SUCESSÕES: PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA RESOLUÇÃO MD

1. Considere a sucessão v_n definida por $\begin{cases} v_1 = 4 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \ , \ n \in IN^+ \end{cases}$

1.1. Determine os três primeiros termos da sucessão.

$v_1 = 4 \ ; \ v_2 = v_1 - 2 = 4 - 2 = 2 \ , \ v_3 = v_2 - 2 = 2 - 2 = 0$

1.2. Mostre que v_n é uma progressão aritmética de razão -2

$v_{n+1} = v_n - 2 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = -2$, logo é uma progressão aritmética de razão -2

1.3. Escreva o termo geral de v_n

$v_n = v_1 + (n-1)r \Leftrightarrow v_n = 4 + (n-1)\times(-2) \Leftrightarrow v_n = 4 - 2n + 2 \Leftrightarrow v_n = -2n + 6$

1.4. Determine a ordem a partir da qual os termos são inferiores a -500

$-2n + 6 < -500 \Leftrightarrow -2n < -506 \Leftrightarrow 2n > 506 \Leftrightarrow n > 253$

Portanto, a partir da ordem 254

2. Considere a sucessão u_n definida por $u_n = 3 - 5n$

2.1. Determine os três primeiros termos da sucessão.

$u_1 = 3 - 5\times 1 = -2 \ ; \ u_2 = 3 - 5\times 2 = -7 \ ; \ u_3 = 3 - 5\times 3 = -12$

2.2. Mostre que u_n é uma progressão aritmética e indique a respetiva razão.

$u_{n+1} - u_n = 3 - 5(n+1) - (3 - 5n) = 3 - 5n - 5 - 3 + 5n = -5 \ , \forall n \geq 1$

A razão da progressão é -5

2.3. Quantos termos da progressão pertencem ao intervalo $[-200, -100]$

$-200 \leq 3 - 5n \leq -100 \Leftrightarrow -203 \leq -5n \leq -103 \Leftrightarrow 103 \leq 5n \leq 203 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{103}{5} \leq n \leq \frac{203}{5} \Leftrightarrow 20{,}6 \leq n \leq 40{,}6$

Como $n \in IN$, são os termos u_{21} ao u_{40} , inclusive, isto é, $40 - 21 + 1 = 20$

Pertencem 20 termos

3. Determine a razão, nos casos em que não é dada, e escreve uma expressão do termo geral da progressão aritmética, u_n, sabendo-se que:

3.1. $u_1 = 2$ e $r = 5$

$u_n = 2 + 5(n-1) = 2 + 5n - 5 = 5n - 3$

3.2. $u_4 = 8$ e $r = -2$

$u_n = u_4 + (n-4)r = 8 + (n-4)\times(-2) = 8 - 2n + 8 = -2n + 16$

3.3. $u_2 = 12$ e $u_4 = 6$

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + (2-1)r \\ u_4 = u_1 + (4-1)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = u_1 + r \\ 6 = u_1 + 3r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = 6 - 3r + r \\ u_1 = 6 - 3r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -2r \\ u_1 = 6 - 3r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -3 \\ u_1 = 6 - 3\times(-3) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} r = -3 \\ u_1 = 15 \end{cases}$$

Assim, $u_n = 15 + (n-1)\times(-3) = -3n + 18$

3.4. $u_5 = 30$ e $u_{20} = 45$

$u_{20} = u_5 + 15r \Leftrightarrow 45 = 30 + 15r \Leftrightarrow 15 = 15r \Leftrightarrow r = 1$

$u_n = u_5 + (n-5)r \Leftrightarrow u_n = 30 + (n-5)\times 1 \Leftrightarrow u_n = 30 + n - 5 \Leftrightarrow u_n = n + 25$

3.5. $u_8 = 10$ e $u_{12} = -2$

$u_{12} = u_8 + 4r \Leftrightarrow -2 = 10 + 4r \Leftrightarrow -12 = 4r \Leftrightarrow r = -3$

$u_n = u_8 + (n-8)\times r \Leftrightarrow u_n = 10 + (n-8)\times(-3) \Leftrightarrow u_n = 10 - 3n + 24 \Leftrightarrow u_n = 34 - 3n$

3.6. $u_3 = 4$ e $u_5 = 0$

$$\begin{cases} u_3 = u_1 + (3-1)r \\ u_5 = u_1 + (5-1)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = u_1 + 2r \\ 0 = u_1 + 4r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -4r + 2r \\ u_1 = -4r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -2r \\ u_1 = -4r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -2 \\ u_1 = -4\times(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -2 \\ u_1 = 8 \end{cases}$$

Assim, $u_n = 8 + (n-1)\times(-2) = -2n + 10$

4. De uma progressão aritmética, v_n, sabe-se que $v_1=12$ e que $v_4=24$.

Averigue se 116 é termo da sucessão. Em caso afirmativo, indique a respetiva ordem.

$v_4=v_1+(4-1)r \Leftrightarrow 24=12+3r \Leftrightarrow 3r=12 \Leftrightarrow r=4$

$v_n=v_1+(n-1)r=12+(n-1)4=12+4n-4=4n+8$

$4n+8=116 \Leftrightarrow 4n=108 \Leftrightarrow n=\frac{108}{4} \Leftrightarrow n=27 \in IN$

Portanto, 116 é o termo de ordem 27 da sucessão.

