1. De uma sucessão sabe-se que $v_{n+1} - v_n = n^2 + 1$, $\forall n \in IN$

Então pode afirmar-se que:

(A) $v_n > 0$, $\forall n \in IN$ **(B)** v_n é decrescente

(C) $v_5 < v_4$ **(D)** $v_2 = 2 + v_1$

Se $v_{n+1} - v_n = n^2 + 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que:

- (v_n) é estritamente crescente pois $n^2 + 1 > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$
- $v_{n+1} = v_n + n^2 + 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Então para $n = 1$ vem $v_2 = v_1 + 1^2 + 1$ ou seja, $v_2 = 2 + v_1$.

Resposta: (D)

2. Sendo u_n uma sucessão de números reais qualquer, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $u_n = u_{n+1}$, $\forall n \in IN$ **(B)** $(-1)^{2n} \times u_n = u_n$, $\forall n \in IN$

(C) $u_{n+1} = u_n + 1$, $\forall n \in IN$ **(D)** $u_{2n} = 2 \times u_n$, $\forall n \in IN$

Dado que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $2n$ representa um número par,
$(-1)^{2n} = 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Então $(-1)^{2n} \times u_n = 1 \times u_n = u_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Resposta: (B)

3. Seja a sucessão definida por $b_n = 2n + 3$

A soma $b_{3n} + b_{n+2}$ é representada por:

(A) $6n + 3$ **(B)** $8n + 10$

(C) $8n + 6$ **(D)** $6n + 10$

$b_n = 2n + 3$

$b_{3n} = 2 \times (3n) + 3 = 6n + 3$

$b_{n+2} = 2(n + 2) + 3 = 2n + 4 + 3 = 2n + 7$

$b_{3n} + b_{n+2} = (6n + 3) + (2n + 7) = 8n + 10$

Resposta: (B)

4. Seja a sucessão definida por $u_n = \frac{3n+1}{1-2n}$

Qual dos seguintes números é termo da sucessão?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** $-\frac{16}{9}$ **(D)** $\frac{37}{23}$

$$u_5 = \frac{3\times 5+1}{1-2\times 5} = \frac{15+1}{1-10} = \frac{16}{-9} = -\frac{16}{9}$$

Resposta: (C)

5. Sabendo que $-6 \leq a_n \leq 5, \forall n \in IN$

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) $|a_n| \leq 5, \forall n \in IN$ **(B)** $|a_n| \leq 6, \forall n \in IN$

(C) $5 \leq |a_n| \leq 6, \forall n \in IN$ **(D)** $|a_n| \geq 5, \forall n \in IN$

$$-6 \leqslant a_n \leqslant 5, \forall\, n \in \mathbb{N}$$
$$\Longrightarrow -6 \leqslant a_n \leqslant 6, \forall\, n \in \mathbb{N}$$
$$\Longrightarrow |a_n| \leqslant 6, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Resposta: (B)

6. Sendo $\boldsymbol{v_n = (-1)^n + \frac{n+1}{n}}$, tem-se que:

(A) $\boldsymbol{v_{n+1} - v_n = -2 + \frac{1}{n^2+n}}$ se n é par **(B)** $\boldsymbol{v_{n+1} - v_n = 2 - \frac{1}{n^2+n}}$ se n é par

(C) $\boldsymbol{v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n^2+n}}$ se n é ímpar **(D)** $\boldsymbol{v_{n+1} - v_n = 2 - \frac{1}{n^2+n}}$ se n é ímpar

$$v_n = (-1)^n + \frac{n+1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1} + \frac{n+1+1}{n+1} - (-1)^n - \frac{n+1}{n}$$

$$= (-1)^{n+1} - (-1)^n + \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n}$$

$$= (-1)^{n+1} + (-1)\,(-1)^n + \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)}$$

$$= (-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} + \frac{-1}{n^2+n}$$

$$= 2 \times (-1)^{n+1} - \frac{1}{n^2+n}$$

Logo

$$v_{n+1} - v_n = -2 - \frac{1}{n^2+n} \text{ se } n \text{ é par } (n+1 \text{ é ímpar})$$

$$v_{n+1} - v_n = 2 - \frac{1}{n^2+n} \text{ se } n \text{ é ímpar } (n+1 \text{ é par})$$

Resposta: (D)

7. Considere a função f, de domínio IR, definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6x & \text{se } x\leq 1 \\ 5x & \text{se } x>1 \end{cases}$$

Seja a_n a sucessão definida por $a_n=f\left(n-\frac{1}{n}\right)$.

Qual das seguintes expressões define o termo da sucessão a_n ?

