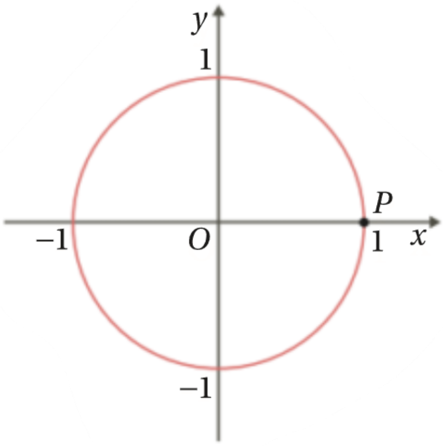
1. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxy$, a circunferência trigonométrica.
Seja $P$ o ponto de interseção desta circunferência como semieixo positivo $Ox$.
Indique o quadrante a que pertence o lado extremidade do ângulo em que o lado origem é a semirreta $\dot{O}P$ e a amplitude é:




1.1. $172^\circ$

$2.^\circ Q$

1.2. $302^\circ$

$3.^\circ Q$

1.3. $742^\circ$

$$\begin{array}{l|l} 742^\circ & 360^\circ \\ \underline{720} & 2 \\ \;22 & \end{array}$$

$742^\circ = 360^\circ \times 2 + 22^\circ$

$1.^\circ Q$

1.4. $-105^\circ$

$3.^\circ Q$

1.5. $-1312^\circ$

$$\begin{array}{l|l} 1312^\circ & 360^\circ \\ \underline{1080} & 3 \\ \;232 & \end{array}$$

$-1312^\circ = -360^\circ \times 3 - 232^\circ$

$2.^\circ Q$

1.6. $-616^\circ$

$$\begin{array}{l|l} 616^\circ & 360^\circ \\ \underline{360} & 1 \\ 256 & \end{array}$$

$-616^\circ = -360^\circ - 256^\circ$

$2.^\circ Q$

**1.7.** $-1441^{\circ}$

$$\begin{array}{l|l} 1441^{\circ} & 360^{\circ} \\ \hline \underline{1440} & 4 \\ \quad 1 & \end{array}$$

$-1441^{\circ} = -360^{\circ} \times 4 - 1^{\circ}$

$4.^{\circ} Q$

**1.8.** $1500^{\circ}$

$$\begin{array}{l|l} 1500^{\circ} & 360^{\circ} \\ \hline \underline{1440} & 4 \\ \quad 60 & \end{array}$$

$1500^{\circ} = 360^{\circ} \times 4 + 60^{\circ}$

$1.^{\circ} Q$

**2.** Determine o sinal do número designado por cada uma das expressões.

**2.1.** $\cos 100^{\circ} - \operatorname{sen} 470^{\circ}$

$\alpha = 100^{\circ}$ pertence ao 2.º quadrante, pelo que $\cos\alpha < 0$

$\beta = 470^{\circ} = 110^{\circ} + 360^{\circ}$, logo $\beta = 470^{\circ} = (110^{\circ}, 1)$ pertence ao 2.º quadrante, portanto, $\sin\beta > 0$.

Assim, $\cos(100^{\circ}) - \sin(470^{\circ}) < 0$, ou seja, é negativo.

**2.2.** $\tan(-1100^{\circ}) \times \cos(-730^{\circ})$

$\alpha = -1100^{\circ} = -20^{\circ} - 3 \cdot 360^{\circ}$, logo

$\alpha = -1100^{\circ} = (-30^{\circ}, -3)$ pertence ao 4.º quadrante, pelo que, $\tan\alpha < 0$.

$\beta = -730^{\circ} = -10^{\circ} - 2 \cdot 360^{\circ}$, logo $\beta = -730^{\circ} = (-10^{\circ}, -2)$ pertence ao 4.º quadrante, portanto, $\cos\beta > 0$.

Assim, $\tan(-1100^{\circ}) \cdot \cos(-730^{\circ}) < 0$, ou seja, é negativo.

2.3. $\tan(-120^\circ)+\cos(-40^\circ)$

$\alpha=-120^\circ$ pertence ao 3.º quadrante, pelo que, $\tan\alpha>0$.

$\beta=-40^\circ$ pertence ao 4.º quadrante, pelo que, $\cos\beta>0$.

Assim, $\tan(-120^\circ)+\cos(-40^\circ)>0$, ou seja, é positivo.

2.4. $\dfrac{\operatorname{sen}(-1280^\circ)\times\tan^2(-600^\circ)}{\cos(-420^\circ)}$

$\alpha=-1280^\circ=-200^\circ-3\cdot\ 360^\circ$, logo $\alpha=(-200^\circ,-3)$

pertence ao 2.º quadrante, portanto $\sin\alpha>0$.