5. De uma progressão aritmética, u_n, sabe-se que $u_3+u_5=218$ e que $u_2=-10$

Determine o termo geral da sucessão u_n.

$$\begin{cases} u_3+u_5=218 \\ u_2=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+2r+u_1+4r=218 \\ u_1+r=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1+6r=218 \\ u_1=-10-r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-10-r)+6r=218 \\ u_1=-10-r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -20-2r+6r=218 \\ u_1=-10-r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4r=238 \\ u_1=-10-r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=59{,}5 \\ u_1=-10-59{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=59{,}5 \\ u_1=-69{,}5 \end{cases}$$

$u_n=-69{,}5+(n-1)\times 59{,}5=-69{,}5+59{,}5n-59{,}5=59{,}5n-129$

6. Seja u_n uma progressão aritmética de razão 10 e termos positivos.

Sabe-se que o produto de dois termos consecutivos dessa progressão é igual a 24.
Determine esses termos.

$u_n \times u_{n+1}=24 \underset{u_{n+1}=u_n+10}{\Leftrightarrow} u_n(u_n+10)=24 \Leftrightarrow u_n^2+10u_n-24=0 \Leftrightarrow u_n=-12 \vee u_n=2$

Como u_n é uma suceesão de termos positivos, então, $u_n=2$ e $u_{n+1}=2+10=12$

Portanto os termos consecutivos são 2 e 12

7. Determine a razão de uma progressão aritmética u_n, sabendo que:

$u_{n+1}-u_{n-1}=5 \ , \ \forall n \in IN \setminus \{0,1\}$

$u_{n+1}-u_{n-1}=5 \Leftrightarrow u_n+r-(u_n-r)=5 \Leftrightarrow \cancel{u_n}+r-\cancel{u_n}+r=5 \Leftrightarrow 2r=5 \Leftrightarrow r=\frac{5}{2}$

8. Seja u_n uma sucessão que verifica a condição $u_{n+1}-u_n=\left(k^2-9\right)n+k$, $n\in IN^+$, e em que k representa um número real.

Determine o valor de k para o qual a sucessão u_n é uma progressão aritmética decrescente.

Como u_n é uma progressão aritmética, a diferença entre termos consecutivos é constante.

$n=1$

$u_2-u_1=\left(k^2-9\right)\times 1+k$

$n=2$

$u_3-u_2=\left(k^2-9\right)\times 2+k$

Assim, $u_2-u_1=u_3-u_2 \Leftrightarrow k^2-9+\cancel{k}=2k^2-18+\cancel{k}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2-2k^2=-18+9$

$\Leftrightarrow k^2=9$

$\Leftrightarrow k=-3 \vee k=3$

u_n é decresente se a razão for negativa, logo $k=-3$

9. Seja a um número real diferente de zero.

Sabe-se que a , a^2 e $10a$ são os três primeiros termos de uma progressão aritmética u_n

Determine u_{10}

Como u_n é uma progressão aritmética, a diferença entre termos consecutivos é constante.

$a^2-a=10a-a^2 \Leftrightarrow 2a^2-11a=0\Leftrightarrow a(2a-11)=0\Leftrightarrow a=0 \vee 2a=11\Leftrightarrow \underset{\substack{\text{Impossível}\\ a\neq 0}}{a=0} \vee a=\frac{11}{2}$

Assim, $u_1=\frac{11}{2}$, $u_2=\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{121}{4}$ e $u_3=10\times\frac{11}{2}=55$

Como u_n é uma progressão aritmética, então, $r=u_2-u_1=\frac{121}{4}-\frac{11}{2}=\frac{99}{4}$

$u_{10}=u_1+9r=\frac{11}{2}+9\times\frac{99}{4}=\frac{913}{4}$

10. Considere a progressão aritmética v_n definida por $v_n = 3n+1$

Determine:

10.1. $v_1 + v_2 + \cdots + v_{50}$

$v_1 = 3\times 1+1 = 4$ e $v_{50} = 3\times 50+1 = 151$

$$S_{50} = \frac{v_1 + v_{50}}{2}\times 50 = \frac{4+151}{2}\times 50 = 3875$$

10.2. $v_{12} + v_{13} + \cdots + v_{100}$

$v_{12} = 3\times 12+1 = 37$ e $v_{100} = 3\times 100+1 = 301$

$$S = \frac{v_{12} + v_{100}}{2}\times(100-12+1) = \frac{37+301}{2}\times 89 = 15041$$

11. Considere a progressão aritmética v_n definida por $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + 4 \end{cases}, \ n \in IN^+$

Determine a soma dos vinte primeiros termos da progressão.

$v_{n+1} = v_n + 4 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = 4$, logo a razão é 4

$v_n = v_1 + (n-1)r = 1 + (n-1)\times 4 = 4n-3$

$v_{20} = 4\times 20 - 3 = 77$

$$S_{20} = \frac{u_1 + u_{20}}{2}\times 20 = \frac{1+77}{2}\times 20 = 78\times 10 = 780$$

12. Seja u_n uma progressão aritmética em que $u_{15} -51$ e $u_{30} = -111$

12.1. Mostre que, para todo $n \in IN \setminus \{0\}$, $u_n = -4n+9$

$u_{30} = u_{15} + 15r \Leftrightarrow -111 = -51 + 15r \Leftrightarrow -60 = 15r \Leftrightarrow r = -4$

$u_n = u_{15} + (n-15)r = -51 + (n-15)\times(-4) = -51 - 4n + 60 = 9 - 4n$ c.q.m.