(A) $5n-\frac{1}{n}$ **(B)** $n^2-\frac{6}{n}$ **(C)** $5n-\frac{5}{n}$ **(D)** $n-\frac{1}{n}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x & \text{se } x\leqslant 1 \\ 5x & \text{se } x>1 \end{cases}$$

$$a_n=f\left(n-\frac{1}{n}\right)$$

- Se $n\geqslant 2$, $n-\dfrac{1}{n}>1$ pelo que, para $n\geqslant 2$,

  $$a_n=f\left(n-\frac{1}{n}\right)=5\left(n-\frac{1}{n}\right)=5n-\frac{5}{n}$$

- Se $n=1$, $n-\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{1}=0\leqslant 1$, pelo que

  $$a_1=f(0)=0^2-0=0=5\times 1-\frac{5}{1}$$

Logo, $a_n=5n-\dfrac{5}{n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$

Resposta: (C)

8. Acerca da sucessão u_n sabe-se que $\frac{u_2}{u_1} = 2$ e $\frac{u_3}{u_2} = 2$

Então, pode afirmar-se que:

(A) a sucessão é monótona

(B) a sucessão pode ser crescente

(C) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$

(D) a sucessão pode ser crescente

Se $u_n = -2^n$,

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{-4}{-2} = 2,\ \frac{u_3}{u_2} = \frac{-8}{-4} = 2 \text{ e } (u_n) \text{ é decrescente.}$$

Se $u_n = \begin{cases} -2^n & \text{se } n \leqslant 3 \\ \frac{1}{n} & \text{se } n > 3 \end{cases}$, verifica-se que apesar de $\frac{u_2}{u_1} = 2$

e $\frac{u_3}{u_2} = 2$, (A), (C) e (D) são falsas.

Resposta: (B)

9. Considere a função f, de domínio IR, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Seja a_n a sucessão definida por $a_n = f(n-2)$

Indique qual das expressões seguintes define o termo geral de a_n

(A) $-(n-2)^2$

(B) $(n-2)^2 - n$

(C) $-n+2$

(D) $4 - 4n - n^2$

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$n - 2 > 0 \Leftrightarrow n > 2 \overset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n \geqslant 3$$

- Para $n \geqslant 3$,
  $a_n = f(n-2) = (n-2)^2 = n^2 - 4n + 4 = 4 - 4n + n^2$
- $a_1 = f(1-2) = f(-1) = -(-1) = 1$
  Para $n = 1$, $4 - 4n + n^2 = 4 - 4 + 1 = 1 = a_1$
- $a_2 = f(2-2) = f(0) = -0 = 0$
  Para $n = 2$, $4 - 4n + n^2 = 4 - 8 + 4 = 0 = a_2$

Logo, $a_n = 4 - 4n + n^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Resposta: (D)

10. Considere a sucessão de termo geral $\boldsymbol{a_n = -n^2 + 2n}$.

10.1 Calcule a soma dos três primeiros termos.

$$a_1 + a_2 + a_3 = (-1 + 2) + (-4 + 4) + (-9 + 6) = 1 + 0 - 3 = -2$$

10.2 Verifique se $\boldsymbol{-8}$ é termo da sucessão.

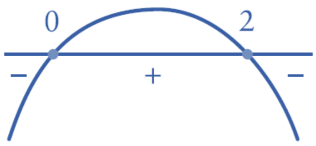
$$a_n = -8 \Leftrightarrow -n^2 + 2n = -8 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow n = 4 \vee n = -2$$

$$a_4 = -8$$

10.3 A partir de que ordem são negativos os termos da sucessão?

$$a_n < 0 \Leftrightarrow -n^2 + 2n < 0 \Leftrightarrow n(-n + 2) < 0$$



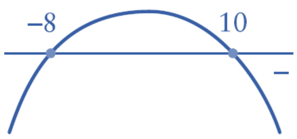
$$\underset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n > 2$$

A partir do terceiro termo (inclusive).

10.4 Determine n de modo que $\boldsymbol{a_n \leq -80}$.

$$a_n \leqslant -80 \Leftrightarrow -n^2 + 2n \leqslant -80$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 80 \geqslant 0$$



C.A.

$$n^2 - 2n - 80 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm 18}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -8 \vee n = 10$$

Como $n \in \mathbb{N}$, vem $a_n \leqslant -80 \Leftrightarrow n \geqslant 10$

11. Observe a sequência de números pentagonais 1 , 5 , 12 , 22 , 35 , 51 , ...

11.1 Sendo $\boldsymbol{a_n}$ o número pentagonal de ordem n , verifique que, para $\boldsymbol{n \leq 4}$, se tem

$$\boldsymbol{a_n = \frac{3n^2 - n}{2} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3n - 2 \, , \forall n \geq 2 \end{cases}}$$

$$a_n = \frac{3n^2 - n}{2} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3n - 2, \ \forall \ n \geqslant 2 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{3 \times 1 - 1}{2} = 1 \qquad \text{ou} \quad a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{3 \times 4 - 2}{2} = 5 \qquad \text{ou} \quad a_2 = 1 + 3 \times 2 - 2 = 5$$

$$a_3 = \frac{3 \times 9 - 3}{2} = 12 \qquad \text{ou} \quad a_3 = 5 + 3 \times 3 - 2 = 12$$

$$a_4 = \frac{3 \times 16 - 4}{2} = 22 \qquad \text{ou} \quad a_4 = 12 + 3 \times 4 - 2 = 22$$