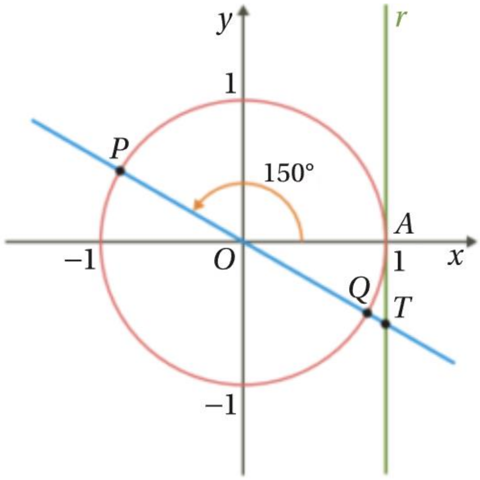
$p=-600^\circ=-240^\circ-360^\circ$, logo $\beta=(-240^\circ,-1)$ pertence ao 2.º quadrante, portanto $\tan\beta<0$ e, consequentemente, $\tan^2\beta>0$.

$\theta=-420^\circ=-60^\circ-360^\circ$, logo $\theta=(-60^\circ,-1)$ pertence ao 4.º quadrante, portanto, $\cos\theta>0$.

Assim $\dfrac{\sin(-1280^\circ)\cdot\ \tan^2(-600^\circ)}{\cos(-420^\circ)}>0$, ou seja, é positivo.

3. Na figura está representada a circunferência trigonométrica num referencial o.n. $Oxy$ .
Sabe-se que:

- o ponto $A$ tem coordenadas $(0,1)$;
- a reta $r$ é tangente à circunferência no ponto $A$ ;
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência, $A\hat{O}P = 150^o$ e $T$ é o ponto de interseção da reta $PQ$ com a reta $r$ .




3.1. Determine as coordenadas dos pontos $P$ e $T$ .

$P(\cos 150^o , \operatorname{sen} 150^o)$

$$\cos 150^o = \cos(180^o - 30^o) = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 150^o = \operatorname{sen}(180^o - 30^o) = \operatorname{sen} 30^o = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Como $r$ é tangente à circunferência de raio 1, então:

$T(1, \tan 150^o)$

$$\tan 150^o = \tan(180^o - 30^o) = -\tan 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore T\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

3.2. Determine o valor exato da medida do comprimento do segmento de reta $[QT]$.

$$\overline{QT} = \overline{PT} - \overline{QP} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} - 2 = \sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{4} + \frac{7+4\sqrt{3}}{12}} - 2 = \sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{2}} - 2 =$$

$$= \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$$

4. Determine o valor exato de:

4.1. $\left[\operatorname{sen}(-1845^\circ)-2\cos(-765^\circ)\right]^2-\tan(1125^\circ)$

$$\left(\sin(-1845^\circ)-2\cos(-765^\circ)\right)^2-\tan(1125^\circ)=$$

$$=\left(\sin(-45^\circ-5\cdot 360^\circ)-2\cos(-45^\circ-2\cdot 360^\circ)\right)^2$$
$$-\tan(45^\circ+3\cdot 360^\circ)=$$

$$=\left(\sin(-45^\circ)-2\cos(-45^\circ)\right)^2-\tan(45^\circ)=$$

$$=\left(-\sin 45^\circ-2\cos 45^\circ\right)^2-(\tan 45^\circ)=$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=\frac{9}{2}-1=\frac{7}{2}$$

4.2. $\operatorname{sen}(-1650^\circ)+3\cos(840^\circ)-\operatorname{sen}(2970^\circ)$

$$\sin(-1650^\circ)+3\cos(840^\circ)-\sin(2970^\circ)=$$

$$=\sin(-210^\circ-4\cdot 360^\circ)+3\cos(120^\circ+2\cdot 360^\circ)-$$
$$-\sin(90^\circ+8\cdot 360^\circ)=$$

$$=\sin(-210^\circ)+3\cos(120^\circ)-\sin(90^\circ)=$$

$$=\sin(-210^\circ+360^\circ)+3\cos(180^\circ-60^\circ)-1=$$

$$=\sin(150^\circ)-3\cos(60^\circ)-1=$$

$$=\sin(180^\circ-30^\circ)-3\cos(60^\circ)-1=$$

$$=\sin 30^\circ-3\cos(60^\circ)-1=\frac{1}{2}-3\left(\frac{1}{2}\right)-1=$$

$$=-1-1=-2$$

4.3. $\dfrac{\operatorname{sen}(-2220^{\circ})-\tan(-210^{\circ})}{\tan(-240^{\circ})-\cos(1260^{\circ})}$