12.2. Calcule a soma dos primeiros 35 termos.

$$S_{35} = \frac{u_1 + u_{35}}{2}\times 35 = \frac{9-4\times 1+9-4\times 35}{2}\times 35 = -2\,205$$

12.3. Calcule a soma dos termos compreendidos entre u_{10} e u_{35}, inclusive.

$$S=\frac{u_{10}+u_{35}}{2}\times(35-10+1)=\frac{9-4\times10+9-4\times35}{2}\times26=-2\,106$$

13. Seja u_n uma progressão aritmética. Sabe-se que $u_5+u_8=-15$ e que o primeiro termo é o triplo do terceiro.

Determine a soma dos quinze primeiros termos da progressão.

$$\begin{cases}u_5+u_8=-15\\u_1=3u_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+4r+u_1+7r=-15\\u_1=3(u_1+2r)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+11r=-15\\u_1=3u_1+6r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2u_1-11r=15\\-2u_1=6r\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6r-11r=15\\-2u_1=6r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5r=15\\-2u_1=6r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=-3\\-2u_1=6\times(-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=-3\\-2u_1=-18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=-3\\u_1=9\end{cases}$$

$$u_{15}=u_1+14r=9+14\times(-3)=-33$$

$$S_{15}=\frac{u_1+u_{15}}{2}\times15=\frac{9-33}{2}\times15=-180$$

14. De uma progressão aritmética u_n, sabe-se que $u_5=22$ e que a soma dos dez primeiros termos é igual a 250.

Averigue se 3450 é termo da progressão.

$$\begin{cases}u_5=u_1+4r\\S_{10}=250\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}22=u_1+4r\\\frac{u_1+u_{10}}{2}\times10=250\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}22=u_1+4r\\u_1+u_1+9r=\frac{250}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=22-4r\\2u_1+9r=50\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=22-4r\\2(22-4r)+9r=50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=22-4r\\44-8r+9r=50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=22-4\times6\\r=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-2\\r=6\end{cases}$$

$$u_n=u_1+(n-1)r=-2+(n-1)\times6=-2+6n-6=6n-8$$

$$6n-8=3\,450\Leftrightarrow6n=3\,458\Leftrightarrow n=\frac{3\,458}{6}\Leftrightarrow n\approx576{,}3\notin IN$$

Logo, 3 450 não é termo da sucessão

15. De uma progressão aritmética u_n, sabe-se que o sétimo termo é igual ao dobro do segundo e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 57.

Sabe-se que 500 é termo da sucessão u_n

Determine a ordem desse termo.

Seja r a razão d aprogressão aritmética, u_n

$$\begin{cases} u_7 = 2u_2 \\ S_{12} = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6r = 2(u_1 + r) \\ \dfrac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6r = 2u_1 + 2r \\ (u_1 + u_1 + 11r) \times 6 = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4r \\ 12u_1 + 66r = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4r \\ 12 \times 4r + 66r = 57 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4r \\ 114r = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \times \dfrac{1}{2} \\ r = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ r = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$u_n = 2 + \frac{1}{2}(n-1) = 2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} = \frac{n+3}{2}$$

$$u_n = 500 \Leftrightarrow \frac{n+3}{2} = 500 \Leftrightarrow n + 3 = 1000 \Leftrightarrow n = 997$$

Portanto, 500 é termo de ordem 997

16. Determine a soma dos primeiros 340 número ímpares.

O termo geral da sucessão de números ímpares é $2n-1$

Assim, $S_{340} = \dfrac{u_1 + u_{340}}{2} \times 340 = (1 + 2 \times 340 - 1) \times 170 = 115\,600$

17. Calcule a soma dos múltiplos de 5 maiores que 42 e menores que 448

O menor múltiplo de 5 maior que 42 é $\dfrac{42}{5} = 8{,}4$, logo, como $n \in IN$, $n = 9$, então, $5 \times 9 = 45$

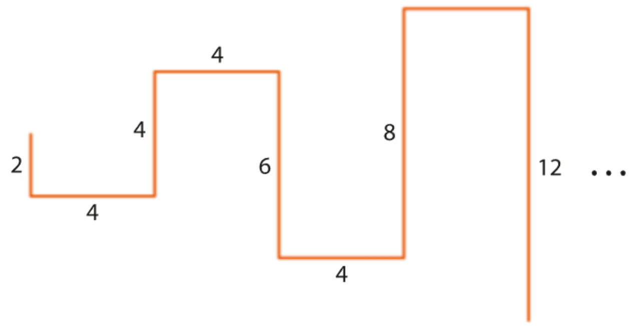
O maior múltiplo de 5 menor que 448 é $\dfrac{448}{5} = 89{,}6$, logo, como $n \in IN$, $n = 89$, então, $89 \times 5 = 445$

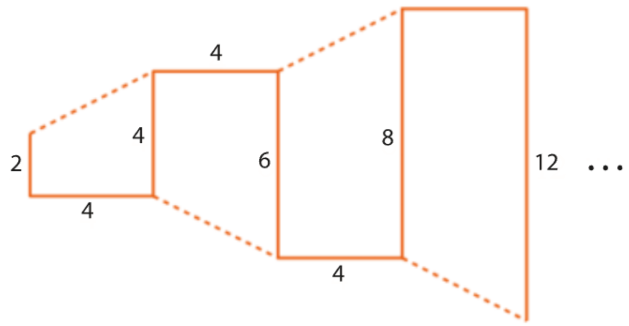
Os múltiplos de 5 são termos de uma progressão aritmética de razão 5, isto é, $u_n = 5n$

$$S = \frac{u_9 + u_{89}}{2} \times (89 - 9 + 1) = \frac{45 + 445}{2} \times 81 = 19\,845$$

18. Na figura, está representada parte de uma linha poligonal, com segmentos de reta posicionados, alternadamente, na vertical e na horizontal. Os segmentos de reta posicionados na horizontal medem 4 cm. O primeiro segmento de reta posicionado na vertical mede 2 cm, o segundo mede 4 cm, o terceiro mede 6 cm, e assim sucessivamente.

A partir desta linha poligonal, foi construída uma composição geométrica, constituída por trapézios retângulos, como se ilustra na figura da direita.