11.2 Admitindo que as igualdades apresentadas também são válidas para $\boldsymbol{n > 4}$, verifique se há na sequência um número 145.

$$a_n = 145 \Leftrightarrow \frac{3n^2 - n}{2} = 145 \Leftrightarrow 3n^2 - n = 290$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - n - 290 = 0 \underset{}{\overset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow}} n = 10$$

A figura n.º 10 tem 145 pontos.

12. Estude quanto à monotonia as sucessões definidas por:

12.1 $\boldsymbol{a_n = \frac{1}{n+2} - 3}$

$$a_n = \frac{1}{n+2} - 3$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+3} - 3 - \left(\frac{1}{n+2} - 3\right) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}$$

$$= \frac{n + 2 - n - 3}{(n+2)(n+3)} = \frac{-1}{(n+2)(n+3)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{(n+2)(n+3)} < 0, \forall \ n \in \mathbb{N}$$

(a_n) é estritamente decrescente.

12.2 $a_n = (-1)^n \times 3n + 1$

$$a_n = (-1)^n \times 3n + 1$$

$$a_1 = (-1)^1 \times 3 + 1 = -3 + 1 = -2$$

$$a_2 = (-1)^2 \times 6 + 1 = 7$$

$$a_3 = (-1)^3 \times 9 + 1 = -8$$

$$a_1 = -2,\ \ a_2 = 7,\ \ a_3 = -8;\ \ a_2 > a_1 \text{ e } a_3 < a_2$$

(a_n) não é monótona.

12.3 $a_n = -2 + 3(n-1)^2$

$$a_n = -2 + 3(n-1)^2$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= -2 + 3(n+1-1)^2 - (-2 + 3(n-1)^2) \\ &= \cancel{-2} + 3n^2 + \cancel{2} - 3(n^2 - 2n + 1) \\ &= \cancel{3n^2} - \cancel{3n^2} + 6n - 3 \\ &= 3(2n-1) \end{aligned}$$

$a_{n+1} - a_n = 3(2n-1) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$; (a_n) é estritamente crescente.

12.4 $a_n = \begin{cases} 3n-1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3n-2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

$$a_n = \begin{cases} 3n-1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3n-2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Se n é ímpar, $n+1$ é par.

Se n é par, $n+1$ é ímpar.

Então

- Se n é ímpar

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 3(n+1) - 2 - (3n-1) \\ &= 3n + 3 - 2 - 3n + 1 = 2 \end{aligned}$$

- Se n é par

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 3(n+1) - 1 - (3n-2) \\ &= 3n + 3 - 1 - 3n + 2 = 4 \end{aligned}$$

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 4 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$a_{n+1} - a_n > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$; (a_n) é estritamente crescente.

12.5 $a_n = n^2 - 6n$

$$a_n = n^2 - 6n$$
$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 6(n+1) - n^2 + 6n$$
$$= \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{6n} - 6 - \cancel{n^2} + \cancel{6n} = 2n - 5$$
$$a_{n+1} - a_n = 2n - 5;$$
$$n \leqslant 2 \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0;$$
$n > 3 \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0$; (a_n) não é monótona.

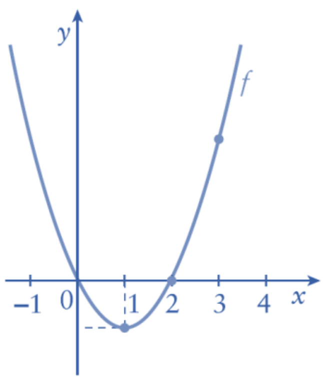
12.6 $f_n = 1 + |2n - 11|$

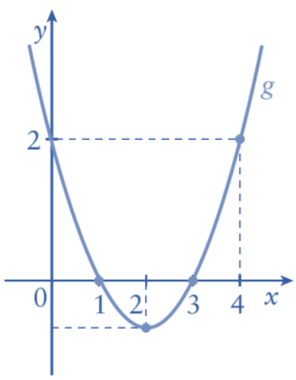
$a_n = 1 + |2n - 11|$
$2n - 11 = 0 \Leftrightarrow n = 5{,}5$
$a_4 = 1 + |2 \times 4 - 11| = 1 + 3 = 4$
$a_5 = 1 + |2 \times 5 - 11| = 1 + 1 = 2$
$a_6 = 1 + |2 \times 6 - 11| = 1 + 1 = 2$
$a_7 = 1 + |2 \times 7 - 11| = 1 + 3 = 4$
$a_4 = 4,\ a_5 = a_6 = 2,\ a_7 = 4$; $a_5 < a_4$ e $a_7 > a_6$.
(a_n) não é monótona.

