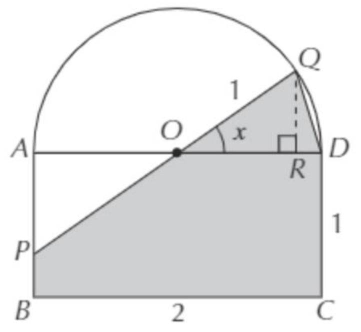
1. Na figura estão representados:
   - um retângulo $[ABCD]$, em que $\overline{DC} = 1$ e $\overline{BC} = 2$;
   - o ponto O, ponto médio do segmento $[AD]$;
   - uma semicircunferência do centro no ponto O e raio 1.



Considere que o ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[AB]$, nunca coincidindo com A, mas podendo coincidir com B . Para cada posição do ponto P , seja Q o ponto de interseção da reta PO com a semicircunferência.

Seja x a amplitude, em radianos, do ângulo DOQ $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

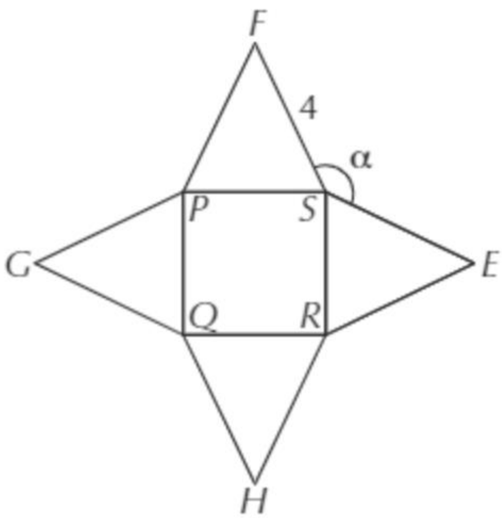
Resolva os dois itens **sem recorrer à calculadora.**

1.1. Mostre que a área do polígono $[BCDQP]$, representado a sombreado, é dada, em função de x por

$$2 - \frac{\tan x}{2} + \frac{\sin x}{2} .$$

1.2. Para uma certa posição do ponto P , tem-se $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5}$. Determine, para essa posição do ponto P, a área do polígono $[BCDQP]$. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2. Na figura está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem 4.



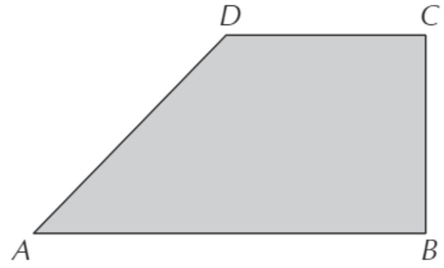
Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo FSE $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

A aresta da base da pirâmide e, consequentemente, a área de cada uma das faces laterais variam em função de α.

Mostre que a área lateral da pirâmide é dada, em função de α, por $-32 \cos x$.

Sugestão: atendendo a que $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, comece por exprimir a área de uma face lateral em função da amplitude do ângulo FSP, que poderá designar por β.

3. Na figura está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$.



Sabe-se que:

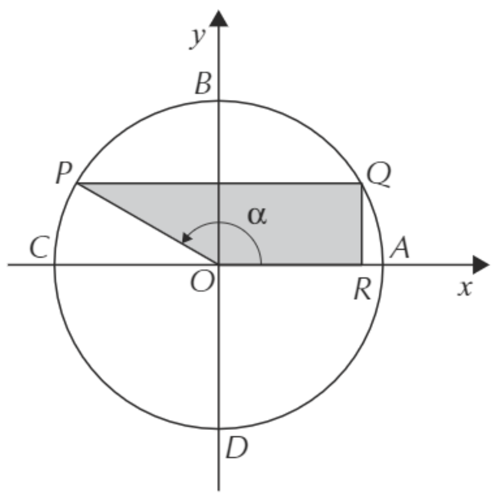
- $\overline{BC} = 1$;
- $\overline{CD} = 1$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC ;
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ .1

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

3.1. Mostre que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado, em função de α, por $P(x) = 3 + \frac{1-\cos x}{\sin x}$.

3.2. Para um certo número real θ , tem-se que $\tan\theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Determine o valor exato de $P(\theta)$.

4. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy , o círculo trigonométrico. Os pontos A, B, C e D são os pontos de interseção da circunferência com os eixos do referencial.



Considere que o ponto P se desloca ao longo do arco BC, nunca coincidindo com B nem com C. Para cada posição do ponto P , seja Q o ponto do arco AB que ter ordenada igual à ordenada do ponto P e seja R o ponto do eixo Ox que tem abcissa igual à abcissa do ponto Q.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$.

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

4.1. Mostre que a área do trapézio $[OPQR]$ é dada por $-\frac{3}{2}\sin\alpha\cos\alpha$.

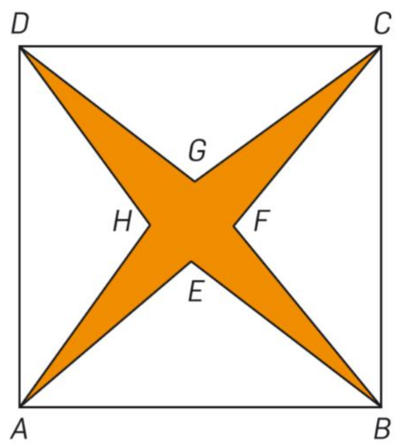
4.2. Para uma certa posição do ponto P , a reta OP interseta a reta de equação $x = 1$ num ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$. Determine, para essa posição do ponto P, a área do trapézio $[OPQR]$. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Considere, em IR, a equação trigonométrica $\cos x = 0{,}9$.

Em qual dos intervalos seguintes esta equação não tem solução?

(A) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $[0, \pi]$ (C) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (D) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

6. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado a.



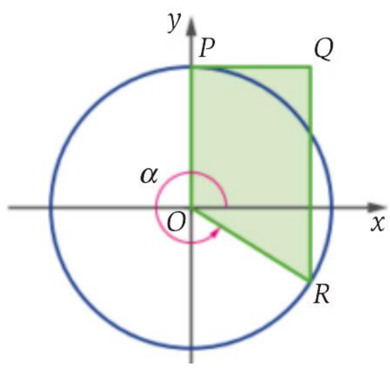
Sabe-se que:

- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB;
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

6.1. Mostre que a área da região a sombreado é dada, em função de x, por $A(x) = a^2(1 - \tan x)$.

6.2. Considerando $a = 6$ e $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, tal que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$ determine o valor exato de $A(\theta)$.

7. Na figura, estão representados a circunferência trigonométrica e um trapézio retângulo $[OPQR]$.



Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas $(0,1)$;
- o ponto R pertence ao 4.º Quadrante e á circunferência.

Seja α a amplitude do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$.

Qual das seguintes expressões dá o perímetro do trapézio $[OPQR]$ em função de α ?

(A) $\cos\alpha + 3 - \operatorname{sen}\alpha$ (B) $\cos\alpha + 2 - \operatorname{sen}\alpha$ (C) $\cos\alpha + 3 + \operatorname{sen}\alpha$ (D) $4 - \operatorname{sen}\alpha$