Se a área da composição geométrica for igual a 38,40 dm^2, quantos serão os trapézios que as constituem?

Justifique a resposta.

Área do trapézio 1: $\dfrac{2+4}{2}\times 4=12$

Área do trapézio 2: $\dfrac{4+6}{2}\times 4=20$

Área do trapézio 3: $\dfrac{6+6}{2}\times 4=28$

$\ddots$

C.A.
A sucessão que dá as áreas dos trapézios é uma progressão aritmética de razão 8, assim, o termo geral é $12+8(n-1)=8n+4$

Área do trapézio n: $8n+4$

Assim, $S_n = \underbrace{3840}_{\substack{38{,}40\ \text{dm}^2= \\ =3840\,\text{dm}}} \Leftrightarrow \dfrac{12+8n+4}{2}\times n=3840 \Leftrightarrow (4n+8)\times n=3840 \Leftrightarrow 4n_2+8n-3840=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n=-32 \vee n=30 \underbrace{\Leftrightarrow}_{n\in IN^+} n=30$

Portanto a composição é constituída por 30 trapézios

19. Seja u_n uma progressão aritmética definida por $u_n = 4+3n$.

Determine a soma dos quinze primeiros termos de ordem ímpar da progressão.

O primeiro termo de ordem ímpar da progressão é $u_1 = 4+3\times 1 = 7$

A razão da progressão é 3, pelo que a razão da progressão dos termos de ordem ímpar é 6.

A progressão dos termos de ordem ímpar tem termo geral $7+(n-1)\times 6 = 7+6n-6 = 6n+1$

Logo, a soma dos 15 primeiros termos de ordem ímpar da sucessão é

$$S_{15} = \frac{u_1+u_{15}}{2}\times 15 = \frac{7+6\times 15+1}{2}\times 15 = 735$$

20. Seja x um número real diferente de zero.

Sabe-se que $2x$, x^2 e $6x$ são os primeiros termos de uma progressão aritmética, u_n.

Determine $u_{10}+u_{11}+\cdots+u_{25}$

Como u_n é uma progressão aritmética, a razão é

$$x^2-2x = 6x-x^2 \Leftrightarrow 2x^2-8x=0 \Leftrightarrow x(2x-8)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x=0}_{\substack{\text{impossível}\\ x\neq 0}} \vee x=4$$

$$u_1 = 2\times 4 = 8 \;\; ; \;\; u_2 = 4^2 = 16 \;\; ; \;\; u_3 = 6\times 4 = 24$$

$$u_2 - u_1 = 16-8 = 8$$

Pelo que o termo geral da progressão é

$$u_n = 8+(n-1)\times 8 = 8+8n-8 = 8n$$

Portanto, a soma dos termos de ordem 10 a 25 é

$$S_{25}-S_9 = \frac{u_1+u_{25}}{2}\times 25 - \frac{u_1+u_9}{2}\times 9 = \frac{8+8\times 25}{2}\times 25 - \frac{8+8\times 9}{2}\times 25 = 2\,600-360 = 2\,240$$

21. De uma progressão aritmética, v_n, sabe-se que $v_3 = 0$ e que a soma dos vinte primeiros termos é igual a 600.

Determine o termo geral de v_n

$$\begin{cases} v_3 = v_1+2r \\ v_{20} = v_1+19r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_3-2r \\ v_{20} = v_1+19r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0-2r \\ v_{20} = v_1+19r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -2r \\ v_{20} = -2r+19r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -2r \\ v_{20} = 17r \end{cases}$$

$$S_{20} = 600 \Leftrightarrow \frac{v_1+v_{20}}{2}\times 20 = 600 \Leftrightarrow (v_1+v_{20})\times 10 = 600 \Leftrightarrow -2r+17r = 60 \Leftrightarrow 15r = 60 \Leftrightarrow r = 4$$

$$v_1 = -2\times 4 = -8$$

$$v_n = -8+(n-1)\times 4 \Leftrightarrow v_n = -8+4n-4 \Leftrightarrow u_n = 4n-12$$

22. De uma progressão aritmética, v_n, sabe-se que:

- $v_6 = 15$
- a soma dos seus vinte primeiros termos é o triplo da soma dos seus dez primeiros termos.

Averigue se 85 é termo da sucessão. Em caso afirmativo, indique a respetiva ordem.

$$\begin{cases} v_6 = v_1 + 5r \\ v_{20} = v_1 + 19r \\ v_{10} = v_1 + 9r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_6 - 5r \\ v_{20} = v_1 + 19r \\ v_{10} = v_1 + 9r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 15 - 5r \\ v_{20} = 15 - 5r + 19r \\ v_{10} = 15 - 5r + 9r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 15 - 5r \\ v_{20} = 15 + 14r \\ v_{10} = 15 + 4r \end{cases}$$

$$S_{20} = 3S_{10} \Leftrightarrow \frac{v_1 + v_{20}}{2} \times 20 = 3\left(\frac{v_1 + v_{10}}{2} \times 10\right) \Leftrightarrow (15 - 5r + 15 + 14r) \times 10 = 3(15 - 5r + 15 + 4r) \times 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (30 + 9r) \times 10 = 15 \times (39 - r) \Leftrightarrow 300 + 90r = 450 - 15r \Leftrightarrow 105r = 150 \Leftrightarrow r = \frac{10}{7}$$

$$v_1 = 15 - 5 \times \frac{10}{7} = \frac{55}{7}$$

$$v_n = \frac{55}{7} + (n-1) \times \frac{10}{7} = \frac{55}{7} + \frac{10}{7}n - \frac{10}{7} = \frac{10}{7}n + \frac{45}{7} = \frac{10n + 45}{7}$$

$$v_n = 85 \Leftrightarrow \frac{10n + 45}{7} = 85 \Leftrightarrow 10n - 45 = 595 \Leftrightarrow 10n = 550 \Leftrightarrow n = 55$$

Portanto, 85 é o termo de ordem 55

23. Verifique se a sucessão cujos primeiros termos estão a seguir indicados, pode ser uma progressão geométrica e, em caso afirmativo, escreva a respetiva razão.