13. Considere as funções f e g, de domínio IR, definidas por

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 4x + 3$$

13.1 Utilize a calculadora gráfica e faça um esboço de cada uma das funções.





13.2 Utilizando **13.1** , o que se pode concluir acerca da monotonia das sucessões u_n e v_n , sendo

$$u_n = n^2 - 2n \quad \text{e} \quad v_n = n^2 - 4n + 3$$

A restrição de f ao intervalo $[1, +\infty[$ é estritamente crescente.
Logo a restrição de f a $\mathbb{N}$ também é estritamente crescente.

(u_n) é estritamente crescente.

$v_1 = f(1) = 0$

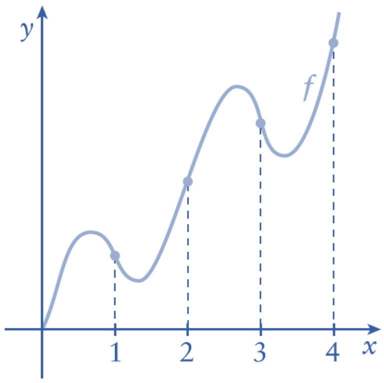
$v_2 = f(2) = -1$

$v_3 = f(3) = 0$

$v_2 < v_1$ e $v_3 > v_2$; (v_n) não é monótona.

13.3 Se soubermos que a sucessão $f(n)$ é monótona, podemos concluir que a função $f(x)$, real de variável real, definida pela mesma expressão algébrica é monótona? Justifique utilizando um gráfico.

A sucessão definida por $n \mapsto f(n)$ pode ser monótona sem que a função definida em $\mathbb{R}$ por $x \mapsto f(x)$ o seja como se ilustra no gráfico seguinte:



14. Uma sucessão a_n satisfaz a seguinte condição $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - 15n + 18$

14.1 O que pode concluir quanto à monotonia da sucessão?

$a_{n+1} - a_n = 3n^2 - 15n + 18$

$3n^2 - 15n + 18 = 0 \Leftrightarrow n = \dfrac{15 \pm \sqrt{15^2 - 12 \times 18}}{6}$

$\Leftrightarrow n = 2 \lor n = 3$

$a_{n+1} - a_n = 3(n-2)(n-3) \geqslant 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) é monótona crescente.

14.2 A sucessão tem três termos iguais a zero.

Qual a ordem desses termos?

Explique o raciocínio.

$a_{n+1} - a_n = 0 \Leftrightarrow 3(n-2)(n-3) = 0$

$\Leftrightarrow n = 2 \lor n = 3$

$a_{n+1} - a_n = 0 \Leftrightarrow n = 2 \lor n = 3$

$a_{n+1} = a_n \Leftrightarrow n = 2 \lor n = 3$

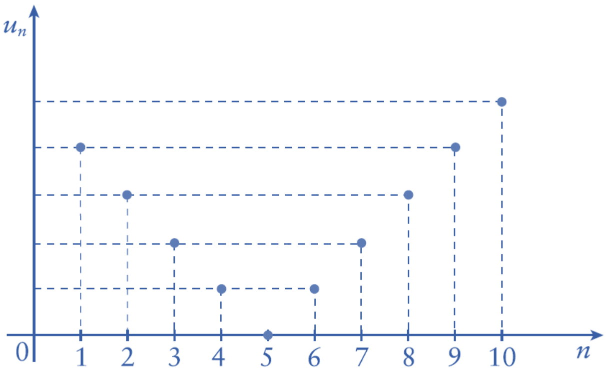
$a_3 = a_2$ e $a_4 = a_3$

A sucessão (a_n) só tem três termos iguais: $a_2 = a_3 = a_4$.

Logo, se tem três termos nulos só poderá ser $a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

15. Escreva o termo geral de um sucessão que seja crescente a partir do 5.º termo e que $\boldsymbol{u_5 < u_4}$

Por exemplo:



$u_n = |n-5|$ (por exemplo)

16. É dada a sucessão de termo geral $\boldsymbol{a_n = 1 - \frac{3}{2n}}$

Justifique que a sucessão é crescente.

$$a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{3}{2(n+1)} - \left(1 - \frac{3}{2n}\right) = \frac{3}{2n} - \frac{3}{2(n+1)} = \frac{3n+3-3n}{2n(n+1)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{2n(n+1)} > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

(a_n) é estritamente crescente.

