$$\text{Logo, } A_{[BCDQP]} = 2 - \frac{\tan x}{2} + \frac{\sin x}{2} \text{ c.q.m.}$$

- 1.2. Para uma certa posição do ponto P , tem-se $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5}$. Determine, para essa posição do ponto P , a área do polígono $[BCDQP]$. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$$

$$-\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{4}{5}$$

$$\begin{matrix} x \in]0, \frac{\pi}{4}[\\ \cos x > 0 \end{matrix}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

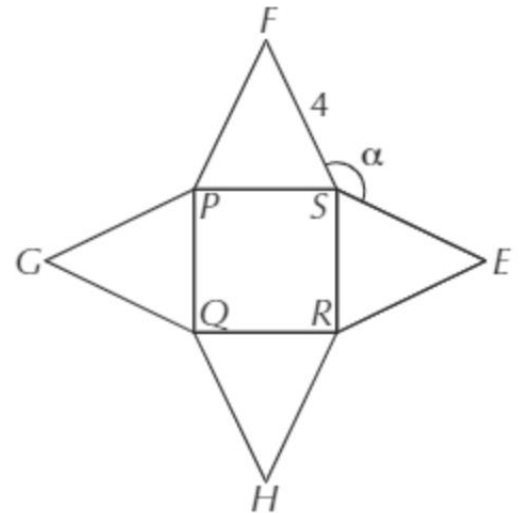
$$\text{Assim, } A_{[BCDQP]} = 2 - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{77}{40}$$

2. Na figura está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem 4.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo FSE ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

A aresta da base da pirâmide e, conseqüentemente, a área de cada uma das faces laterais variam em função de α .

Mostre que a área lateral da pirâmide é dada, em função de α , por $-32 \cos \alpha$.



Sugestão: atendendo a que $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, comece por exprimir a área de uma face lateral em função da amplitude do ângulo FSP , que poderá designar por β .

Seja β a amplitude de FSP e M o ponto médio de $[PS]$

$$A_{[FSP]} = \frac{\overline{PS} \times \overline{FM}}{2} \quad ; \quad \sin \beta = \frac{\overline{FM}}{4} \Leftrightarrow \overline{FM} = 4 \sin \beta$$

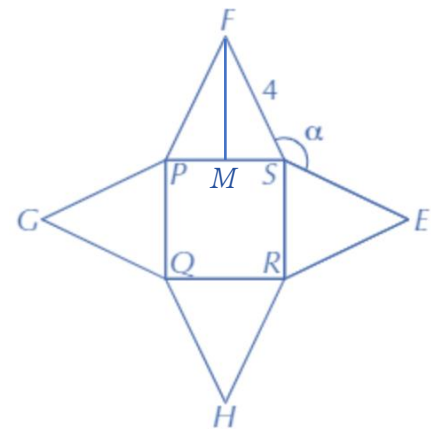
$$\cos \beta = \frac{\overline{MS}}{4} \Leftrightarrow \overline{MS} = 4 \cos \beta$$

Como $\overline{PS} = 2\overline{MS}$, então, $\overline{PS} = 8 \cos \beta$

$$\text{Assim, } A_{[FSP]} = \frac{8 \cos \beta \times 4 \sin \beta}{2} = 16 \sin \beta \cos \beta$$

Pelo enunciado, $\sin(2\beta) = 2 \sin \beta \cos \beta$

$$\text{Então, } 16 \sin \beta \cos \beta = 8(2 \sin \beta \cos \beta) = 8 \sin 2\beta$$



Pela observação da figura:

$$\beta + \alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = 2\pi \Leftrightarrow 2\beta = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha \Leftrightarrow 2\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

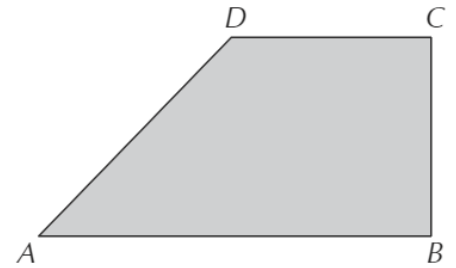
$$\text{Logo, } 8 \sin(2\beta) = 8 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -8 \cos \alpha$$

Portanto a área lateral da pirâmide é $4 \times (-8 \cos \alpha) = -32 \cos \alpha$ c.q.m.