23.1. 2 , 8 , 32 , 128 , ...

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{2} = 4$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{32}{8} = 4$; $\frac{u_4}{u_3} = \frac{128}{32} = 4$; é uma progressão aritmética de razão 4

23.2. -1 , 3 , -9 , 12 , ...

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{-1} = -3$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{-9}{3} = -3$; $\frac{u_4}{u_3} = \frac{12}{-9} = -\frac{4}{3}$

Como $-\frac{4}{3} \neq -3$ não é uma progressão aritmética

23.3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$; $\frac{u_4}{u_3} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{3}$; é uma progressão aritmética de razão $\frac{2}{3}$

23.4. $1\,,\ \sqrt{2}\,,\ 2\,,\ \sqrt{8}\,,\ \ldots$

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}\ \ ;\ \ \frac{u_3}{u_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\ \ ;\ \ \frac{u_4}{u_3}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

É uma progressão aritmética de razão $\sqrt{2}$

24. Das sucessões seguintes, definidas pelo respetivo termo geral, identifique as que são progressões geométricas.

24.1. $u_n=\dfrac{4^n}{3}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{4^{n+1}}{3}}{\dfrac{4^n}{3}}=\frac{4^n\times 4}{4^n}=4$$, logo, u_n é uma progressão geométrica de razão 4

24.2. $v_n=\dfrac{3^n}{5^{n+1}}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\dfrac{3^{n+1}}{5^{n+2}}}{\dfrac{3^n}{5^{n+1}}}=\frac{\dfrac{3^n\times 3}{5^{n+1}\times 5}}{\dfrac{3^n}{5^{n+1}}}=\frac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{1}{2}}=\frac{3}{5}$$, logo, v_n é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{3}{5}$

24.3. $w_n=n\times 3^n$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{(n+1)\times 3^{n+1}}{n\times 3^n}=\frac{(n+1)\times 3^n\times 3}{n\times 3^n}=\frac{3n+3}{n}$$, como não é constante, não é uma progressão geométrica

25. Considere a sucessão (v_n) definida por $v_n=\begin{cases} v_1=4 \\ v_{n+1}=\dfrac{v_n}{2}\ ,\ n\in IN^+ \end{cases}$

25.1. Determine os três primeiros termos da sucessão.

$$v_1=4\ \ ;\ \ v_2=\frac{v_1}{2}=\frac{4}{2}=2\ \ ;\ \ v_3=\frac{v_2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

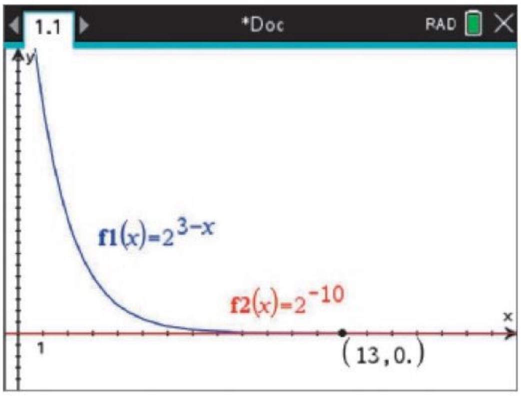
25.2. Mostre que (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$

$$v_{n+1}=\frac{v_n}{2}\Leftrightarrow\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}\ ,\ \forall n\in IN$$

25.3. Escreva o termo geral de (v_n)

$$v_n = v_1 \times r^{n-1} = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\times 2 = 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

25.4. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a ordem a partir da qual os termos são inferiores a 2^{-10}



$n > 13$, logo o termos são inferiores a 2^{-10} a partir da ordem 14

26. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2\times 3^{-n}$

26.1. Determine os três primeiros termos da sucessão.

$u_n = 2\times 3^{-n}$

$u_1 = 2\times 3^{-1} = 2\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $u_2 = 2\times 3^{-2} = 2\times\frac{1}{3^2} = \frac{2}{9}$, $u_3 = 2\times 3^{-3} = 2\times\frac{1}{3^3} = \frac{2}{27}$

26.2. Mostre que (u_n) é uma progressão geométrica e indique a respetiva razão.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\times 3^{-(n+1)}}{2\times 3^{-n}} = \frac{3^{-n}\times 3^{-1}}{3^{-n}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, $\forall n \in IN$, é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$

27. Determine a razão, nos casos em que não é dada, e escreva uma expressão do termo geral da progressão geométrica (u_n), sabendo que:

27.1. $u_1 = -1$ e $r = 2$

$$u_n = u_1\times r^{n-1} = -1\times 2^{n-1} = -1\times 2^n\times 2^{-1} = \frac{1}{2}\times 2^n$$

27.2. $u_4 = 8$ e $r = -2$

$$u_n = u_k\times r^{n-k} = 8\times(-2)^{n-4} = 8\times(-2)^n\times 2^{-4} = 8\times(-2)^n\frac{1}{2^4} = \frac{8}{16}\times(-2)^n = \frac{1}{2}\times(-2)^n$$

27.3. $u_2 = 2$, $u_4 = 18$ e a razão é positiva

$$\frac{u_4}{u_2} = r^2 \Leftrightarrow \frac{18}{2} = r^2 \underset{r>0}{\Leftrightarrow} r = 3$$

$$u_n = u_k \times u^{n-k} = 2 \times 3^{n-2} = 2 \times 3^n \times 3^{-2} = \frac{2}{9} \times 3^n$$