17. Considere a sucessão de termo geral $\boldsymbol{u_n} = \frac{2n^2+6}{4}$

17.1 Verifique que 51,5 é um termo da sucessão.

$$u_n = 51,5 \Leftrightarrow \frac{2n^2+6}{4} = 51,5$$
$$\Leftrightarrow 2n^2 + 6 = 206$$
$$\Leftrightarrow 2n^2 = 200 \Leftrightarrow n^2 = 100 \overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n = 10$$
$$u_{10} = 51,5$$

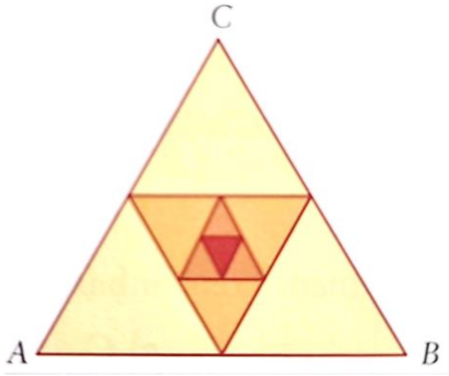
17.2 Determine o número de termos que são maiores do que 100 e menores do que 500.

$$u_n > 100 \wedge u_n < 500 \Leftrightarrow \frac{2n^2+6}{4} > 100 \wedge \frac{2n^2+6}{4} < 500$$
$$\Leftrightarrow 2n^2 + 6 > 400 \wedge 2n^2 + 6 < 2000$$
$$\Leftrightarrow n^2 > 197 \wedge n^2 < 997$$
$$\overset{n\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n > 14 \wedge n \leqslant 31$$

$31 - 14 = 17$

17 termos

18. Na figura está representado, $\boldsymbol{T_1}$, um triângulo equilátero $[\boldsymbol{ABC}]$, de área 1 .



Unindo os pontos médios dos lados de $\boldsymbol{T_1}$ obtém-se outro triângulo equilátero $\boldsymbol{T_2}$. Repetindo o processo obtém-se a sucessão dos triângulos $\boldsymbol{T_n}$ que a figura sugere.

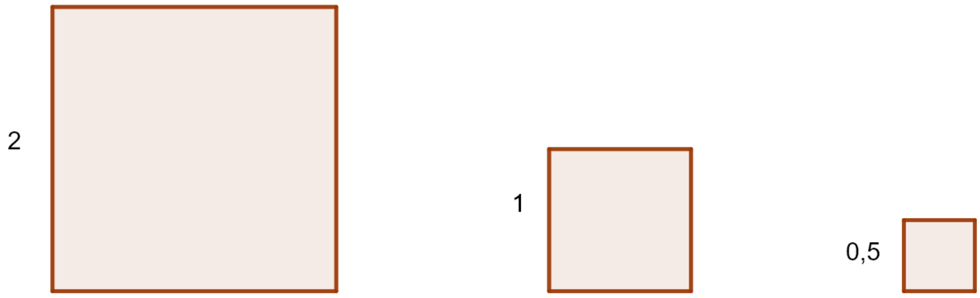
Defina por recorrência a sucessão $\boldsymbol{a_n}$ das áreas dos triângulos $\boldsymbol{T_n}$.

A área de T_2 é igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo T_1.

A área de T_{n+1} é igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo T_n.

Então $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}\, a_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

19. Observe a sucessão das figuras seguintes.



Admita que o lado do primeiro quadrado mede 2 cm ; o lado do segundo quadrado mede 1 cm ; o do terceiro quadrado 0,5 cm ; ... Cada quadrado, a partir do segundo, tem o comprimento do lado igual a metade do comprimento do lado do quadrado anterior.

19.1 Qual é a área do 5.º quadrado? E do 6.º quadrado?

$$a_1 = 2^2 = 4$$
$$a_2 = 1^2 = 1$$
$$a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$a_4 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$
$$a_5 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$$
$$a_6 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{256}$$

A área do 5.º quadrado é $\left(\frac{1}{8}\right)^2 \text{cm}^2 = \frac{1}{64}\ \text{cm}^2$.

A área do 6.º quadrado é $\left(\frac{1}{16}\right)^2 \text{cm}^2 = \frac{1}{256}\ \text{cm}^2$.

19.2 Relativamente às áreas calculadas determine a razão entre a área do quadrado de ordem $\boldsymbol{n+1}$ e a área do quadrado de ordem $\boldsymbol{n}$.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_6}{a_5} = \frac{1}{4}$$

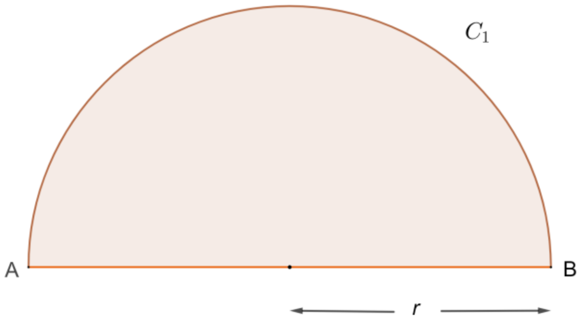
19.3 Defina por recorrência a sucessão $\boldsymbol{a_n}$ em que o termo de ordem $\boldsymbol{n}$ é a área do enésimo quadrado.