3. Na figura está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$.

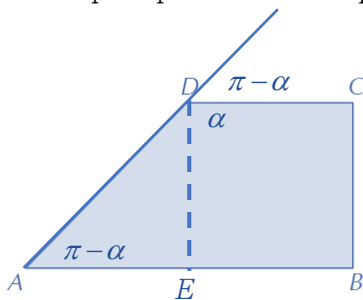
Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 1$;
- $\overline{CD} = 1$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC ;
- $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[.1$



Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

3.1. Mostre que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado, em função de α , por $P(x) = 3 + \frac{1-\cos x}{\sin x}$.



$$P(\alpha) = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = \overline{AE} + 1 + 1 + 1 + \overline{AD} = 3 + \overline{AE} + \overline{AD}$$

$$\text{sen}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1}{\text{sen}(\pi - \alpha)} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1}{\text{sen} \alpha}$$

$$\text{tan}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow -\text{tan} \alpha = \frac{1}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \overline{AE} = -\frac{1}{\text{tan} \alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } P(\alpha) &= 3 - \frac{1}{\text{tan} \alpha} + \frac{1}{\text{sen} \alpha} = 3 - \frac{1}{\frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha}} + \frac{1}{\text{sen} \alpha} = 3 - \frac{\text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha} + \frac{1}{\text{sen} \alpha} = \\ &= 3 - \frac{\text{cos} \alpha - 1}{\text{sen} \alpha} = 3 + \frac{1 - \text{cos} \alpha}{\text{sen} \alpha} \text{ c.q.m.} \end{aligned}$$

3.2. Para um certo número real θ , tem-se que $\tan \theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Determine o valor exato de $P(\theta)$.

$$\tan \theta = -\sqrt{8}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + (-\sqrt{8})^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2 \theta} = \cos^2 \theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$
 $\cos \theta < 0$

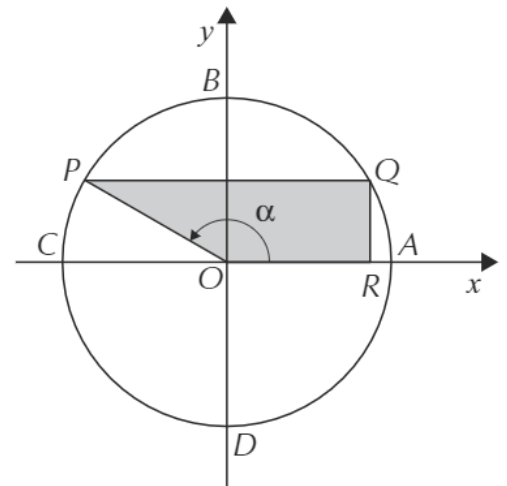
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$
 $\sin \theta > 0$

$$\text{Portanto, } P(\theta) = 3 + \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{8}}{3}} = 3 + \sqrt{2}$$

4. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico. Os pontos A, B, C e D são os pontos de interseção da circunferência com os eixos do referencial.

Considere que o ponto P se desloca ao longo do arco BC , nunca coincidindo com B nem com C . Para cada posição do ponto P , seja Q o ponto do arco AB que tem ordenada igual à ordenada do ponto P e seja R o ponto do eixo Ox que tem abcissa igual à abcissa do ponto Q . Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta \vec{OP} ($\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$).



Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

4.1. Mostre que a área do trapézio $[OPQR]$ é dada por $-\frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha$.

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{PQ} + \overline{OR}}{2} \times \overline{QR}$$

$P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, como $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, então $\cos \alpha < 0$ e $\sin \alpha > 0$

Assim:

$$\overline{QR} = -\cos \alpha$$

$$\overline{PQ} = -2 \cos \alpha$$

$$\overline{QR} = \sin \alpha$$

$$\text{Logo, } A_{[OPQR]} = \frac{\overline{PQ} + \overline{OR}}{2} \times \overline{QR} = \frac{-2 \cos \alpha + (-\cos \alpha)}{2} \times \sin \alpha = \frac{-3 \cos \alpha}{2} \times \sin \alpha = -\frac{3}{2} \cos \alpha \sin \alpha \text{ c.q.m.}$$



- 4.2. Para uma certa posição do ponto P , a reta OP interseca a reta de equação $x = 1$ num ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$. Determine, para essa posição do ponto P , a área do trapézio $[OPQR]$. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Como a reta OP interseca a reta de equação $x = 1$ num ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$ é equivalente a

afirmar que $\tan \alpha = -\frac{7}{24}$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \left(-\frac{7}{24}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{49}{576} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{625}{576} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{576}{625} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{576}{625}} \Leftrightarrow \cos \alpha = -\frac{24}{25}$$

$\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$
 $\cos \alpha < 0$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \left(-\frac{24}{25}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{576}{625} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{49}{625} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{49}{625}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{7}{25}$$

$\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$
 $\sin \alpha > 0$

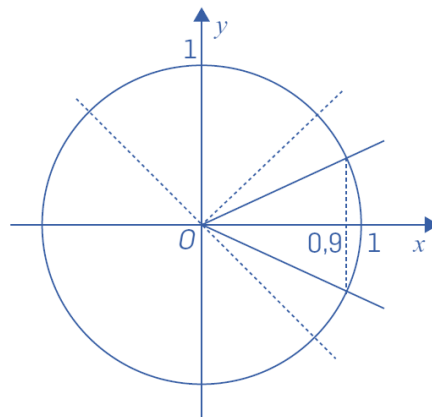
$$\therefore A_{[OPQR]} = -\frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{2} \times \left(\frac{7}{25}\right) \times \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{252}{625}$$

5. Considere, em \mathbb{R} , a equação trigonométrica $\cos x = 0,9$.

Em qual dos intervalos seguintes esta equação não tem solução?