27.4. $u_3 = 4$, $u_5 = 1$ e a razão é negativa

$$\frac{u_5}{u_3} = r^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = r^2 \underset{n<0}{\Leftrightarrow} r = -\frac{1}{2}$$

$$u_n = u_3 \times r^{n-3} = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times (-8) = -32 \times (-2)^{-n}$$

28. De uma progressão geométrica, (v_n), sabe-se que $v_2 = 40$ e $v_5 = 135$

Determine o sétimo termo da sucessão.

$$\frac{v_5}{v_3} = r^3 \Leftrightarrow \frac{135}{40} = r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}$$

$$v_7 = v_3 \times r^{7-3} = 40 \times \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{1215}{4}$$

29. Considere uma progressão geométrica, de razão positiva. Sabe-se que a soma de dois termos consecutivos dessa progressão é igual a 120 e que a sua diferença é igual a 40.

Determine esses termos e a razão da progressão.

$$\begin{cases} u_n + u_{n+1} = 120 \\ u_{n+1} - u_n = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n + u_{n+1} = 120 \\ u_{n+1} = 40 + u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n + 40 + u_n = 120 \\ u_{n+1} = 40 + u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_n = 80 \\ u_{n+1} = 40 + u_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_n = 40 \\ u_{n+1} = 40 + 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = 40 \\ u_{n+1} = 80 \end{cases}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{80}{40} = 2$$

30. Três termos consecutivos de uma progressão geométrica são dados, para um determinado valor de x, respetivamente, por $x-2$, $x+1$ e $x+7$

Determine os valores desses termos.

$$\frac{x+1}{x-2}=\frac{x+7}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2=(x-2)(x+7) \text{ , com } x\neq 2 \wedge x\neq -1$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+2x+1=\cancel{x^2}+5x-14$$
$$\Leftrightarrow -3x=-15$$
$$\Leftrightarrow x=5$$

$5-2=3$, $5+1=6$ e $5+7=12$

31. De uma progressão, (v_n), sabe-se que $v_4=96$ e que $v_3=9v_1$.

Determine v_6

$$v_3=9v_1 \Leftrightarrow \frac{v_3}{v_1}=9 \Leftrightarrow r^2=9$$
$$v_6=v_4\times r^{6-4}=96\times r^2=96\times 9=864$$

32. De uma progressão geométrica, (u_n), sabe-se que $u_5=27u_8$ e que $u_3=1$.

Determine o termo geral de (u_n)

Apresente a resposta na forma $a\times b^n$, em que a e b não números reais.

$$u_5=27u_8 \Leftrightarrow \frac{u_5}{u_8}=27 \Leftrightarrow \frac{u_8}{u_5}=\frac{1}{27} \Leftrightarrow r^3=\frac{1}{27} \Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{1}{27}} \Leftrightarrow r=\frac{1}{3}$$

$$u_n=u_3\times r^{n-3}=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27\times 3^{-n}$$

33. A medida do lado, o perímetro e a área de um quadrado estão, nesta ordem, em progressão geométrica. Qual é a área do quadrado?

$u_1 = l \longrightarrow$ lado do quadrado

$u_2 = 4l \longrightarrow$ perímetro do quadrado

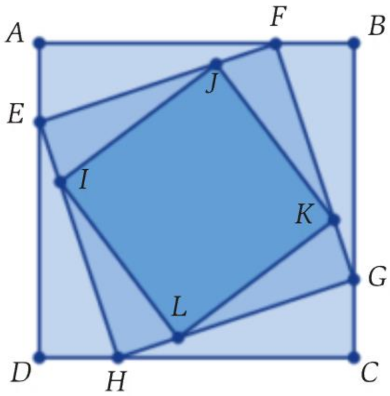
$u_3 = l^2 \longrightarrow$ área do quadrado

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{4l}{l} = 4$; $\frac{u_3}{u_2} = \frac{l^2}{4l} = \frac{l}{4}$

Como é uma progressão geométrica, então, $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_4} \Leftrightarrow 4 = \frac{l}{4} \Leftrightarrow l = 16$

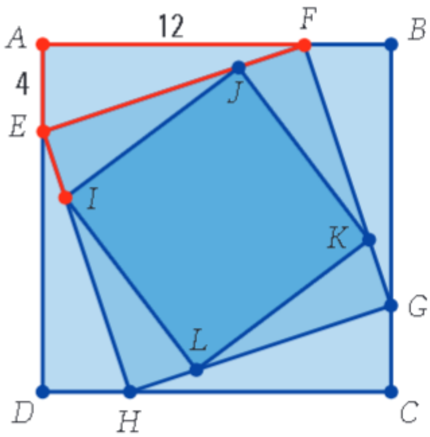
Logo, $A_{\text{quadrado}} = l^2 = 16^2 = 256$

34. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ cujo lado mede 16 unidades.
Os quadrados que se construíram a partir deste, obtiveram-se, dividindo cada lado em quatro partes iguais.