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n, \ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

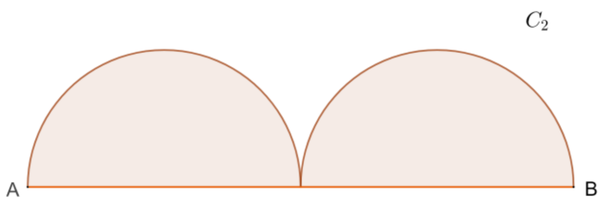
20. Observe as figuras seguintes construídas a partir de um segmento de reta $[AB]$.

Sabe-se que: $r = \frac{\overline{AB}}{2}$.

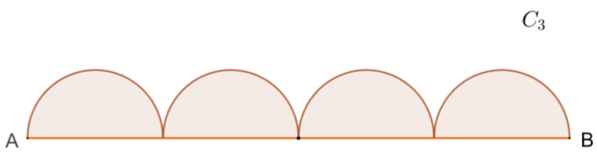
- A linha C_1 é uma semicircunferência de raio r .



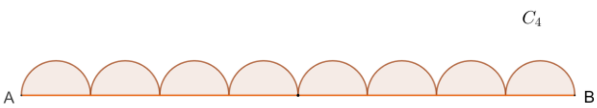
- A linha C_2 é formada por duas semicircunferências geometricamente iguais.



- A linha C_3 é formada por quatro semicircunferências geometricamente iguais.



- A linha C_4 é formada por oito semicircunferências geometricamente iguais.



20.1 Escreva em função de r , o comprimento das linhas:

a) C_1

$C_1 = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$

$C_1 = \pi r$

b) C_2

$R_2 = \frac{1}{2} r$

$C_2 = 2\frac{2\pi r_2}{2} = 2\pi r_2 = 2\pi \times \frac{1}{2} r = \pi r$

$C_2 = \pi r$

c) C_3

$$r_3 = \frac{1}{2}r_2 = \frac{1}{4}r$$
$$C_3 = 4 \times \frac{2\pi r_3}{2} = 4\pi r_3 = 4\pi \times \frac{1}{4}r = \pi r$$
$$C_3 = \pi r$$

d) C_4

$$r_4 = \frac{1}{2}r_3 = \frac{1}{8}r$$
$$C_4 = 8 \times \frac{2\pi r_4}{2} = 8\pi r_4 = 8\pi \times \frac{1}{8}r = \pi r$$
$$C_4 = \pi r$$

20.2 Determine a área definida pela linha e pelo segmento de reta $[AB]$, ou seja, a região representada a cor:

a) Na linha C_1 (A_1)

$$A_1 = \frac{\pi r^2}{2}$$

b) Na linha C_2 (A_2)

$$A_2 = 2 \times \frac{\pi (r_2)^2}{2} = \pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}$$
$$A_2 = \frac{\pi r^2}{4}$$

c) Na linha C_3 (A_3)

$$A_3 = 4 \times \frac{\pi (r_3)^2}{2} = 2\pi\left(\frac{1}{4}r\right)^2 = \frac{\pi r^2}{8}$$
$$A_3 = \frac{\pi r^2}{8}$$

d) Na linha C_4 (A_4)

$$A_4 = 8 \times \frac{\pi (r_4)^2}{2} = 4\pi\left(\frac{1}{8}r\right)^2 = \frac{\pi r^2}{16}$$
$$A_4 = \frac{\pi r^2}{16}$$

20.3 Considere a sucessão A_n em que os quatro primeiros termos são A_1, A_2, A_3 **e** A_4 calculados em **20.2**.

Mantendo a regularidade definida, ou seja, cada figura a partir da segunda tem o dobro dos semicírculos da figura anterior, todos são geometricamente iguais e a soma dos correspondentes diâmetros é igual a $\overline{AB}$, define, por recorrência, esta sucessão que se designou por A_n.