- (A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (D) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Na figura estão representados o círculo trigonométrico, os lados extremidade dos ângulos cujo cosseno é 0,9 e, a pontado, os lados extremidade dos ângulos que têm $-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ radianos de amplitude.



Como se pode observar:

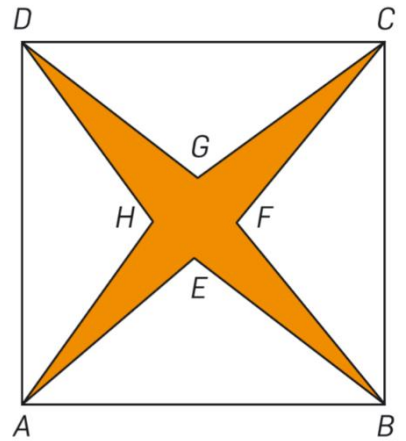
- no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a equação $\cos x = 0,9$ tem duas soluções
- no intervalo $[0, \pi]$, a equação $\cos x = 0,9$ tem uma solução
- no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, a equação $\cos x = 0,9$ não tem solução
- no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, a equação $\cos x = 0,9$ tem duas soluções

OPÇÃO: C

6. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado a .

Sabe-se que:

- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB ;
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.



6.1. Mostre que a área da região a sombreado é dada, em função de x , por $A(x) = a^2(1 - \tan x)$.

A área da região a sombreado é igual à área do quadrado $[ABCD]$ menos a área dos quatro triângulos $[AEB]$, $[BFC]$, $[CGD]$ e $[DHA]$. Como os triângulos são todos geometricamente iguais temos que

$$A_{\text{Região Sombreada}} = A_{[ABCD]} - 4A_{[AEB]}$$

Seja P a projeção ortogonal do ponto E no segmento de reta $[AB]$.

Como o triângulo $[AEB]$ é isósceles, pois, $\overline{AE} = \overline{BE}$, então $\overline{AP} = \frac{a}{2}$

$$A_{[AEB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{EP}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\overline{EP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{EP} = \frac{a}{2} \tan x$$

$$\text{Assim, } A_{[AEB]} = \frac{a \times \frac{a}{2} \tan x}{2} = \frac{a^2 \tan x}{4}$$

$$\therefore A_{\text{Região Sombreada}} = A_{[ABCD]} - 4A_{[AEB]} = a^2 - 4\left(\frac{a^2 \tan x}{4}\right) = a^2 - a^2 \tan x = a^2(1 - \tan x) \quad \text{c.q.m.}$$

6.2. Considerando $a=6$ e $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, tal que $\text{sen } \theta = \frac{1}{3}$ determine o valor exato de $A(\theta)$.

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \text{cos}^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \text{cos}^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \text{cos}^2 \theta = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \text{cos } \theta = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \text{cos } \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$
 $\text{sen } \theta > 0$

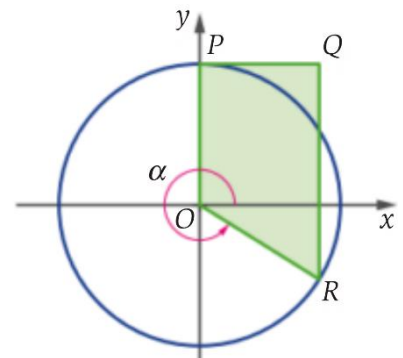
$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore A(\theta) = a^2(1 - \tan \theta) = 6^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 36 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 36 - 9\sqrt{2}$$

7. Na figura, estão representados a circunferência trigonométrica e um trapézio retângulo $[OPQR]$.

Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas $(0,1)$;
- o ponto R pertence ao 4.º Quadrante e á circunferência.



Seja α a amplitude do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$.

Qual das seguintes expressões dá o perímetro do trapézio $[OPQR]$ em função de α ?

- (A) $\cos \alpha + 3 - \text{sen } \alpha$ (B) $\cos \alpha + 2 - \text{sen } \alpha$ (C) $\cos \alpha + 3 + \text{sen } \alpha$ (D) $4 - \text{sen } \alpha$

$$P_{[OPQR]} = \overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{OR} = 1 + \overline{PQ} + \overline{QR} + 1 = 2 + \overline{PQ} + \overline{QR}$$

$$Q(\cos \alpha, 1) \text{ e } R(\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$$

$$\overline{PQ} = \cos \alpha$$

$$\overline{QR} = 1 + \underbrace{(-\text{sen } \alpha)}_{\substack{\alpha \in 4.^\circ Q \\ \text{sen } \alpha < 0}} = 1 - \text{sen } \alpha$$

$$\therefore P_{[OPQR]} = 2 + \cos \alpha + 1 - \text{sen } \alpha = 3 + \cos \alpha - \text{sen } \alpha$$