34.1. Indique a medida do lado de cada um dos quadrados desenhados.

Quadrado $[EFGH]$:



$\overline{AF} = \frac{3}{4} \times \overline{AB} = \frac{3}{4} \times 16 = 12$

$\overline{AE} = \frac{1}{4} \times \overline{AD} = \frac{1}{4} \times 16 = 4$

$\overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{AE}^2 \Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 12^2 + 4^2$

$\Leftrightarrow \overline{EF}^2 = 144 + 16$

$\Leftrightarrow \overline{EF} = \sqrt{160}$

$\overline{EF} > 0$

$\Leftrightarrow \overline{EF} = 4\sqrt{10}$

Quadrado $[JKLI]$:

$$\overline{EJ}=\frac{3}{4}\overline{EF}=\frac{3}{4}\times 4\sqrt{10}=3\sqrt{10}$$

$$\overline{EI}=\frac{1}{4}\overline{EH}=\frac{1}{4}\times 4\sqrt{10}=\sqrt{10}$$

$$\overline{IJ}^2=\overline{EJ}^2+\overline{EI}^2 \Leftrightarrow \overline{IJ}^2=\left(3\sqrt{10}\right)^2+\left(\sqrt{10}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{IJ}^2=90+10$$

$$\Leftrightarrow \overline{IJ}=\sqrt{100}$$

$$\underset{\overline{IJ}>0}{\Leftrightarrow} \overline{IJ}=10$$

34.2. Considere a sucessão (l_n) das medidas dos lados dos quadrados que se podem formar utilizando este processo repetidamente.

a) Prove que esta sucessão é uma progressão geométrica e indique a respetiva razão.

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{4\sqrt{10}}{16}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\frac{l_3}{l_2}=\frac{10}{4\sqrt{10}}=\frac{10\sqrt{10}}{4\times 10}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$l_{n+1}^2=\left(\frac{3}{4}l_n\right)^2+\left(\frac{1}{4}l_n\right)^2 \Leftrightarrow l_{n+1}^2=\frac{9}{16}l_n^2+\frac{1}{16}l_n^2 \Leftrightarrow l_{n+1}^2=\frac{10}{16}l_n^2 \underset{l_{n+1}>0}{\Leftrightarrow} l_{n+1}=\sqrt{\frac{10}{16}l_n^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l_{n+1}=\frac{\sqrt{10}}{4}l_n \Leftrightarrow \frac{l_{n+1}}{l_n}=\frac{\sqrt{10}}{4}, \quad \forall n\in IN$$

Logo, (l_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{\sqrt{10}}{4}$

b) Prove que, para todo o número natural n, $l_n=2^{\frac{11-3n}{2}}\times 5^{\frac{n-1}{2}}$

$$l_1=16 \text{ e } r=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$l_n=l_1\times r^{n-1}=16\times\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}=2^4\times\left(\frac{10^{\frac{1}{2}}}{2^2}\right)^n\times\left(\frac{10^{\frac{1}{2}}}{2^2}\right)^{-1}=2^4\times\frac{10^{\frac{n}{2}}}{2^{2n}}\times\frac{10^{-\frac{1}{2}}}{2^{-2}}=$$

$$=2^{4-2n+2}\times(2\times 5)^{\frac{n}{2}}\times(2\times 5)^{-\frac{1}{2}}=2^{6-2n}\times 2^{\frac{n}{2}}\times 5^{\frac{n}{2}}\times 2^{-\frac{1}{2}}\times 5^{-\frac{1}{2}}=2^{6-2n+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}=2^{\frac{12-4n+n-1}{2}}\times 5^{\frac{n-1}{2}}=$$

$$=2^{\frac{11-3n}{2}}\times 5^{\frac{n-1}{2}} \qquad \text{c.q.m.}$$

34.3. Considere a sucessão (A_n) das áreas destes quadrados. Justifique que se trata de uma progressão geométrica, indicando a razão e escrevendo uma expressão do termo geral.

$$A_n = l_n^2 = \left(16\times\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1}\right)^2 = 16^2\times\left(\frac{\left(\sqrt{10}\right)^2}{4^2}\right)^{n-1} = 16^2\times\left(\frac{10}{16}\right)^{n-1} = 256\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{256\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n+1-1}}{256\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)^{n}}{\left(\frac{5}{8}\right)^{n}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{-1}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$$

Logo, A_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{5}{8}$

35. Considere a progressão geométrica, (u_n), definida por $u_n = 4\times 2^{n-1}$

Determine:

35.1. $u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4\times 2^{n+1-1}}{4\times 2^{n-1}} = 2^{n-n+1} = 2\ , \quad \text{pelo que } r = 2$$

$$S_{10} = 4\times 2^{1-1}\frac{1-2^{10}}{1-2} = 4092$$

35.2. $u_{11} + u_{12} + \cdots + u_{20}$

$$S_N = u_k\frac{1-r^{N-k+1}}{1-r} = u_{11}\frac{1-r^{20-11+1}}{1-r} = 4\times 2^{11-1}\times\frac{1-2^{10}}{1-2} = 4190208$$

36. Considere a progressão geométrica, (u_n), definida por $u_n = \begin{cases} u_1 = 1000 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} \end{cases}$, $n \in IN^+$

Determine a soma dos trinta e cinco primeiros termos da progressão.

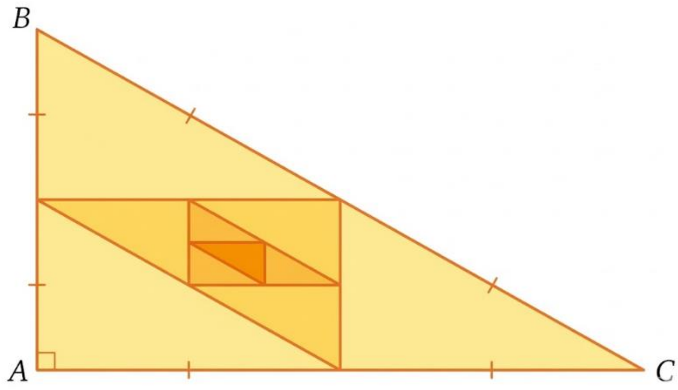
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\ , \quad \text{logo, } r = \frac{1}{2}$$

$$S_{35} = 1\,000\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{35}}{1-\frac{1}{2}} = 2\,000$$

37. Considere um triângulo $[ABC]$, retângulo em A, com 12 unidades de perímetro.

Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo; unindo os pontos médios dos lados do segundo triângulo, obtém-se um terceiro triângulo.