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\pi r^2}{2} \\ A_{n+1} = \dfrac{1}{2}A_n, \ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

20.4 Qual será o 6.º termo da sucessão definida em **20.4**

$$A_5 = \frac{1}{2}A_4 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi r^2}{16} = \frac{\pi r^2}{32}$$
$$A_6 = \frac{1}{2}A_5 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi r^2}{32} = \frac{\pi r^2}{64}$$
$$A_6 = \frac{\pi r^2}{64}$$

21. Observe a sucessão das figura seguintes:

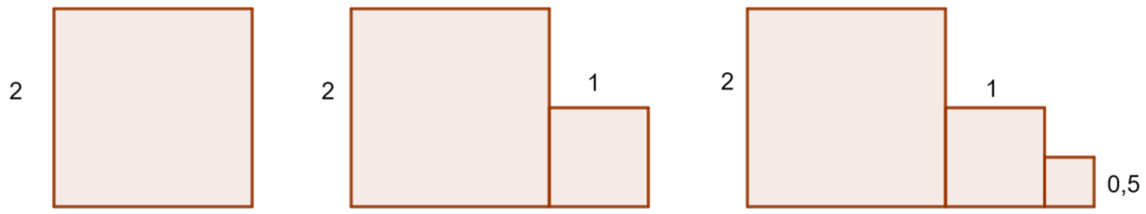


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Admita que a figura 1 é um quadrado cujo lado mede 2 cm ; a figura 2 é formada por dois quadrados, um com 2 cm de lado e o outro com 1 cm de lado ; a figura 3 é formada por três quadrados com 2 cm , 1 cm e 0,5 cm de lado, respetivamente.

Admita que se mantém a regularidade descrito na formação das figuras seguintes e designa por a_n a área, em centímetros quadrados, da figura de ordem n .

21.1 Determine a_1 , a_2 e a_3 .

$$a_1 = 2^2 = 4$$
$$a_2 = 4 + 1^2 = 5$$
$$a_3 = 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$
$$a_1 = 4;\ a_2 = 5;\ a_3 = \frac{21}{4}.$$

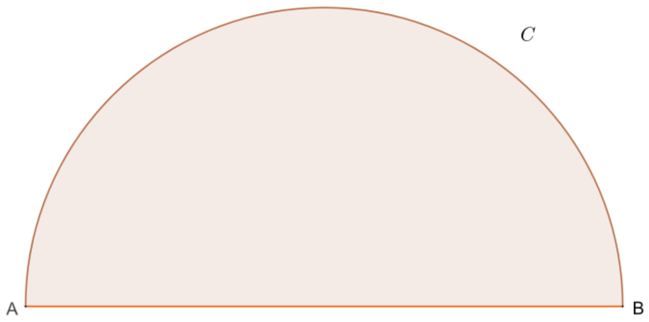
21.2 Verifique que a razão entre as áreas consecutivas não é constante.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{4};\ \frac{a_3}{a_2} = \frac{21}{4} : 5 = \frac{21}{20}$$
$$\frac{5}{4} \neq \frac{21}{20}$$

21.3 Defina por recorrência a sucessão a_n .

$$a_1 = 4,\ a_2 = a_1 + 1^2,\ a_3 = a_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ a_4 = a_3 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$
$$a_1 = 4;\ a_2 = a_1 + \frac{1}{4^0};\ a_3 = a_2 + \frac{1}{4^1};\ a_4 = a_3 + \frac{1}{4^2}$$
$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{4^{n-1}},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

22. Considere C um semicírculo de diâmetro $[AB]$ sendo $\overline{AB} = 20$ cm.



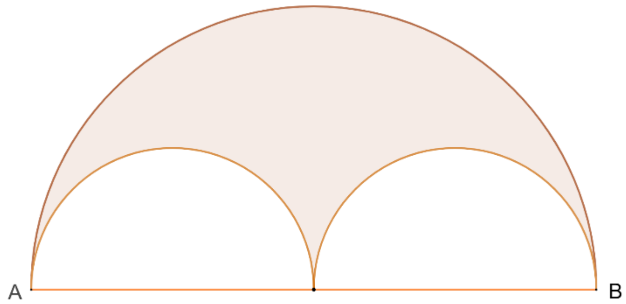


Fig. 1

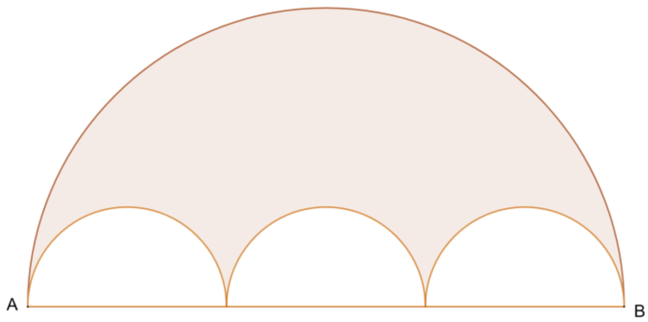


Fig. 2

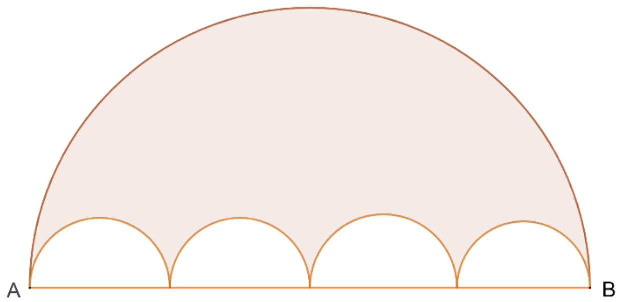


Fig. 3

Para obter a figura 1 dividiu-se o segmento de reta $[AB]$ em duas partes iguais e desenharem-se dois semicírculos em que o diâmetro de cada um é metade do comprimento de $[AB]$.