$$\frac{\sin(-2220^{\circ})-\tan(-210^{\circ})}{\tan(-240^{\circ})-\cos(1260^{\circ})}=$$

$$=\frac{\sin(-60^{\circ}-6\cdot 360^{\circ})-\tan(-210^{\circ})}{\tan(-240^{\circ})-\cos(180^{\circ}+3\cdot 1080^{\circ})}=$$

$$=\frac{\sin(-60^{\circ})-\tan(-210^{\circ})}{\tan(-240^{\circ})-\cos(180^{\circ})}=$$

$$=\frac{-\sin(60^{\circ})-\tan(-210^{\circ}+360^{\circ})}{\tan(-240^{\circ}+360^{\circ})-\cos(180^{\circ})}=$$

$$=\frac{-\sin(60^{\circ})-\tan(150^{\circ})}{\tan(120^{\circ})-\cos(180^{\circ})}=$$

$$=\frac{-\sin(60^{\circ})-\tan(180^{\circ}-30^{\circ})}{-\tan(180^{\circ}-60^{\circ})-\cos(180^{\circ})}=$$

$$=\frac{-\sin(60^{\circ})+\tan 30^{\circ}}{-\tan(60^{\circ})-(-1)}=$$

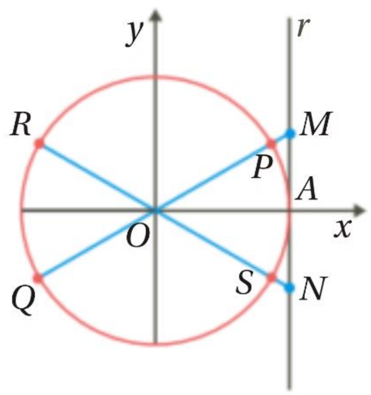
$$=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{-\sqrt{3}+1}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{3}+1}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}}{1^{2}-\left(\sqrt{3}\right)^{2}}=-\frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}}{1-3}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{1}{4}$$

4.4. $\left(\cos(-405^\circ)-\tan(585^\circ)\right)\left(\text{sen}(2565^\circ)+\cos(-405^\circ)\right)$

$$\left(\cos(-405^\circ)-\tan(585^\circ)\right)\left(\sin(2565^\circ)+\cos(-405^\circ)\right)=$$
$$=\left(\cos(-45^\circ-360^\circ)-\tan(225^\circ+360^\circ)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sin(45^\circ+7\cdot\ 360^\circ)+\cos(-45^\circ-360^\circ)\right)=$$
$$=\left(\cos(-45^\circ)-\tan(225^\circ)\right)\left(\sin(45^\circ)+\cos(-45^\circ)\right)=$$
$$=\left(\cos(45^\circ)-\tan(180^\circ+45^\circ)\right)\left(\sin(45^\circ)+\cos(45^\circ)\right)=$$
$$=\left(\cos(45^\circ)-\tan(45^\circ)\right)\left(\sin(45^\circ)+\cos(45^\circ)\right)=$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\sqrt{2}=\frac{2}{2}-\sqrt{2}=1-\sqrt{2}$$

5. Na figura está representada a circunferência trigonométrica num referencial o.n. $Oxy$ .




Sabe-se que:

- o ponto $A$ tem coordenadas $(1,0)$;
- a reta $r$ é tangente à circunferência no ponto $A$ ;
- $[PQ]$ e $[RS]$ são diâmetros da circunferência;
- $A\hat{O}P=30^\circ$ e $A\hat{O}R=150^\circ$ ;
- as retas $PQ$ e $RS$ intersetam a reta $r$ nos pontos $M$ e $N$ , respetivamente.

Determine:

5.1. As coordenadas dos $P$ , $M$ e $Q$ ;

$$P(\cos 30^\circ,\text{sen}\,30^\circ)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$M(1,\tan 30^\circ)=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$Q$ é a imagem de $P$ pela reflexão central de centro $O$. Logo, $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$

**5.2.** $\operatorname{sen}210^\circ$ e $\cos 210^\circ$;

$A\hat{O}Q = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

Como $Q$ tem coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, então $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}210^\circ = -\frac{1}{2}$

**5.3.** As coordenadas do ponto $R$;

$R(\cos 150^\circ, \operatorname{sen}150^\circ)$

$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen}150^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$

$R\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**5.4.** $\operatorname{sen}330^\circ$ e $\cos 330^\circ$;

$S$ é a imagem de $R$ pela reflexão central de centro $O$.

Logo, $S$ tem coordenadas $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Portanto, como $P\hat{O}S = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$, temos $\operatorname{sen}330^\circ = -\frac{1}{2}$ e $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**5.5.** As coordenadas do ponto $N$.

$N$ é a imagem de $M$ pela reflexão de eixo $Ox$.

Logo, $N\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$