Continuando a proceder deste modo, obtém-se uma sequência de n triângulos, sendo $n > 4$.



Na figura, estão representados os primeiros quatro triângulos da sequência.

37.1. Qual é o perímetro do 4.º triângulo da sequência?

$P_1 = 12$

$P_2 = \frac{12}{2} = 6$

$P_3 = \frac{6}{2} = 3$

$P_4 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

37.2. Determine a soma dos perímetros dos 20 primeiros triângulos da sequência.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Os perímetros dos triângulos são termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

$$S_{20} = 12 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-\frac{1}{2}} \approx 24$$

37.3. Sabe-se que o triângulo $[ABC]$ tem 6 unidades de área.

Determine a soma das áreas dos primeiros 10 triângulos da sequência.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Como a razão dos perímetros é $\frac{1}{2}$, a razão das áreas é $r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$S_{10} = 6 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1-\frac{1}{4}} \approx 8$$

38. Seja b um número real.

Sabe-se que $b, b+12$ e $b+36$ são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Determine a soma dos sete primeiros termos consecutivos da progressão geométrica a partir do termo igual a b, incluindo-o.

$$\frac{b+12}{b}=\frac{b+36}{b+12} \Leftrightarrow (b+12)^2=b(b+36) \quad , \quad \text{com } b \neq 0 \wedge b \neq -12$$

$$\Leftrightarrow \cancel{b^2}+24b+144=\cancel{b^2}+36b$$

$$\Leftrightarrow -12b=-144$$

$$\Leftrightarrow b=12$$

Portanto, os três termos consecutivos são:

12 , $12+12=24$ e $12+36=48$

$$r=\frac{24}{12}=2$$

Logo, $S_7=12\times\frac{1-2^7}{1-2}=1524$

39. Relativamente a uma progressão geométrica, sabe-se que 32 e 8 são dois termos consecutivos da mesma e que a soma dos cinco primeiros termos é igual a 682.

Determine o primeiro termo dessa progressão geométrica.

$$r=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$$

$$S_5=682 \Leftrightarrow u_1\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^5}{1-\frac{1}{4}}=682 \Leftrightarrow u_1\times\frac{341}{256}=682 \Leftrightarrow u_1=\frac{682\times256}{341} \Leftrightarrow u_1=512$$

40. Relativamente a uma progressão geométrica, de razão negativa, sabe-se que o sétimo termo da progressão é 12 e que a soma dos três primeiros termos consecutivos a partir do sétimo (inclusive) é igual a 14,88.

Determine o oitavo termo da progressão geométrica.

Seja u_n a sucessão e r a razão da progressão geométrica.

Sabe-se que $u_7 = 12$ e que $u_7 + u_8 + u_9 = 14{,}88$

$u_8 = u_7 \times r$

$u_9 = u_8 \times r = u_7 \times r \times r = u_7 \times r^2$

Assim, $u_7 + u_7 r + u_7 r^2 = 14{,}88 \Leftrightarrow u_7\left(1 + r + r^2\right) = 14{,}88$

$$\Leftrightarrow 12\left(r^2 + r + 1\right) = 14{,}88$$
$$\Leftrightarrow r^2 + r + 1 = 1{,}24$$
$$\Leftrightarrow r^2 + r - 0{,}24 = 0$$
$$\Leftrightarrow r = -1{,}2 \vee r = 0{,}2$$

Como a razão do progressão geométrica é negativa, $r = -1{,}2$

Portanto, $u_8 = 12 \times (-1{,}2) = -14{,}4$

41. A Ana resolveu pôr de lado algum dinheiro das suas mesadas para comprar uma prancha de *surf*. Para isso, pensou em dois métodos diferentes de o fazer.:

Método A: começar por colocar de lado 2€ no primeiro mês e, a partir daí, duplicar o montante que mensalmente colocará de lado.

Método B: todos os meses colocar de lado 20€.

41.1. Para cada método, escreve o termos geral da sucessão do dinheiro que, em cada mês, a Ana coloca de lado.

n	1	2	3	4	...	n
Método A	2	$2 \times 2 = 4$	$4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 =$ $= 2^3 = 8$	$8 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ $= 2^4 = 16$		2^n
Método B	20	20	20	20		20

$a_n = 2^n \longrightarrow$ método A, progressão geométrica de razão 2

$b_n = 20 \longrightarrow$ método B, sucessão constante

41.2. A fim de quatro meses, quanto dinheiro terá a Ana poupado, no total, em cada um dos métodos de poupança?

Método A: $S_4 = 2\times\dfrac{1-2^4}{1-2} = 30$ €

Método B: $20\times 4 = 80$

41.3. Sabendo que a prancha de *surf* que a Ana quer comprar custa 250€, por qual dos métodos deve optar, de forma a comprá-la o mais rapidamente possível?

Método A:

$S_n = 250 \Leftrightarrow 2\times\dfrac{1-2^n}{1-2} = 250 \Leftrightarrow -\left(1-2^n\right) = 125 \Leftrightarrow -1+2^n = 125 \Leftrightarrow 2^n = 126$

$n = 6 \;\Rightarrow\; 2^6 = 64$

$n = 7 \;\Rightarrow\; 2^7 = 128$

Método B:

$20n = 250 \Leftrightarrow n = 12{,}5$

Se optar pelo método A, ao fim de 7 meses tem o dinheiro suficiente, se optar pelo método B, só terá o dinheiro ao fim de 13 meses.

Logo, deve optar pelo método A.