Para obter a figura 2 dividiu-se o segmento de reta $[AB]$ em três partes iguais e desenharam-se três semicírculos em que o diâmetro é a terça parte do comprimento de $[AB]$.

Para obter a figura 3 dividiu-se o segmento de reta $[AB]$ em quatro partes iguais e desenharam-se quatro semicírculos cujo diâmetro é a quarta parte do comprimento de $[AB]$.

Considere $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ **e** $\boldsymbol{a_n}$ a área da região colorida a vermelho, respetivamente das figuras 1 , 2 , 3 e $\boldsymbol{n}$

22.1 Determine o valor exato de $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ **e** $\boldsymbol{a_3}$.

$\overline{AB} = 20;\ r = 10$

$r_1 = \frac{10}{2} = 5$

$$a_1 = \frac{\pi \times 10^2}{2} - 2 \times \frac{\pi \times 5^2}{2} = 50\pi - 25\pi = 25\pi$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$$

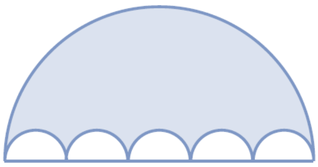
$$a_2 = 50\pi - 3 \times \frac{\pi \times \left(\frac{10}{3}\right)^2}{2} = 50\pi - \frac{3}{2} \times \pi \times \frac{100}{9} = 50\pi - \frac{50\pi}{3} = \frac{100\pi}{3}$$

$$r_3 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{4} = \frac{5}{2}$$

$$a_3 = 50\pi - 4 \times \frac{\pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} = 50\pi - 2\pi \times \frac{25}{4} = 50\pi - \frac{25\pi}{2} = \frac{75\pi}{2}$$

$$a_1 = 25\pi \text{ cm}^2;\ a_2 = \frac{100\pi}{3} \text{ cm}^2;\ a_3 = \frac{75\pi}{2} \text{ cm}^2.$$

22.2 Faça um esboço da figura 4 e calcula $\boldsymbol{a_4}$.



$$r_4 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{5} = 2$$

$$a_4 = 50\pi - 5 \times \frac{\pi \times 2^2}{2} = 50\pi - 10\pi = 40\pi$$

$$a_4 = 40\pi \text{ cm}^2$$

22.3 Relativamente à figura $\boldsymbol{n}$, divide-se o segmento de reta $[\boldsymbol{AB}]$ em $\boldsymbol{n+1}$ partes iguais desenham-se $\boldsymbol{n+1}$ semicírculos iguais.

Mostre que $\boldsymbol{a_n = 50\pi \times \frac{n}{n+1}}$

$$r_n = \frac{1}{2} \times \frac{20}{n+1} = \frac{10}{n+1}$$

$$a_n = 50\pi - (n+1) \times \frac{\pi \times \left(\frac{10}{n+1}\right)^2}{2} = 50\pi - \frac{(n+1)}{2} \times \pi \times \frac{100}{(n+1)^2}$$

$$= 50\pi - 50\pi \times \frac{1}{n+1} = 50\pi\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 50\pi \times \frac{n+1-1}{n+1}$$

$$a_n = 50\pi \times \frac{n}{n+1}$$

22.4 Considere a sucessão referida em **22.3** e estuda-a quanto à monotonia.

$$a_{n+1} - a_n = 50\pi \, \frac{n+1}{n+1+1} - 50\pi \, \frac{n}{n+1}$$

$$= 50\pi\left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right) = 50\pi \times \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)}$$

$$= 50\pi \, \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{50\pi}{(n+2)(n+1)} > 0, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{50\pi}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall \ n \in \mathbb{N}$$

(a_n) é estritamente crescente.

22.6 Com a ajuda da calculadora gráfica calcule $\boldsymbol{a_{100}}$ e $\boldsymbol{a_{1000}}$.

Efetue uma conjetura para o comportamento dos termos da sucessão $\boldsymbol{a_n}$ à medida que $\boldsymbol{n}$ tende para $+\infty$.

$$a_{100} = 50\pi \times \frac{100}{101} \approx 49{,}5\pi$$

$$a_{1000} = 50\pi \times \frac{1000}{1001} \approx 49{,}95\pi$$

À medida que n tende para $+\infty$ a área dos semicírculos tende para zero pelo que a área a_n tende para a área de C, isto é, para $50\pi\ \text{cm}^2$.